Skriptum zur Vorlesung
Mengenlehre

Klaus Gloede
Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Sommersemester 2004

Vorwort

Dieses Skriptum ist gedacht für die Hörer meiner Vorlesung im Sommersemester 2004; es soll weder ein Lehrbuch noch den Besuch der Vorlesung ersetzen, sondern das Mitschreiben erleichtern und zum Nachschlagen der wichtigsten Definitionen und Ergebnisse dienen.

Im ersten Teil wird die ZERMELO-FRAENKELsche Mengenlehre *ZF* als *axiomatische Theorie* entwickelt. Hier werden die wichtigsten mengentheoretischen Begriffsbildungen eingeführt, wie sie in den verschiedenen Gebieten der Mathematik benötigt werden. Dabei gehen wir vom zentralen Begriff der *Wohlordnung* aus, die im anschließenden zweiten Teil zu den Prinzipien der Induktion und Rekursion führt (welche leicht für den Fall fundierter Relationen verallgemeinert werden können). Mit dem *Auswahlaxiom* im Teil III wird wieder eine enge Verknüpfung mit einzelnen mathematischen Gebieten angedeutet, es spielt aber auch eine entscheidende Rolle für die Theorie der Kardinalzahlen (Teil IV). Das *Kontinuumsproblem* ist der Ausgangspunkt für die Entwicklung der *Deskriptiven Mengenlehre*, hier können nur die einfachsten Ergebnisse aufgeführt werden. Auch die anschließenden Teile geben nur einen knappen und unvollkommenen Einblick in weitere mengentheoretische Themen:

- Axiomatisierungen der Mengenlehre mittels *Reflexionsprinzipien*, die sich besonders flexible zu Abschwächungen oder auch Verstärkung der *ZF*-Mengenlehre einsetzen lassen und auch besonders gut geeignet sind, Modelle der Mengenlehre zu charakterisieren, welche mittels einer kumulativen Hierarchie aufgebaut sind,

- Präzisierung des Begriffes der *definierbaren* Menge und damit eine Charakterisierung *innerer* Modelle; die Hierarchie der konstruktiblen Mengen als Modell der Mengenlehre, in welcher das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese erfüllt sind,

- einige grundlegende Ergebnisse aus der Theorie der *großen Kardinalzahlen*.

Heidelberg, im Juli 2004

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Mengen und Unmengen

Vorbemerkung

Die Mengenlehre hat für die Mathematik eine zweifache Bedeutung:

1. Als *Grundlagentheorie* stellt sie sämtliche Objekte, die in den einzelnen mathematischen Disziplinen untersucht werden:

   Zahlen, Funktionen, Operatoren, Relationen, Punkte, Räume ...

   unter dem einheitlichen Begriff der *Menge* dar.

2. Außerdem ist sie selbst eine *mathematische Theorie* des Unendlichen (insbesondere der transfiniten Ordinal- und Kardinalzahlen).

Beide Aspekte lassen sich nicht völlig voneinander trennen; insbesondere das Auswahlaxiom (mit seinen vielen äquivalenten Fassungen) hat zahlreiche Anwendungen in fast allen mathematischen Gebieten, ist aber auch wichtig für die Entwicklung der Theorie der transfiniten Kardinalzahlen.

Als Einleitung in die Mengenlehre wollen wir dem Weg GEORG CANTORs zur Einführung der transfiniten Ordinalzahlen folgen und kurz in die Theorie der Ordnungen und Wohlordnungen einführen. Dabei gelangen wir über die früheste mengentheoretische Antinomie zu einer axiomatisch neubegründeten Mengenlehre nach ERNST ZERMELO und ABRAHAM A. FRAENKEL, wie sie heute allgemein in Gebrauch als Grundlage für die Mathematik ist. Für den formal-axiomatischen Aufbau der Mengenlehre benötigen wir den Formelbegriff aus der *Mathematischen Logik*, die zwar mit der Mengenlehre als Grundlagentheorie eng verknüpft ist, deren Kenntnis hier aber nicht vorausgesetzt wird. Allerdings werden wir die üblichen logischen Symbole als Abkürzungen benutzen und mit ihrer intuitiven Bedeutung verwenden:

$\neg$	*nicht*
$\vee$	*oder*
$\wedge$	*und*
$\longrightarrow$	*wenn ... dann*
$\longleftrightarrow$	*genau dann ... wenn (im Englischen: iff)*
$\exists$	*existiert*
$\exists!$	*es existiert genau ein*
$\forall$	*für alle*

Auch die einfachsten mengentheoretischen Bezeichnungen, die wir später formal einführen werden, dürften bereits bekannt sein:

$a \in A$	*a ist Element von A*
$\emptyset$	*leere Menge*
$\{a\}$	*Einermenge von a*
$\{a,b\}$	*(ungeordnetes) Paar von a und b*
$a \cup b$	*Vereinigung von a und b*
$a \cap b$	*Durchschnitt von a und b*
$\subseteq$	*Teilmenge*

Kapitel 1

Ordnungen und Wohlordnungen

In seinen Untersuchungen über die Konvergenz von Fourierreihen führte CANTOR den Begriff der *Ableitung* A' einer Menge A von reellen Zahlen ein: A' besteht aus den Elementen von A, welche Häufungspunkte von Elementen von A sind. Man kann nun nach der Menge der Häufungspunkte dieser neuen Menge fragen und damit eine Menge A'' bilden, die Menge der Häufungspunkte der Häufungspunkte von A. Iteriert man diese Operation, so erhält man eine eine unendlich-absteigende Folge

$$A \supseteq A' \supseteq A'' \supseteq A''' \dots$$

deren "Limes" A^∞, d. h. in diesem Fall der Durchschnitt, möglicherweise wieder isolierte Punkte enthält, so daß man wieder die Menge ihrer Häufungspunkte bilden kann. Auf diese Weise fortgesetzt, führt der Zählprozeß über die natürlichen Zahlen hinaus ins Transfinite, und zwar mit ω statt ∞ als neuer "Zahl":

$$0,1,2,3,\dots\omega,\omega+1,\omega+2,\omega+3,\dots\omega+\omega,$$
$$\omega+\omega+1,\omega+\omega+2,\dots\omega+\omega+\omega,\dots\omega\cdot\omega,\dots$$

Einen derartigen Zählprozeß erhalten wir auch, wenn wir die natürlichen Zahlen umordnen und neu aufzählen, etwa erst die Potenzen von 2, dann die Potenzen von 3, dann die Potenzen von 5 ...:

$$1,2,4,8,\dots 3,9,27,\dots 5,25,125,\dots$$

und dann bleibt immer noch ein unendlicher Rest von Zahlen wie 0, 6, 10, ...
Offenbar gibt es verschiedene Möglichkeiten, ins Unendliche aufzuzählen, wie unterscheiden sich diese Möglichkeiten? Führen unterschiedliche Aufzählungen vielleicht zu Widersprüchen? Lassen sich überhaupt alle Mengen in irgendeiner

Weise aufzählen? Tatsächlich ergeben sich Widersprüche, wenn man allzu naiv versucht, Eigenschaften von endlichen auf unendliche Mengen zu übertragen; trotzdem kann man aber die Theorie der Wohlordnungen und der Ordinalzahlen einheitlich für endliche und unendliche Mengen begründen. Hier setzen wir zunächst einen intuitiven Mengenbegriff voraus (eine formale Begründung werden wir später nachliefern) und erinnern an die in der Mathematik üblichen Ordnungsbegriffe:

1.1 Ordnungen

1. Eine (reflexive) **teilweise Ordnung** auf einer Menge A ist eine 2-stellige Relation $\leq$ auf A, so daß für alle $a,b,c \in A$:

   (a) $a \leq a$ **reflexiv**,
   (b) $a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a = b$ **antisymmetrisch**,
   (c) $a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$ **transitiv**.

2. Eine (reflexive) **lineare Ordnung** auf A ist eine teilweise Ordnung auf A, so daß für alle $a,b \in A$:

   (d) $a \leq b \vee b \leq a$ **vergleichbar (connex)**.

3. Eine (irreflexive) **teilweise Ordnung** auf einer Menge A ist eine 2-stellige Relation $<$ auf A, so daß für alle $a,b,c \in A$:

   (a') $a \not< a$ **irreflexiv**,
   (c') $a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$ **transitiv**.

4. Eine (irreflexive) **lineare Ordnung** auf A ist eine teilweise Ordnung auf A, so daß für alle $a,b \in A$:
   (d') $a < b \vee a = b \vee b < a$ **vergleichbar (connex)**.

Definiert man

$$a < b :\leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b,$$

so erhält man aus einer reflexiven (teilweisen) Ordnung $\leq$ eine irreflexive (teilweise) Ordnung $<$, und umgekehrt erhält man durch

$$a \leq b :\leftrightarrow a < b \vee a = b$$

aus einer irreflexiven (teilweisen) Ordnung $<$ wieder eine reflexive (teilweise) Ordnung $\leq$ (und bei wiederholter Operation die alte Ordnung zurück).

Eine teilweise Ordnung nennt man manchmal auch eine **partielle** (oder **Halb-**) Ordnung, eine lineare Ordnung auch einfach **Ordnung**. Die gewöhnlichen Ordnungen auf den natürlichen, den ganzen, den rationalen und den reellen Zahlen sind offenbar lineare Ordnungen; die Relation

$$f < g :\leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\, f(x) < g(x)$$

auf den reellen Funktionen ist dagegen nur eine teilweise Ordnung.

Die natürlichen Zahlen lassen sich der Größe nach aufzählen, aber für die anderen Zahlbereiche ist dies nicht möglich; selbst wenn man noch $-\infty$ als "kleinste Zahl" hinzunimmt, gibt es keine nächstgrößere (und bei dichten Ordnungen wie den rationalen Zahlen gibt es zu überhaupt keiner Zahl eine nächstgrößere). Um diese Bereiche in der Form $\{a_0, a_1, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots\}$ aufzuzählen, müssen wir sie auf solche Weise neu ordnen, daß man mit

(i) einem kleinsten Element beginnen kann,

und wenn man in der Aufzählung zu einem Element gekommen ist,

(ii) weiß, mit welchem Element man fortfahren kann, und schließlich

(iii) auch den Aufzählungsprozeß fortsetzen kann, wenn man bereits eine unendliche Teilfolge von Elementen aufgezählt hat (aber noch nicht alles aufgezählt ist).

Diese Anforderungen kann man präzisieren und zugleich vereinheitlichen, indem man verlangt, daß jede nicht-leere Teilmenge (nämlich der Rest der noch nicht aufgezählten Elemente) ein kleinstes Element enthält (welches als "nächstes" aufzuzählen ist):

5. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge A ist eine (irreflexive) lineare Ordnung auf A, welche zusätzlich die **Minimalitätsbedingung**

$$(\mathsf{Min}) \quad \forall z\, (\emptyset \neq z \subseteq A \rightarrow \exists x \in z\, \forall y \in z\;\, y \not< x)$$

erfüllt, welche wegen der Vergleichbarkeit (d') äquivalent ist zur **Existenz eines kleinsten Elementes**:

$$(\mathsf{Kl}) \quad \forall z\, (\emptyset \neq z \subseteq A \rightarrow \exists x \in z\, \forall y \in z\;\, x \leq y),$$

wobei wie oben $x \leq y :\leftrightarrow x < y \vee x = y$.

Beispiele

Jede lineare Ordnung auf einer endlichen Menge ist eine Wohlordnung, ebenso die gewöhnliche Ordnung auf den natürlichen Zahlen. Dagegen sind die ganzen Zahlen erst wohlgeordnet, wenn wir sie (etwa) in folgende Ordnung bringen:

$$0,1,2,3,4,\dots,-1,-2,-3,-4,\dots \text{ oder kürzer:}$$
$$0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots$$

Im ersten Fall werden wir von einer Ordnung vom Typ $\omega+\omega$, sprechen, im zweiten Fall vom Typ ω (und viele andere Möglichkeiten noch kennenlernen). Die endlichen Ordinalzahlen (und zugleich auch die endlichen Kardinalzahlen) sind die *natürlichen Zahlen*. Diese werden wir so einführen, daß (wie auch später auf allen Ordinalzahlen) die $<$-Beziehung besonders einfach ist, nämlich die $\in$-Beziehung. Somit ist die kleinste Zahl ohne Elemente, und zu einer Zahl a erhält man die nächstgrößere Zahl a', indem man zu den kleineren diese Zahl selbst noch hinzunimmt:

$0 := \emptyset,$
$a' := a+1 := a \cup \{a\}$ **Nachfolger** von a.

Die ersten natürlichen Zahlen sind somit

$$0=\emptyset, 1=\{0\}=\{\emptyset\}, 2=\{0,1\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}, 3=\{0,1,2\},\dots$$

und allgemein gilt $n=\{0,1,\dots n-1\}$ für jede natürliche Zahl n. (Außerdem hat jede natürliche Zahl n hat genau n-viele Elemente, was sich als besonders geeignet als Wahl für die endlichen Kardinalzahlen erweisen wird.) Betrachten wir nun die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, so können wir ihre Elemente auch gerade als die kleineren Zahlen auffassen, $\mathbb{N}=\omega$ setzen und als kleinste (Ordinal-)Zahl ansehen, welche größer als alle natürlichen Zahlen ist (somit die erste unendliche Ordinalzahl). Die natürlichen Zahlen wie auch ω sind die ersten Beispiele transitiver Mengen:

Definition

$$\begin{aligned} trans(A) &:\leftrightarrow \quad \forall x \in A\, \forall y \in x \;\; y \in A && \textbf{transitiv} \\ &\leftrightarrow \quad \forall x \in a \;\; x \subseteq A \end{aligned}$$

Achtung: trans(A) bedeutet *nicht*, daß die $\in$-Beziehung auf A transitiv ist!

Eine transitive Menge enthält mit ihren Elementen auch deren Elemente, deren Elemente ..., sie ist also abgeschlossen unter der Element-Beziehung.

$\{\{\emptyset\}\}$ ist dagegen nicht transitiv, da diese Menge $\emptyset$ nicht als Element enthält.

1.2 Definition der Ordinalzahlen

Ordinalzahlen wurden von CANTOR als Repräsentanten (isomorpher) Wohlordnungen eingeführt; heute definiert man sie nach von NEUMANN als Mengen, die (wie speziell die natürlichen Zahlen) transitiv und durch die $\in$-Beziehung wohlgeordnet sind:

$\in_a$	$:=$	$\{x,y \mid x,y \in a \wedge x \in y\}$	**Elementbeziehung auf** a,
$Ord(a)$	$:\leftrightarrow$	$trans(a) \wedge \in_a$ ist Wohlordnung auf a	**Ordinalzahl**,
$con(a)$	$:\leftrightarrow$	$\forall x,y \in a\, (x \in y \vee x = y \vee y \in x)$	**connex**,
fund(a)	$:\leftrightarrow$	$\forall x \subseteq a\, (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x\, \forall z \in x\;\, z \notin y)$	**fundiert**.

Eine Menge a ist fundiert, wenn jede nicht-leere Teilmenge $b \subseteq a$ ein Element besitzt, welches minimal (bezüglich der $\in$-Relation) ist; diese Bedingung ist also Teil der Forderung, daß $\in_a$ eine Wohlordnung ist (Bedingung Min in der Definition einer Wohlordnung). Eine Menge a mit der Eigenschaft $a \in a$ ist nicht fundiert (denn $\{a\}$ wäre eine nicht-leere Teilmenge ohne minimales Element), und ebensowenig ist eine Menge $\{a,b\}$ mit $a \in b \in a$ fundiert.

Vereinbarung zur Fundierung

Wir wollen nun der Einfachheit halber voraussetzen, daß *alle Mengen fundiert sind*. Dann gilt also insbesondere:

$$b \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in b\, \forall z \in b\;\, z \notin y, \quad \text{d. h.}$$
$$b \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in b\;\, y \cap b = \emptyset.$$

Damit werden dann einige ungewöhnliche Mengen ausgeschlossen, insbesondere Mengen a (wie oben) die sich selbst als Element enthalten oder mit anderen Mengen einen endlichen $\in$-Zyklus bilden. Es gilt somit:

$$(\mathsf{F}^*) \quad a \notin a,\ \neg(b \in c \wedge c \in b),\ \neg(d \in b \wedge b \in c \wedge c \in d), \ldots$$

Damit läßt sich die Definition der Ordinalzahlen wesentlich kürzer fassen (siehe (i) in folgendem Satz). Später werden wir ohnehin das Fundierungsaxiom (in der Form: *alle Mengen sind fundiert*) voraussetzen; alle folgenden Aussagen über Ordinalzahlen lassen sich jedoch (mit etwas Mehraufwand) ohne das Fundierungsaxiom beweisen, wenn man die ursprüngliche Definition zugrunde legt.

1.3 Charakterisierung der Ordinalzahlen

(i) $Ord(a) \leftrightarrow trans(a) \wedge con(a)$.

(ii) *Elementе von Ordinalzahlen sind wieder Ordinalzahlen:*
$Ord(a) \wedge b \in a \rightarrow Ord(b)$.

Beweis: Da $\in_a$ eine Wohlordnung auf a ist gdw $\in_a$ irreflexiv, transitiv, connex und fundiert ist und die Irreflexivität aus der Fundiertheit folgt, ist nach unserer Vereinbarung (alle Mengen sind fundiert) für (i) nur zu zeigen:

$$con(a) \rightarrow trans(\in_a).$$

Sei also $con(a)$ sowie $b, c, d \in a$ mit $b \in c \wedge c \in d$. Beh.: $b \in d$.

Es gilt:	$b \in d \vee d = b \vee d \in b$	wegen $con(a)$.
Falls	$d = b$, so hätten wir $b \in c \wedge c \in b$	im Widerspruch zu (F^*)
falls	$d \in b$, so $d \in b \wedge b \in c \wedge c \in d$	im Widerspruch zu (F^*).

Somit bleibt nur die Möglichkeit $b \in d$.

Um (ii) zu zeigen, sei $Ord(a) \wedge b \in a$. Dann ist wegen $trans(a)$: $b \subseteq a$ und mit $\in_a$ auch $\in_b$ eine Wohlordnung. Somit brauchen wir nur noch zu zeigen, daß b auch transitiv ist:
Sei $x \in y \in b$. Beh.: $x \in b$. Dazu argumentieren wir wie oben: Es sind $x, b \in a$ (ersteres wegen $trans(a)$), also sind beide wegen $con(a)$ miteinander vergleichbar: $x \in b \vee x = b \vee b \in x$, wobei die letzten beiden Möglichkeiten zu einem Widerspruch zur Fundierung (F^*) führen. □

1.4 Die Ordnung der Ordinalzahlen

Ordinalzahlen werden üblicherweise mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet:

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ stehen für Ordinalzahlen,
ebenso die Quantoren
$\forall \xi, \ldots \exists \zeta \ldots$ für $\forall x(Ord(x) \rightarrow \ldots), \ldots \exists y(Ord(y) \wedge \ldots) \ldots$
Ferner schreiben wir
$\alpha < \beta$ für $\alpha \in \beta$,
$\alpha \leq \beta$ für $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.

Wir werden gleich zeigen, daß alle Ordinalzahlen durch die $\in$-Relation nicht nur geordnet, sondern sogar wohlgeordnet sind, so daß diese Bezeichnungsweise gerechtfertigt ist. Der obige Satz 1.3 besagt also im Teil (ii) : $\alpha = \{\xi \mid \xi < \alpha\}$.

Satz

$$\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst etwas allgemeiner:

$$trans(a) \wedge a \subseteq \beta \rightarrow Ord(a) \wedge (a \in \beta \vee a = \beta)$$

Sei $trans(a) \wedge a \subseteq \beta$. Dann ist auch $\in_a$ eine Wohlordnung, also $Ord(a)$.

Falls $a \neq \beta$, so $a \subset \beta$, d. h. $\beta - a \neq \emptyset$, und wir können wegen der Fundiertheit ein minimales $\gamma \in \beta - a$ wählen, von dem wir zeigen werden, daß $a = \gamma$ und damit $a \in \beta$ wie erwünscht:

Sei also $\gamma \in \beta - a$ $\in$-minimal, so daß insbesondere $\forall x \in \gamma\, x \in a$, d. h. $\gamma \subseteq a$. Es gilt dann aber auch $a \subseteq \gamma$:

Sei $x \in a$. Dann $x \in \beta$ (nach Voraussetzung) und $x \in \gamma \vee x = \gamma \vee \gamma \in x$ wegen $con(\beta)$. Aber die letzten beiden Fälle können nicht eintreten: $x = \gamma \rightarrow \gamma \in a$ und $\gamma \in x \rightarrow \gamma \in a$ (wegen $trans(a)$), es ist aber nach Wahl von $\gamma: \gamma \notin a$. □

Somit haben wir mengentheoretisch nicht nur eine einfache $<$-Beziehung auf den Ordinalzahlen (nämlich die $\in$-Beziehung), sondern auch eine einfache $\leq$-Beziehung (nämlich die $\subseteq$-Beziehung). Insbesondere gilt:

$$\alpha \cup \beta = \max\{\alpha, \beta\} \quad \textit{und} \quad \alpha \cap \beta = \min\{\alpha, \beta\}$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß 0 die kleinste Ordinalzahl ist und daß mit einer Ordinalzahl α auch α' wieder eine Ordinalzahl ist (und zwar die nächst größere), so daß alle natürlichen Zahlen insbesondere Ordinalzahlen sind. Es gibt aber tatsächlich unmäßig viele Ordinalzahlen:

Satz

(i) *Die $\in$-Beziehung ist eine Wohlordnung auf allen Ordinalzahlen.*

(ii) *Es gibt keine Menge aller Ordinalzahlen.*
(**Antinomie von Burali-Forti**)

Beweis von (i):

$$
\begin{array}{rc}
\alpha \notin \alpha & \text{nach dem Fundierungsaxiom (oder wegen } fund(\alpha)) \\
\alpha \in \beta \in \gamma \to \alpha \in \gamma & \text{wegen } trans(\gamma) \\
\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha & \text{kann man wie folgt zeigen:}
\end{array}
$$

Sei $\delta := \alpha \cap \beta$ das Minimum der beiden Ordinalzahlen. Dann ist $trans(\delta)$ und $\delta \subseteq \alpha, \beta$, also nach nach dem vorangegegangen Satz: $\delta = \alpha \vee \delta \in \alpha$ und ebenso $\delta = \beta \vee \delta \in \beta$, aber im Fall $\delta \in \alpha \wedge \delta \in \beta$ erhielten wir den Widerspruch $\delta \in \delta$! Somit ist die $\in$-Beziehung auf den Ordinalzahlen eine lineare Ordnung. Sie ist ferner eine Wohlordnung, da für Mengen a von Ordinalzahlen die Minimalitätsbedingung $\emptyset \neq a \to \exists \alpha \in a\ \alpha \cap a = \emptyset$ nach unserer Vereinbarung (also dem Fundierungsaxiom) erfüllt ist.

(ii) Angenommen, es gäbe eine Menge a aller Ordinalzahlen. Nach Satz 1.3 (ii) ist a transitiv und nach der gerade bewiesenen Aussage (i) ist die $\in$-Beziehung eine Wohlordnung auf a, also ist a selbst eine Ordinalzahl, somit $a \in a$ nach Definition von a als Menge aller Ordinalzahlen, aber anderseits gilt $a \notin a$ für alle Ordinalzahlen a, Widerspruch! (Man könnte auch so argumentieren: die Menge a aller Ordinalzahlen wäre als Ordinalzahl die größte Ordinalzahl, dann kann aber nicht $a \in a$ sein!) $\square$

Die Antinomie von BURALI-FORTI (1897) war CANTOR übrigens bereits schon 1895 bekannt. Man kann sie als Aussage lesen, daß es keine größte Ordinalzahl gibt und die Gesamtheit aller Ordinalzahlen so "groß" ist, daß sie sich nicht zu einer Menge zusammenfassen läßt. Das wäre an sich harmlos, wenn sich nicht herausgestellt hätte, daß auch andere Eigenschaften von Mengen zu "inconsistenten Vielheiten" (CANTOR) führen, und man deshalb befürchten müßte, daß vielleicht an einer anderen Stelle der Theorie ein (womöglich bisher noch gar nicht entdeckter) Widerspruch versteckt ist, der sich nicht so einfach hinweg interpretieren läßt. Wir wollen daher erst einmal innehalten, um uns den Grundlagen der Mengenlehre zuzuwenden.

Kapitel 2

Mengen und Klassen

2.1 Die Antinomien

In seinem Hauptwerk[1] gab CANTOR seine berühmte Beschreibung einer Menge:

> *Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Man kann diese "Definition" in folgendem Sinne zu präzisieren versuchen:

Zu jeder Eigenschaft $E(x)$ existiert die Menge M aller Objekte x mit der Eigenschaft $E(x)$: $M = \{x : E(x)\}$.

ZERMELOs Erklärung des Begriffes Eigenschaft als definite Eigenschaft wurde von FRAENKEL und SKOLEM dahingehend präzisiert, daß Eigenschaften als Ausdrücke einer bestimmten formalen Sprache festzulegen sind, wie wir sie gleich näher präzisieren werden. Benutzen wir $\varphi, \psi, \ldots$ als Notationen für mengentheoretische Formeln, so kann die CANTORsche Definition wie folgt aufgeschrieben werden:

Komprehensionsaxiom

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x)),$$

wobei $\varphi(x)$ eine beliebige Formel ist, in welcher y nicht vorkommt.

[1] *Beiträge zu Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Math. Ann. 46, (1895), 481 - 512, Math. Ann. 49, (1897), 207 - 246

Dieses Axiom (eigentlich ein Axiomenschema, da es aus unendlich vielen Axiomen besteht) ist nun aber widerspruchsvoll: Wie wir gerade mittels der Antinomie von BURALI-FORTI gesehen haben, führt es für die Eigenschaft $Ord(x)$ zu einem Widerspruch, da es keine Menge aller Ordinalzahlen geben kann. B. RUSSELL entdeckte einen weiteren Widerspruch, der viel elementarer zu erhalten ist:

RUSSELLsche Antinomie (1903)

Wählt man für $\varphi(x)$ die Formel $x \notin x$, so liefert das Komprehensionsaxiom die Existenz einer Menge r mit

$$\begin{array}{rl} \forall x(x \in r \leftrightarrow x \notin x) & \text{insbesondere gilt für } x = r: \\ r \in r \leftrightarrow r \notin r & \qquad\text{Widerspruch!} \end{array}$$

Ähnliche Widersprüche erhält man, wenn man für $\varphi(x)$ die Formel

$x = x$	Antinomie der "Menge aller Mengen" von CANTOR
x *ist Kardinalzahl*	Antinomie von CANTOR (um 1899, publiziert erst 1932)
x *ist Ordinalzahl*	Antinomie von CANTOR und BURALI-FORTI

wählt, wobei man allerdings noch einige Schritte in der Anwendung der Theorie durchführen muß, um zum Widerspruch zu gelangen, während die Antinomie von RUSSELL (die um die gleiche Zeit auch bereits ZERMELO bekannt war) sehr elementar - und daher besonders beeindruckend - ist.

2.2 Auswege aus den Antinomien

a) RUSSELLsche Typentheorie:

   Im Komprehensionsaxiom darf zur Vermeidung eines circulus vitiosus bei der Definition der Menge y durch die Eigenschaft $\varphi(x)$ nicht auf einen Bereich Bezug genommen werden, dem dieses y selbst angehört. Man nimmt eine Stufeneinteilung vor: $x^0, x^1, \ldots$ und vereinbart, daß $x^n \in x^m$ nur erlaubt ist, wenn $m = n + 1$. Das Komprehensionsaxiom hat dann die Form

   $$\exists y^{n+1} \forall x^n (x^n \in y^{n+1} \leftrightarrow \varphi(x^n)).$$

   Da die Bildung von $r^n \notin r^n$ nicht mehr erlaubt ist, ist die RUSSELLsche Antinomie nicht mehr formulierbar. Dieses *prädikative* Komprehensionsaxiom schränkt die Mengenbildung jedoch stark ein; die Idee eines stufenweisen Aufbaus der Mengenlehre läßt sich jedoch auch in der ZF-Mengenlehre wieder finden (von NEUMANNsche Hierarchie Kap. 8).

b) Unterscheidung zwischen Mengen und Klassen (von NEUMANN, GÖDEL, BERNAYS):

Man läßt eine (mehr oder weniger beschränkte) Komprehension von Mengen zu, das Ergebnis ist dann aber nicht notwendig wieder eine Menge, sondern zunächst eine **Klasse** $\{x \mid \varphi(x)\}$. So kann man bilden:

die RUSSELL*sche Klasse*	$R = \{x \mid x \notin x\}$,
die Klasse aller Mengen	$V = \{x \mid x = x\}$,
die Klasse aller Ordinalzahlen, Kardinalzahlen, usw.	

Das Auftreten von Antinomien wird nun dadurch vermieden, daß Klassen nicht notwendig wieder Mengen sind; z. B. kann R in die Eigenschaft, welche R definiert, nur dann eingesetzt werden, wenn R eine Menge x ist, und da diese Annahme zum Widerspruch führt, kann R keine Menge sein, sondern nur eine Klasse (**echte Klasse** oder **Unmenge**). Welche Klassen zugleich auch Mengen sind, versucht man durch Axiome festzulegen, wobei man

- einerseits möglichst viele Klassen als Mengen (und damit wieder als Elemente von Mengen und Klassen) erlauben möchte,
- andererseits aber nicht so viele, daß es zu einem Widerspruch kommt.

c) ZERMELOsches Aussonderungsaxiom:

Das Komprehensionsaxiom wird eingeschränkt auf die Bildung von Teilmengen einer bereits gegebenen Menge a:

Aussonderungsaxiom: $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$

Versucht man erneut, die RUSSELLsche Antinomie abzuleiten, so erhält man die Existenz einer Menge r mit

$$r \in r \leftarrow r \in a \wedge r \notin r, \text{ also}$$

- es gibt keine “Menge aller Mengen” (für a eingesetzt, erhielte man den RUSSELLschen Widerspruch),

- es gibt eine “leere” Menge (setze für $\varphi(x)$ ein: $x \neq x$ und für a irgendeine Menge).

Das Aussonderungsaxiom ist nachweisbar widerspruchsfrei - es ist bereits wahr in einem Modell, welches nur die leere Menge enthält. Um es darüber hinaus anwenden zu können, müssen wir die Menge a, aus welcher mittels der Eigenschaft $\varphi(x)$ eine Teilmenge *ausgesondert* wird, bereits haben - weitere Axiome sind erforderlich!

Im folgenden werden wir - wie jetzt allgemein üblich - der Entwicklung der Mengenlehre nach ZERMELO folgen, dabei aber auch den Klassenbegriff benutzen, weil sich damit die Axiome von ZF leicht in der Form

bestimmte Klassen (und zwar “nicht zu große”) sind Mengen

bequem ausdrücken lassen.

2.3 Die mengentheoretische Sprache mit Klassentermen

Wie schon angedeutet, benötigen wir für die ZF-Sprache nur die $\in$-Beziehung als einziges nicht-logisches Prädikat. Als *Variable für Mengen* benutzen wir Kleinbuchstaben, und zwar meistens $a,b,c,\ldots$ für *freie* Variable und $x,y,z,\ldots$ (u. U. mit Indizes) für *gebundene* Variable, werden aber die Unterscheidung möglicherweise nicht immer genau einhalten. Die damit gebildete Sprache $\mathcal{L}_{\mathsf{ZF}}$ werden wir erweitern um die Hinzunahme von definierbaren Klassen (auch *Klassenterme* genannt)

$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

welche in Formeln jedoch nur in der Kombination $a \in \{x \mid \varphi(x)\}$ benötigt werden, so daß **Formeln** wie folgt gebildet werden:

(F1) Sind a,b Mengenvariable, so sind $a = b$ und $a \in b$ Formeln (*Primformeln, atomare Formeln*).

(F2) Ist φ eine Formel, so auch $\neg\varphi$.

(F3) Sind φ und ψ Formeln, so auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

(F4) Ist $\varphi(a)$ eine Formel, in welcher die Variable x nicht vorkommt, so sind auch $\forall x\varphi(x)$ und $\exists x\varphi(x)$ Formeln.

(F5) Ist $\varphi(a)$ eine Formel, in welcher die Variable x nicht vorkommt, so ist auch $a \in \{x \mid \varphi(x)\}$ eine Formel.

(F6) Das sind alle Formeln.

Von Formeln der ZF-Sprache im **engeren** Sinne sprechen wir, wenn bei der Bildung dieser Formeln die Bedingung (F5) nicht benutzt wurde, ansonsten von Formeln der **erweiterten** ZF-Sprache.

Außerdem benutzen wir **beschränkte Quantoren** $\forall x \in a$, $\exists x \in a$ als Abkürzungen:

$$\forall x \in a\, \varphi \quad \text{steht für} \quad \forall x(x \in a \to \varphi),$$
$$\exists x \in a\, \varphi \quad \text{steht für} \quad \exists x(x \in a \wedge \varphi).$$

Für viele Untersuchungen spielen Fragen der Komplexität von Eigenschaften eine wichtige Rolle; dabei gelten beschränkte Quantoren als "einfacher" als unbeschränkte Quantoren. Wir werden daher im folgenden - soweit möglich - beschränkte Quantoren verwenden.

Elimination von Klassentermen

Unser erstes Axiom (für die erweiterte ZF-Sprache) ist das folgende

CHURCHsche Schema (CS): $\qquad a \in \{x \mid \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(a).$

Es erlaubt, Klassenterme wieder zu eliminieren:

Metatheorem

Zu jeder Formel φ der erweiterten Sprache existiert eine Formel ψ der engeren Sprache (mit denselben freien Variablen), so daß unter Benutzung von CS *gilt:*

$$\varphi \leftrightarrow \psi.$$

(Beweis bei A. LEVY: *Basic Set Theory*, Appendix X. Beachte, daß der Beweis konstruktiv ist.)

Die erweiterte ZF-Sprache ist somit eigentlich nicht ausdrucksstärker, aber es wird sich zeigen, daß sie für mengentheoretische Überlegungen bequemer zu benutzen ist, vor allem weil man für jede Eigenschaft $\varphi(x,\ldots)$ die Klasse $\{x \mid \varphi(x,\ldots)\}$ bilden kann, während man zur Bildung einer entsprechenden Menge erst nachprüfen muß, ob die Axiome dies zulassen bzw. ob man einen Widerspruch erhält, was sehr schwierig (oder sogar unmöglich) sein kann!

2.4 Variable für Klassen

Schließlich noch ein weiterer Schritt: Um nicht immer über die Klassenterme $\{x \mid \varphi(x,\ldots)\}$ durch Angabe von Formeln sprechen zu müssen, werden wir Variable $A, B, \ldots$ für Klassenterme benutzen! Damit nähern wir uns einer Sprache 2. Stufe, in welcher neben den Variablen für Mengen (Kleinbuchstaben) auch Variable für Klassen (Großbuchstaben) auftreten. Streng genommen werden hier keine formalen Klassenvariable eingeführt, sondern **Metavariable** für Klassenterme. Das bedeutet, daß eine Aussage der Form

$$\textit{es gibt ein } A \textit{ mit } \ldots A \ldots B \ldots$$

als Behauptung zu lesen ist, für einen vorgegebenen Klassenterm B einen Klassenterm A konkret (d. h. durch eine Formel) anzugeben, der die gewünschte Eigenschaft besitzt; ebenso bedeutet eine universelle Aussage der Form

$$\textit{für alle } A \ldots A \ldots$$

daß sie für alle (konkret definierbaren) Klassenterme A gilt.

Diese Unterscheidungen werden sich allerdings nur selten bemerkbar machen, sie treten z. B. auf bei der Einführung von Ordnungen und Wohlordnungen in 1.1: Die verschiedenen Definitionen von Ordnungen auf einer Menge A enthalten nur Gesetze über die *Elemente* von A (*Eigenschaften 1. Stufe* im Sinne der mathematischen Logik), sie können somit - wie durch die Wahl des Großbuchstabens A bereits angedeutet - direkt für Klassen A übernommen werden. Dagegen besagt die Minimumsbedingung für Wohlordnungen, daß jede nicht-leere Teil*menge* ein minimales Element besitzt. Im Falle einer Wohlordnung auf einer Klasse A werden wir eine zusätzliche Bedingung hinzufügen, aus welcher folgt, daß die Minimalitätsbedingung sich von Mengen auf beliebige definierbare Klassen verstärken läßt. Wenn man jedoch die Minimalitätsbedingung für alle Teil*klassen* von A fordern will, so kann man dies nur in einer entsprechenden *Sprache 2. Stufe* formulieren.

Es gibt nun allerdings Axiomensysteme der Mengenlehre mit freien und möglicherweise auch gebundenen Klassenvariable (also in einer Sprache 2. Stufe mit formalen Variablen wie den Mengenvariablen), in denen Klassen eine stärkere Rolle spielen:

2.5 Überblick über verschiedene Axiomensysteme

Die Axiomensysteme der Mengenlehre unterscheiden sich weniger in dem jeweils zugelassenen Bereich von Mengen als in dem Status, den sie den Klassen einräumen:

- ohne Klassen:
  das Axiomensystem ZF von ZERMELO-FRAENKEL in der (engeren) ZF-Sprache

- mit eliminierbaren Klassen ("virtuelle Klassen" (QUINE)):
  das Axiomensystem ZF von ZERMELO-FRAENKEL in der erweiterten ZF-Sprache (welches wir hier zugrunde legen werden)

- mit freien Klassenvariablen:
  das Axiomensystem von BERNAYS 1958

- mit freien und gebundenen Klassenvariablen, aber nur prädikativen Klassen:
  das Axiomensystem NBG (von NEUMANN-GÖDEL-BERNAYS)) mit dem Komprehensionsaxiom in der Form

  $$\exists Y \forall x (x \in Y \leftrightarrow \varphi(x, \ldots, A, \ldots)).$$

  Hier stehen $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ für Klassen, $x, y, \ldots$ weiterhin für Mengen, und $\varphi(x, \ldots)$ ist eine Eigenschaft von Mengen (möglicherweise mit Klassen als Parametern), in welcher aber nur über *Mengen* quantifiziert werden darf - prädikative Form.

- Klassen, ernst genommen (imprädikativ):
  das Axiomensystem QM von QUINE-MORSE mit dem Komprehensionsaxiom wie oben, aber jetzt werden auch Formeln zugelassen, die Quantifikationen über Klassen enthalten; in diesem System lassen sich mehr Aussagen über Mengen beweisen als in NBG!

- neben Klassen und Mengen auch noch Halbmengen:
  die alternative Mengenlehre von VOPENKA (VOPENKA-HAJEK 1972).

Neben der Entscheidung, welchen existentiellen Wert man den Klassen einräumen soll, bleibt als Hauptproblem die Frage: welche *Mengen* existieren - bzw.:

(i) welche Eigenschaften definieren Mengen - oder

(ii) (wenn wir ein allgemeines Komprehensionsprinzip für Klassen zugrunde legen): welche Klassen führen zu Mengen?

Grundlegend werden folgende Vorstellungen sein:

- Es gibt *Mengen* und *Klassen*; ihre Gleichheit wird durch das Extensionalitätsprinzip bestimmt: Mengen bzw. Klassen sind identisch, wenn sie vom selben Umfang sind, d. h. dieselben Elemente enthalten.
- *Elemente* von Klassen und Mengen sind wieder *Mengen*; echte Klassen (wie die RUSSELLsche Klasse) sind dagegen niemals Elemente - weder von Mengen noch von anderen Klassen.
- Komprehensionsprinzip: Jeder Eigenschaft $E(x)$ von Mengen x entspricht die *Klasse* $\{x \mid E(x)\}$ aller *Mengen* x mit der Eigenschaft $E(x)$,
- insbesondere ist jede Menge a eine Klasse (nämlich: $a = \{x \mid x \in a\}$),
- umgekehrt ist aber nicht jede Klasse eine Menge, sondern nur diejenigen Klassen, die nicht "zu groß" sind, sind Mengen (*limitation of size*).

Klassen sind somit nach dem Komprehensionsprinzip (nahezu) unbeschränkt bildbar, *Mengen* existieren (als spezielle Klassen) nur nach Maßgabe einzelner Axiome.

Literatur zu diesem Kapitel

BERNAYS, P. *Axiomatic Set Theory.* Amsterdam 1958
FELGNER, U. (Herausgeber) *Mengenlehre.* Darmstadt 1979
FRAENKEL, A.- BAR HILLEL, Y. - LÉVY, A. *Foundations of Set Theory.* Amsterdam 1973
FRAENKEL, A.A. *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre.* Math Ann 86 (1922), 230 - 237, auch in: FELGNER [1979]
SKOLEM, T. *Einige Bemerkungen zur axiom. Begründung der Mengenlehre.* Kongreß Helsingfors 1922, auch in FELGNER [1979].

Kapitel 3

Extensionalität und Aussonderung

3.1 Gleichheit von Mengen und Klassen

Mengen sind allein durch ihre Elemente bestimmt, unabhängig von deren Definition und Reihenfolge:

Extensionalitätsaxiom (Ext) $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b.$

Aus den logischen Axiomen über die Gleichheit folgt die Umkehrung, es gilt dann also:

extensionale Gleichheit: $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b.$

Somit könnte man im Prinzip auf die Gleichheit als logisches Grundsymbol verzichten und sie mittels der Elementbeziehung definieren. - Denkbar wäre auch eine Definition durch

intensionale (Leibniz-)Gleichheit: $\forall x(a \in x \leftrightarrow b \in x) \leftrightarrow a = b.$

Diese Äquivalenz wird später einfach beweisbar sein (mit Existenz der Einer-Menge).

Mengen ohne Elemente bezeichnet man auch als **Urelemente**; aus dem Extensionalitätsaxiom folgt, daß es höchstens eine solche Menge gibt, die leere Menge. Für eine alternative Mengenlehre, die weitere Urelemente zulassen soll, muß man also das Extensionalitätsaxiom abändern.

Die Gleichheit von Klassen bzw. Klassen und Mengen wird als Umfangsgleichheit definiert:

$$\begin{aligned} A = B :&\leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B),\\ A = b :&\leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in b),\\ a = B :&\leftrightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in B), \end{aligned}$$

und in ähnlicher Weise (da Elemente stets Mengen sein sollen):

$$\begin{aligned} A \in B :&\leftrightarrow \exists y(y = A \land y \in B),\\ A \in b :&\leftrightarrow \exists y(y = A \land y \in b). \end{aligned}$$

Somit sind nun die Grundprädikate $=$ und $\in$ für sowohl Mengen wie auch Klassen definiert.

Wenn eine Klasse dieselben Elemente wie eine Menge enthält, so sind nach unserer Definition beide gleich, und genau in diesem Fall werden wir eine Klasse eine Menge nennen:

$Mg(A) :\leftrightarrow \exists x(x = A)$	A ist eine **Menge**, somit gilt also
$Mg(A) \leftrightarrow A \in V$,	wobei
$V := \{x \mid x = x\}$	**Klasse aller Mengen, Allklasse, Universum**.

Klassen, die keine Mengen sind, nennt man auch **echte** Klassen.

Aus diesen Definitionen erhalten wir:

Lemma

(i) *Jede Menge ist eine Klasse:* $a = \{x \mid x \in a\}$,

(ii) *Gilt eine Eigenschaft für alle Klassen, so insbesondere auch für alle Mengen: Falls* $\varphi(A, B, \ldots)$, *so auch* $\varphi(a, b, \ldots)$ $\quad\square$.

Definition

$\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$	**leere Klasse**
$V := \{x \mid x = x\}$	**Klasse aller Mengen**
$A \subseteq B :\leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$	**Inklusion**
$A \subset B :\leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$	**echte Inklusion**

3.2 Eigenschaften der Inklusion

(i) $A \subseteq A$ (reflexiv)
$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$ (transitiv)
$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$ (antisymmetrisch)

(ii) $\emptyset \subseteq A \subseteq V$

(iii) $A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A \leftrightarrow A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$ $\Box$.

Somit ist die Inklusion $\subseteq$ eine reflexive teilweise Ordnung mit $\emptyset$ als kleinstem, V als größtem "Element".

3.3 Die Booleschen Operationen

können wir allein mit Hilfe der Klassenschreibweise einführen:

$A \cap B \ := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ **Durchschnitt**
$A \cup B \ := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ **Vereinigung**
$A - B \ := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ **relatives Komplement**
$-B \ := \{x \mid x \notin B\}$ **Komplement**

Damit erhalten wir nun die Gesetze einer **BOOLEschen Algebra** (eigentlich Gesetze über die aussagenlogischen Operationen $\neg, \wedge, \vee$):

$$\begin{array}{rl}
A \cap B = B \cap A & \text{Kommutativgesetze} \\
A \cup B = B \cup A & \\
A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & \text{Assoziativgesetze} \\
A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C & \\
A \cap A = A & \text{Idempotenzgesetze} \\
A \cup A = A & \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & \text{Distributivgesetze} \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & \\
A \cap (B \cup A) = A & \text{Absorptionsgesetze} \\
A \cup (B \cap A) = A & \\
A \cup -A = V,\ A \cap -A = \emptyset & \text{Komplementgesetze} \\
- -A = A & \\
-\emptyset = V,\ -V = \emptyset & \\
-(A \cap B) = -A \cup -B & \text{de MORGANsche Gesetze} \\
-(A \cup B) = -A \cap -B &
\end{array}$$

Es zeigt sich hier ein Vorteil der mengentheoretischen Darstellung mit Hilfe des Klassenbegriffs: Die BOOLEschen Gesetze gelten allein aufgrund der Logik und benötigen keine speziellen mengentheoretischen Existenzaxiome. Sie gelten statt für Klassen natürlich auch für Mengen, allerdings führen nicht alle Operationen von Mengen zu Mengen (aber von Klassen zu Klassen), denn in den üblichen mengentheoretischen Axiomensystemen ist V (und das Komplement einer Menge) keine Menge. Bereits erwähnt haben wir das

ZERMELOsche Aussonderungsschema (AusS)

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x, \ldots))$$

Unter Benutzung von Klassenvariablen und einfachen Definitionen erhalten wir den:

Satz

Das Aussonderungsschema ist äquivalent zu den folgenden Aussagen:

(i) $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge x \in A)$ **Aussonderungsaxiom**

(ii) $\exists y (y = a \cap A)$

(iii) $a \cap A \in V$, *d. h.* $Mg(a \cap A)$

(iv) $A \subseteq a \to Mg(A)$ **Abschätzungssatz** □

Korollar

Aus dem Aussonderungsaxiom folgt:

(i) $Mg(\emptyset)$

(ii) $Mg(a \cap A)$

(iii) $Mg(a - b)$

(iv) $\neg Mg(V)$ □

Um außer der Existenz der leeren Menge weitere Mengen zu erhalten, brauchen wir die Existenz von Mengen, aus denen ausgesondert werden kann.

Kapitel 4

Relationen und Funktionen

4.1 Paare

$$\{a,b\} := \{x \mid x = a \vee x = b\} \qquad \textbf{ungeordnetes Paar}$$
$$\{a\} := \{x \mid x = a\} = \{a,a\} \qquad \textbf{Einerklasse von a}.$$

Paarmengenaxiom (Paar) $\quad \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x = a \vee x = b)$

Insbesondere ist die Einerklasse $\{a\}$ einer Menge a wiederum eine Menge, die **Einermenge** von a (*unit set*). Somit kann man die folgenden Mengen bilden:

$$\{a,b\}, \{a\}, \{a, \{a,b\}\}, \{\{a,c\}, \{e, \{a,e\}\}\}, \{\{a, \{a,b\}\}, \{\{a,c\}, \{e, \{a,e\}\}\}, \ldots \text{ usw.}$$

Setzen wir das

Nullmengenaxiom (Null) $\quad \exists y \forall x(x \notin y)$

voraus (welches aus dem Aussonderungsschema folgt, das wir hier aber noch nicht voraussetzen wollen), und bezeichnen die damit existierende Menge als

leere Menge: $\quad \forall x(x \notin \emptyset)$,

so kann man ausgehend von dieser Menge nun etwa folgende Mengen bilden:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \ldots$$

die später für die Zahlen 0, 1, 2… stehen werden und untereinander verschieden sind, denn es ist

$$\emptyset \in \{\emptyset\}, \text{ aber } \emptyset \notin \emptyset, \text{ somit } \emptyset \neq \{\emptyset\}, \text{ ebenso } \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \neq \emptyset, \{\emptyset\}.$$

Tatsächlich gibt es aufgrund der bisherigen Axiome bereits unendlich viele Mengen, z. B.

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$ usw., aber die Existenz einer Menge mit mehr als zwei Elementen ist damit noch nicht nachweisbar!

Intensionale Charakterisierung der Gleichheit

Unter der Voraussetzung, daß zu jeder Menge a die Einermenge $\{a\}$ existiert, gilt also (indem man für x die Menge $\{a\}$ setzt):

$$\forall x(a \in x \to b \in x) \to a = b, \text{ insbesondere}$$
$$\forall x(a \in x \leftrightarrow b \in x) \leftrightarrow a = b.$$

Geordnetes Paar (Wiener 1914, Kuratowski 1921)

$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$ **geordnetes Paar**

Satz: Charakteristische Eigenschaft des geordneten Paares

(i) $(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \land b = d$

(ii) $(a,b) = (b,a) \leftrightarrow a = b$

Beweis von (i): Offensichtlich gilt nach Definition der Paarmenge bzw. Einermenge:

$$(*) \qquad \{a,b\} = \{c\} \to a = b = c,$$

was wir wiederholt benutzen werden.

Es sei nun also $(a,b) = (c,d)$, d. h. $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$.

1.Fall: $c = d$. Die Vor. lautet dann: $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c\}\} = \{\{c\}\}$,
also gilt nach (*) $\{a\} = \{a,b\} = \{c\}$,
und daraus folgt wiederum mit (*): $a = b = c$.

2.Fall: $c \neq d$. Wegen $\{a\} \in \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ gilt:
$\{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$, also: $\{a\} = \{c\}$ oder $\{a\} = \{c,d\}$.
Wegen $c \neq d$ kann letzteres nicht gelten, wir erhalten also $\{a\} = \{c\}$ und damit $\underline{a = c}$. Ähnlich gilt wegen $\{c,d\} \in \{\{a\},\{a,b\}\}$:
$\{c,d\} = \{a\}$ (nicht möglich wegen $c \neq d$) oder $\{c,d\} = \{a,b\} = \{c,b\}$ (letzteres wegen $a = c$), dann aber: $\underline{d = b}$. $\square$

4.2 Relationen

Mittels geordneter Paare lassen sich auch **Tripel**

$$(a,b,c) := (a,(b,c))$$

und allgemeiner auch auch n-Tupel definieren. Außerdem können wir damit auch 2-stellige Relationen (und ähnlich mittels n-Tupeln n-stellige Relationen) darstellen durch

$$(a,b) \in A \leftrightarrow \varphi(a,b),$$

entsprechend unserer früheren Einführung von Klassen als Extensionen 1-stelliger Prädikate:

$$a \in A \leftrightarrow \varphi(a).$$

Die **Klasse der Paare** (x,y) mit der Eigenschaft $\varphi(x,y)$ ist

$$\{x,y \mid \varphi(x,y)\} := \{z \mid \exists x \exists y(z = (x,y) \wedge \varphi(x,y))\}$$
$$\text{oder auch geschrieben } \{(x,y) \mid \varphi(x,y)\}.$$

Ein Sonderfall ist das **cartesische Produkt**

$$A \times B := \{x,y \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Eine (2-stellige) **Relation** ist einfach eine Klasse von Paaren:

$$Rel(R) :\leftrightarrow R \subseteq V \times V \leftrightarrow \forall z \in R\, \exists x \exists y\, z = (x,y),$$

wir schreiben dann auch

$$aRb :\leftrightarrow (a,b) \in R.$$

Die an erster bzw. zweiter Stelle stehenden Mengen bilden den **Vorbereich (domain)** bzw. den **Nachbereich (range)** von R:

$$D(R) := \{x \mid \exists y\, xRy\}$$
$$W(R) := \{y \mid \exists x\, xRy\}$$

Vertauscht man die Paarmengen in einer Relation, so erhält man die **inverse** (oder auch **konverse**) Relation:

$$R^{-1} := \{y,x \mid xRy\}.$$

4.3 Funktionen

Funktionen identifizieren wir mit ihrem *Graphen*, d. h. eine **Funktion** ist eine Relation, die jedem Element ihres Vorbereiches (hier **Definitionsbereich** genannt) genau ein Element ihres Nachbereiches (hier **Wertebereich** genannt) zuordnet:

$$Fkt(F) :\leftrightarrow Rel(F) \land \forall x,y,z\,((x,y) \in F \land (x,z) \in F \to y = z).$$

In diesem Fall gibt es also zu jedem $a \in D(F)$ genau ein $b \in W(F)$, so daß $(a,b) \in F$. Dieses b nennen wir wie üblich den **Funktionswert** von F an der Stelle a und bezeichnen ihn mit $F(a)$:

$$F(a) = \begin{cases} b, & \text{falls} \quad Fkt(F) \land a \in D(F) \land (a,b) \in F \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit können wir auch die **Klasse** der $F(x)$ mit einer **Eigenschaft** $\varphi(x)$ bilden:

$$\{F(x) \mid \varphi(x)\} := \{y \mid \exists x(\varphi(x) \land y = F(x))\}$$

und insbesondere

$F[A] := \{F(x) \mid x \in A\}$	**Bild** von A unter F
$F \restriction A := \{(x,F(x)) \mid x \in A\}$	**Einschränkung** von F auf A (als Def.bereich).

Oft findet man für Funktionen auch die folgende Bezeichnung unter Angabe ihres Definitionsbereiches A und ihres **Bildbereiches** B:

$$F : A \longrightarrow B :\leftrightarrow Fkt(F) \land D(F) = A \land W(F) \subseteq B$$

und definiert häufig die Funktion durch Angabe ihres Wertes $F(a)$ für $a \in A$:

$$\begin{aligned} F : A &\longrightarrow B \\ a &\mapsto F(a). \end{aligned}$$

Es ist dann $F = \{(a,F(a)) \mid a \in A\}$, wobei man dann auch oft $F = (F_a)_{a \in A}$ schreibt und von einer **Familie** spricht, insbesondere wenn der Definitionsbereich eine geordnete Menge (Indexmenge) ist.

Ist $F : A \longrightarrow B$, also F eine Abbildung von A **nach** B, so ist der Bildbereich B durch F nicht eindeutig bestimmt; er braucht nämlich den Wertebereich $W(F)$ nur zu enthalten. Ist jedoch Bildbereich = Wertebereich, so heißt F **surjektiv** oder **auf** B:

$$F : A \twoheadrightarrow B :\leftrightarrow F : A \longrightarrow B \land W(F) = B$$

In diesem Fall gibt es also zu jedem $b \in B$ *mindestens* ein $a \in A$ mit $F(a) = b$. Die Angabe des Bildbereiches B ist in diesem Fall wichtig, da jede Funktion eine Abbildung auf ihren Wertebereich ist!

Eine Funktion $F : A \longrightarrow B$ heißt **injektiv** oder **eineindeutig**:

$$F : A \rightarrowtail B :\leftrightarrow \forall x, y \in A\ (F(x) = F(y) \to x = y).$$

In diesem Fall gibt es also zu jedem $b \in W(F)$ *genau* ein $a \in A$ mit $F(a) = b$, welches mit $a = F^{-1}(b)$ bezeichnet wird. Für eine injektive F Funktion ist nämlich die inverse Relation F^{-1} eine Funktion, und zwar

$$F^{-1} : W(F) \longrightarrow A \quad \text{für injektives } F : A \longrightarrow B.$$

Eine Funktion $F : A \longrightarrow B$ heißt **bijektiv** gdw F injektiv und surjektiv ist:

$$F : A \longleftrightarrow B :\leftrightarrow F : A \rightarrowtail B \wedge F : A \twoheadrightarrow B.$$

Für eine bijektive Funktion $F : A \longleftrightarrow B$ ist dann die inverse Funktion (oder **Umkehrfunktion**) eine Abbildung

$$F^{-1} : B \longleftrightarrow A \quad \text{mit}$$
$$F^{-1}(F(a)) = a,\ F(F^{-1}(b)) = b \quad \text{für alle } a \in A, b \in B.$$

Kapitel 5

Axiome von ZF

Eine einfache mengentheoretische Operation führt von zwei Mengen zu ihrer Vereinigung; wir werden gleich eine allgemeinere Mengenbildung einführen:

5.1 Vereinigung, Durchschnitt und Ersetzung

$\bigcup A := \bigcup_{x \in A} x := \{z \mid \exists x \in A\; z \in x\}$ **Vereinigung (Summe)**

$\bigcap A := \bigcap_{x \in A} x := \{z \mid \forall x \in A\; z \in x\}$ **Durchschnitt**

Summenaxiom (Zermelo) (Sum) $Mg(\bigcup a)$,

ausgeschrieben also: $\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists x \in a\; z \in x)$.

Lemma

(i) $\bigcup\{a\} = a, \quad \bigcup\{a, b\} = a \cup b$

(ii) $\bigcap\{a\} = a, \quad \bigcap\{a, b\} = a \cap b$

(iii) $\bigcup a$ *ist das Supremum der Elemente von a bzgl.* $\subseteq$:

$\forall x \in a\; x \subseteq \bigcup a, \; \forall x \in a\; x \subseteq c \rightarrow \bigcup a \subseteq c.$

(iv) $\bigcap a$ *ist das Infimum der Elemente von a bzgl.* $\subseteq$:

$\forall x \in a\; \bigcap a \subseteq x, \; \forall x \in a\; c \subseteq x \rightarrow c \subseteq \bigcap a.$

(v) $\bigcap \emptyset = V, \quad \bigcap V = \emptyset, \quad \bigcup \emptyset = \emptyset, \quad \bigcup V = V.$

Bemerkungen

1. Aus dem Summen- und Paarmengenaxiom folgt also, daß für je zwei Mengen a und b die Vereinigung $a \cup b$ wieder eine Menge ist, damit ist dann aber das absolute Komplement einer Menge $-a$ stets eine echte Klasse!

2. Dagegen ist $a \cap b$ eine Menge nach dem Aussonderungsaxiom, allgemeiner gilt nach (AusS):

$$A \neq \emptyset \rightarrow Mg(\bigcap A), \quad \text{wegen } \bigcap \emptyset = V \text{ also}$$
$$A \neq \emptyset \leftrightarrow Mg(\bigcap A).$$

Statt der obigen Summen und Durchschnitte kommen in der Mathematik häufiger Vereinigungen und Durchschnitte von Familien von Mengen vor. Zur Angleichung an den dort üblichen Gebrauch bezeichnen wir den Indexbereich mit I (der zunächst eine Klasse sein kann) und schreiben auch F_i für $F(i)$:

$$\bigcup_{i \in I} F_i := \bigcup \{F_i \mid i \in I\} = \{z \mid \exists i \in I\, z \in F_i\} \qquad \textbf{Vereinigung}$$
$$\bigcap_{i \in I} F_i := \bigcap \{F_i \mid i \in I\} = \{z \mid \forall i \in I\, z \in F_i\} \qquad \textbf{Durchschnitt}$$

In Verallgemeinerung des ZERMELOschen Axioms besagt das Summenaxiom von P. BERNAYS, daß die Vereinigung von Mengen-vielen Mengen wieder eine Menge ist:

Summenaxiom (BSum) $\qquad Mg(\bigcup_{x \in a} F(x))$

Der Indexbereich I ist hier eine Menge a, jedem $i \in a$ ist eine *Menge* $F(i)$ zugeordnet, die Zuordnung kann allerdings durch eine Klasse F gegeben sein! Wenn man dies beachtet, kann man die BERNAYSsche Summe auch in der vertrauten Form $\bigcup_{i \in I} a_i$ und das BERNAYSsche Summenaxiom in der Form

$$Mg(\bigcup_{i \in I} a_i) \text{ für jede Indexmenge } I$$

schreiben. Das

Ersetzungsaxiom (Ers) $\qquad Mg(\{F(x) \mid x \in a\})$

von A. FRAENKEL besagt, daß das Bild einer *Menge* a unter einer Funktion F (welche eine *Klasse* sein kann) wieder eine Menge ist, bzw. daß man wieder eine Menge erhält, wenn man die Elemente x einer Menge a durch ihre Funktionswerte $F(x)$ *ersetzt*. Wir können es auch in der folgenden Form schreiben:

$$Fkt(F) \to Mg(F[a]) \qquad \text{bzw.}$$
$$Fkt(F) \wedge Mg(D(F)) \to Mg(W(F)).$$

Satz

Auf der Basis der bisherigen Axiome $(\mathsf{Ext}, \mathsf{Null}, \mathsf{Paar})$ *gilt:*

BERNAYSsches Summenaxiom = Summenaxiom + Ersetzungsaxiom.

Beweis: Aus BSum folgt Sum, indem man für F die Identität (also $F(x) = x$) setzt, und das Ers ergibt sich wegen $\{F(x) \mid x \in a\} = \bigcup\{\{F(x)\} \mid x \in a\}$. Umgekehrt gilt:

$$\bigcup_{x \in a} F(x) = \bigcup\{F(x) \mid x \in a\} = \bigcup F[a].$$

□

Satz

(i) $Fkt(F) \wedge D(F) \in V \to W(F), F \in V$,
d. h. *ist der Definitionsbereich einer Funktion eine Menge, so ist nicht nur ihr Bild, sondern die Funktion selber eine Menge.*

(ii) $F : A \twoheadrightarrow B \wedge Mg(A) \to Mg(B)$

(iii) $F : A \rightarrowtail B \wedge Mg(B) \to Mg(A)$

Beweis von (i): Zu gegebener Funktion F definiere eine Funktion G durch

$$D(G) = D(F) \text{ und } G(x) = (x, F(x)) \text{ für } x \in D(F).$$

Dann ist $W(G) = \{G(x) \mid x \in D(F)\} = \{(x, F(x)) \mid x \in D(F)\} = F$, also auch F Menge nach dem Ersetzungsaxiom (angewandt auf G). Die Beweise von (ii) und (iii) sind leichte Übungsaufgaben. □

Die Aussagen (ii) und (iii) werden verständlich, wenn man "Mg(A)" inhaltlich deutet als "A ist nicht zu groß" und beachtet, daß das Bild einer Funktion eher "kleiner" als der Definitionsbereich ist (da die Funktion möglicherweise verschiedene Mengen auf dasselbe Objekt abbildet. (Genaueres hierzu bei der Einführung des Begriffes der Kardinalzahl!)

Satz über das Produkt

Das Produkt zweier Mengen ist wieder eine Menge: $Mg(a \times b)$

Beweis: Offensichtlich kann man die Menge b auf $\{c\} \times b$ abbilden, dieses ist also eine Menge nach dem Ersetzungsaxiom. Somit kann man eine Funktion $F : a \longrightarrow V$ definieren durch $F(x) = \{x\} \times b$.
Hiermit gilt nun $a \times b = \bigcup_{x \in a}(\{x\} \times b) = \bigcup_{x \in a} F(x)$. □

5.2 Potenzmenge und allgemeines Produkt

$\mathcal{P}(A) := \{x \mid x \subseteq A\}$ **Potenzklasse** von A
${}^{b}A := \{f \mid f : b \longrightarrow A\}$ **Belegungsklasse** von b nach A

Potenzmengenaxiom (Pot) $Mg(\mathcal{P}(a))$

Bemerkungen

- Da Elemente von Klassen stets Mengen sind, ist $\mathcal{P}(A)$ nur als Klasse aller Teil*mengen* von A definierbar, ebenso ist ${}^{b}A$ nur für Mengen b definierbar.
- Es ist stets $\emptyset, a \in \mathcal{P}(a)$.
- Aufgrund der spezifischen Definition des geordneten Paares gilt:

  $$a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)).$$

  Also kann man auch mit Hilfe des Potenzmengenaxioms (und des Aussonderungsaxioms) zeigen, daß das Produkt von zwei Mengen wieder eine Menge ist.
- Indem man jeder Menge $x \subseteq a$ ihre charakteristische Funktion c_x zuordnet, erhält man eine Bijektion der Potenzklasse $\mathcal{P}(A)$ auf die Belegungsklasse ${}^{b}2$ mit $2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Falls a eine endliche Menge mit n Elementen ist, so hat also die Potenzmenge von a 2^n Elemente (was auch für unendliche Mengen gilt und die Bezeichnung “Potenzmenge” erklärt).

Wie im Falle der Vereinigung gibt es für eine Menge ein einfaches und für eine Familie von Mengen ein allgemeines Produkt; in diesem Fall läßt es sich aber nur für Index*mengen* definieren:

Allgemeines Produkt

$$\prod_{x\,\in a} F(x) := \{f \mid Fkt(f) \wedge D(f) = a \wedge \forall x \in a\, f(x) \in F(x)\}$$

Weniger gebräuchlich ist der Sonderfall

$$\prod a = \prod_{x\,\in a} x := \{f \mid Fkt(f) \wedge D(f) = a \wedge \forall x \in a\, f(x) \in x\}.$$

Bemerkung

Es gibt einfache Bijektionen (für $a \neq b$)

$$\prod_{x\in\{a\}} F(x) \longleftrightarrow F(a), \qquad \prod_{x\in\{a,b\}} F(x) \longleftrightarrow F(a) \times F(b)$$

usw., so daß man das allgemeine Produkt als Verallgemeinerung des endlichen Produktes auffassen kann. Benutzen wir wieder I als Indexmenge und Familien statt Funktionen, so können wir das allgemeine Produkt auch in der folgenden Form schreiben:

$$\text{für Mengen } I: \quad \prod_{i\,\in I} F_i \qquad \text{bzw.} \qquad \prod_{i\,\in I} a_i = \{(x_i)_{i\,\in I} \mid \forall i \in I\, x_i \in a_i\},$$

wobei wir statt F jetzt auch eine Mengenvariable a einsetzen können, da nach dem Ersetzungsaxiom eine Funktion, die auf einer Menge definiert ist, selbst eine Menge ist.

Satz

(i) $\prod_{x\,\in a} F(x) \subseteq \mathcal{P}(a \times \bigcup_{x\in a} F(x))$

(ii) ${}^a b = \prod_{x\,\in a} F(x)$ *mit* $F(x) = b$ *konstant für alle* $x \in a$,

(iii) ${}^a b$ *und* $\prod_{x\,\in a} F(x)$ *sind Mengen.* □

Somit können wir die folgenden Mengen bilden:

$$\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\},\ a \cup b,\ a \cap B,\ a - b,$$
$$\bigcup a,\ \bigcup_{x\in a} F(x),\ F[a],\ \{f \mid f : a \longrightarrow b\},\ a \times b,\ \prod_{x\in a} F(x),\ \mathcal{P}(a).$$

Damit erhalten wir die in der Mathematik gebräuchlichen Operationen, die, auf Mengen angewandt, wiederum Mengen ergeben; das gilt zwar nicht für das Komplement, aber dieses wird ohnehin in Anwendungen nur relativ zu einer vorgegebenen Grundmenge gebraucht. Es fehlt aber noch die Existenz einer unendlichen Menge (und damit der Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \ldots$), und hierzu benötigen wir das

Unendlichkeitsaxiom (Un) $\quad \exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$

Die kleinste derartige Menge, d. h. der Durchschnitt

$$\mathbb{N} := \bigcap \{x \mid \emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)\}$$

kann als Menge der natürlichen Zahlen gewählt werden. Im Sinne der Ordinalzahltheorie ist es eine Ordinalzahl, und zwar die kleinste unendliche Ordinalzahl, bezeichnet mit ω.

Die bisherigen Axiome legen die Gleichheit von Mengen fest (Ext) oder fordern die Existenz von Mengen, die eindeutig beschrieben werden (Paar, Summe, Potenz, Bildmenge, natürliche Zahlen). Von anderer Art ist das

Fundierungsaxiom (Fund) $\quad a \neq \emptyset \to \exists x \in a\, x \cap a = \emptyset.$

Dieses schränkt den Mengenbereich ein, indem es “unbequeme” Mengen ausschließt, die man beim gewöhnlichen Aufbau der Mengenlehre nicht benötigt. Wir haben es bei der Entwicklung der Ordinalzahltheorie bereits benutzt und werden eine weitere Anwendung später darstellen.

5.3 Überblick über die ZF-Axiome

Extensionalitätsaxiom	(Ext)	$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$
Nullmengenaxiom	(Null)	$\exists y \forall x(x \notin y)$
Paarmengenaxiom	(Paar)	$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x = a \vee x = b)$
Summenaxiom	(Sum)	$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists x \in a\, z \in x)$
Ersetzungsschema	(ErsS)	$\forall x \forall y \forall z(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \rightarrow y = z)$
		$\rightarrow \exists u \forall y(y \in u \leftrightarrow \exists x \in a \varphi(x,y))$
Potenzmengenaxiom	(Pot)	$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq a)$
Unendlichkeitsaxiom	(Un)	$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$
Fundierungsaxiom	(Fund)	$a \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in a\, \forall y \in x\, y \notin a.$

Unter Benutzung von *Klassentermen*, also Ausdrücken der Form $\{x \mid \varphi(x)\}$, bezeichnet mit Großbuchstaben $A, B, \ldots$ und der Definition

$$Mg(A) :\leftrightarrow \exists x(x = A) \quad A \text{ ist Menge}$$

lassen sich die obigen Axiome auch wie folgt kürzer und prägnanter ausdrücken (mit den üblichen Definitionen von Funktionen als Klassen geordneter Paare):

Extensionalitätsaxiom	(Ext)	$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$
Nullmengenaxiom	(Null)	$Mg(\emptyset)$
Paarmengenaxiom	(Paar)	$Mg(\{a,b\})$
Summenaxiom	(Sum)	$Mg(\bigcup a)$
Ersetzungsaxiom	(ErsS)	$Fkt(F) \rightarrow Mg(F[a])$
Potenzmengenaxiom	(Pot)	$Mg(\mathcal{P}(a))$
Unendlichkeitsaxiom	(Un)	$Mg(\mathbb{N})$
Fundierungsaxiom	(Fund))	$a \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in a\, x \cap a = \emptyset.$

Das Aussonderungsaxiom ist übrigens als Folge des Ersetzungsaxioms überflüssig (wobei man - je nach Art der Formalisierung - noch das Nullmengenaxiom benötigt):

Metatheorem

(i) *Aus den Axiomen* Ext, Null, Paar, Ers *folgt* Aus,

(ii) *aus* ErsS *folgt* AusS.

Beweis von (i): zu zeigen ist: $a \cap A \in V$.

1. Fall: $a \cap A = \emptyset$: Dann gilt die Beh. wegen des Nullmengenaxioms.

2. Fall: $a \cap A \neq \emptyset$: Wähle ein $b \in a \cap A$ und definiere eine Funktion
$F : a \twoheadrightarrow a \cap A$ durch
$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in a \cap A, \\ b, & \text{sonst} \end{cases}$$
und wende das Ersetzungsaxiom an.

Dasselbe Argument liefert einen Beweis von (ii), benötigt aber weder das Nullmengenaxiom noch das Paarmengenaxiom:

Zu zeigen ist:
$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a\ \varphi(x)).$$
Definiere dazu eine Formel
$$\psi(x,y) :\leftrightarrow (\varphi(x) \wedge x = y).$$
Es gilt dann:
$$\psi(x,y) \wedge \psi(x,z) \rightarrow y = z,$$
also ex. nach ErsS ein b mit
$$\begin{array}{ll} \forall y (y \in b \leftrightarrow \exists x \in a\ \psi(x,y)), & \text{d. h.} \\ \forall y (y \in b \leftrightarrow \exists x \in a\ (\varphi(x) \wedge x = y)), & \text{also} \\ \forall y (y \in b \leftrightarrow y \in a \wedge \varphi(y)) & \end{array}$$

□

Teil II

Mengen von Mengen von …

Kapitel 6

Induktion und Rekursion

Willst du ins Unendliche schreiten,
Geh nur im Endlichen nach allen Seiten.
Johann Wolfgang von Goethe: Wege

Quod enim dicimus aliquid esse infinitum,
non aliquid in re significamus,
sed impotentiam in animo nostro;
tanquam si diceremus, nescire nos, an et ubi
terminetur.
Th. Hobbes, De cive XV 14

. . . l´homme qui n´est produit que pour l´infinité.
Blaise Pascal: Préface sur le Traité du vide

Wenn man eine Aussage über alle natürlichen Zahlen beweisen will, so kann man sie nicht für jede Zahl einzeln nachprüfen, da dies unendlich-viele Schritte erfordern würde. Stattdessen kann man auf das Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen zurückgreifen, allgemeiner im Falle unendlicher Mengen auf eine Wohlordnung dieser Menge. Diese ordnet die Elemente der Menge in einer Weise, daß man sie von den kleineren zu den größeren "durchlaufen" kann, was dann genauer im (transfiniten) Induktionsprinzip ausgedrückt wird. Wir wiederholen zunächst den Begriff der Wohlordnung und erweitern ihn zugleich auf den Fall von Klassen:

6.1 Ordnungen auf Klassen

1. Eine (irreflexive) **teilweise Ordnung** auf einer Klasse A ist eine 2-stellige Relation $< \subseteq A \times A$, für die gilt:

   (a) $\forall x \in A\, x \not< x$ **irreflexiv**,
   (b) $\forall x,y,z \in A\, (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$ **transitiv**.

2. Eine (irreflexive) **lineare Ordnung** auf A ist eine teilweise Ordnung $<$ auf A mit
   (c) $\forall x,y \in A\, (x < y \vee x = y \vee y < x)$ **vergleichbar**.

3. Eine **Wohlordnung** auf einer Klasse A ist eine lineare Ordnung $<$ auf A, welche zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

   (F1) $\forall z(\emptyset \neq z \subseteq A \rightarrow \exists x \in z\, \forall y \in z\, y \not< x)$ **Minimalitätsbedingung**
   (F2) $\forall y \in A \quad Mg(\{x \mid x < y\})$ **Mengenbedingung**

4. $S(a,<) := [< a] := \{x \mid x < a\}$ $<$-**Segment** von a, Menge der $<$-**Vorgänger** von a

Bemerkungen

- Die Mengenbedingung F2 ist nur wichtig für echte Klassen; ist A eine *Menge*, so ist F2 stets erfüllt, da $\{x \mid x < a\} \subseteq A$.

- Eine Relation, die nur die Bedingungen F1 und F2 erfüllt (also ohne notwendig eine lineare Ordnung zu sein), heißt *fundiert*.

- Im Falle der $\in$-Beziehung ist $\{x \mid x < a\} = \{x \mid x \in a\} = a$ und somit F2 erfüllt. Außerdem erfüllt die $\in$-Beziehung auf einer Klasse A, $\in_A$, auch die Bedingungen F1 aufgrund des Fundierungsaxioms. Damit ist $\in_A$ zwar auch irreflexiv, aber i. a. keine Wohlordnung (da weder (b) noch (c) gelten). Trotzdem kann man die wichtigsten Ergebnisse über Wohlordnungen auf fundierte Relationen (wie $\in_A$) übertragen.

- Bereits früher hatten wir erwähnt, daß sich die Minimalitätsbedingung F1 in unserem sprachlichen Rahmen nur für alle Teil*mengen* von A ausdrücken läßt. Die zusätzliche Bedingung F2 sorgt aber im Falle echter Klassen dafür, daß F2 auch für alle *definierbaren Klassen* gilt:

6.2 Minimumsprinzip

$<$ sei Wohlordnung auf A. Dann hat jede nicht-leere Teilklasse B von A ein $<$-minimales (bzw. $<$-kleinstes) Element:

(i) $\emptyset \neq B \subseteq A \rightarrow \exists x \in B\, \forall y < x \;\; y \notin B$,
bzw. mit $B = \{x \in A \mid \varphi(x)\}$ als *Schema*:

(ii) $\exists x \in A\; \varphi(x) \rightarrow \exists x \in A\, [\varphi(x) \wedge \forall y < x \neg\varphi(x)]$.

Beweis: Sei $b \in B$. Falls b nicht bereits $<$-minimal ist, so

$$\exists y \in B\; y < b, \text{ d. h. } [< b] \cap B \neq \emptyset.$$

Nach der Mengenbedingung F2 ist $[< b] \cap B$ eine Menge und hat damit nach F1 ein $<$-minimales c :

(+) $\quad c \in [< b] \cap B \;\wedge\; \forall y \in [< b] \cap B \;\; y \not< c.$

Dann gilt aber auch $c \in B \;\wedge\; \forall y \in B\; y \not< c$, denn gäbe es ein $y \in B$ mit $y < c$, so wäre $y \in [< b] \cap B$ (wegen $c < b$ und der Transitivität von $<$) im Widerspruch zur Bedingung (+). □

Im Blick darauf, daß sich das obige Minimumsprinzip auf fundierte Relationen verallgemeinern läßt,[1] schreiben wir im folgenden R für die Wohlordnung $<$:

6.3 Induktionsprinzip für Wohlordnungen

R sei Wohlordnung auf A. Dann gilt:

(i) $\forall x \in A\, [S(x,R) \subseteq B \rightarrow x \in B] \rightarrow A \subseteq B$,
bzw. mit $B = \{x \in A \mid \varphi(x)\}$ *als Schema:*

(ii) $\forall x \in A\, [\forall y (yRx \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)] \rightarrow \forall x \in A\; \varphi(x)$.

Dieses Prinzip bedeutet, daß man eine Aussage $\varphi(x)$ für alle $x \in A$ nachweisen kann, wenn man für ein beliebiges $a \in A$ zeigen kann:

[1] Dazu muß man eine fundierte Relation zu einer transitiven Relation erweitern, die ebenfalls fundiert ist.

Falls	$\forall y(yRa \rightarrow \varphi(y))$	**(Induktionsannahme)**,
so gilt	$\varphi(a)$	**(Induktionsschluß)**.

Dieses Beweisverfahren nennt man auch **Beweis durch R-Induktion**.

Beweis von (i): Annahme: $\forall x \in A\,[S(x,R) \subseteq B \rightarrow x \in B]$, aber $A \not\subseteq B$.
Dann ist $A - B \neq \emptyset$ und besitzt nach obigem Satz ein R-minimales Element a:

$$a \in A - B, \text{ aber } \forall y \in A - B\, \neg yRa, \text{ d.h. } \forall y(yRa \rightarrow y \in B),$$

also $S(a,R) \subseteq B$ und damit nach der Voraussetzung der R-Induktion: $a \in B$, Widerspruch! (Tatsächlich ist die Aussage (i) von 6.2 logisch äquivalent zur Aussage (i) dieses Satzes: benutze Kontraposition, logische Umformungen und gehe von B zur Komplementklasse über!) □

Segmente

Für eine Relation R definieren wir:

$$R\text{-}Segment(B) :\leftrightarrow \forall x \forall y(xRy \wedge y \in B \rightarrow x \in B).$$

Im Falle der $\in$-Beziehung E gilt:

$$E\text{-}Segment(B) \leftrightarrow trans(B).$$

Für Ordnungen $<$ sind die Mengen $S(a,<) = \{x \mid x < a\}$ offenbar Segmente (genannt *Anfangsegmente*), für Wohlordnungen sind es die einzigen echten Segmente:

Lemma

(i) *R sei lineare Ordnung auf A, und S, $T \subseteq A$ seien Segmente.*
Dann gilt: $S \subseteq T \vee T \subseteq S$.

(ii) *Ist R Wohlordnung auf A, $S \subseteq A$ ein echtes Segment, so $S = S(a,R)$ für ein $a \in A$.*

Beweis von (i): Sei $S \not\subseteq T$. Dann gibt es ein $a \in S - T$, und dieses kann kein R-größeres $b \in T$ besitzen (sonst wäre auch $a \in T$, da T ein Segment ist). Also gilt für alle $b \in T : bRa$, insbesondere $T \subseteq S$.
Für den Beweis von (ii) wähle man das R-kleinste Element $a \in A - S$. □

6.4 Rekursionssatz für Wohlordnungen

Es sei R eine Wohlordnung auf A, G: $V \times V \longrightarrow V$ *eine Funktion. Dann existiert genau eine Funktion* $F : A \longrightarrow V$, *die durch die folgenden rekursiven Eigenschaften bestimmt ist:*

$$
\begin{aligned}
F(a) &= G(a, F \upharpoonright S(a,R)), \quad \text{bzw. als Variante}\\
F(a) &= G(a, \{F(x) \mid xRa\}).
\end{aligned}
$$

Ferner können G und F weitere Stellen als Parameter enthalten, z. B.

$$F(a,u,v) = G(a,u,v,\{F(x,u,v) \mid xRa\}).$$

Beweis:
a) Die Eindeutigkeit von F zeigt man durch R-Induktion.
b) Für den Nachweis der Existenz definiert man:

(i) h *brav:* $\leftrightarrow \exists s\,(s \text{ ist Segment} \wedge h : s \to V \wedge \forall x \in s\; h(x) = G(x, h \upharpoonright S(x,R)))$,

(ii) h *verträglich* mit $g :\leftrightarrow \forall x \in D(h) \cap D(g)\; h(x) = g(x)$

Durch R-Induktion zeigt man, daß je zwei brave Funktionen miteinander verträglich sind:

(iii) h, g brav $\to \forall x \in D(h) \cap D(g)\; h(x) = g(x)$.
(Mit Hilfe von (i) des vorigen Lemmas kann man sogar zeigen, daß für je zwei brave h, g gilt: $g \subseteq h \vee h \subseteq g$.)

Die gesuchte Funktion können wir jetzt explizit definieren durch:

(iv) $F := \bigcup\{h \mid h\, brav\}$.

F ist wegen (iii) eine Funktion, $D(F)$ ist ein Segment, und F erfüllt die Rekursionsbedingungen (als Vereinigung braver Funktionen). Es bleibt zu zeigen, daß F auf ganz A definiert ist:

Wäre $B := D(F)$ echtes Segment von A, so $B = S(a,R)$ für ein $a \in A$ nach obigem Lemma (ii), insbesondere B und damit F eine Menge, etwa $F = f$ mit bravem f. Dieses f könnte man dann fortsetzen zu einem braven

$$h := f \cup \{(a, G(a, f \upharpoonright S(a,R)))\}$$

mit $a \in D(h) = S(a,R) \cup \{a\}$ ein Segment, also müßte auch $a \in D(F) = B = S(a,R)$ sein und somit aRa, Widerspruch! $\square$

Damit haben wir eine *explizite* mengentheoretische Definition einer Funktion erhalten, die durch eine rekursive Bedingung charakterisiert ist, und zwar erhält man die Funktion als Vereinigung von "partiellen" Lösungen der Rekursionsgleichungen. Insbesondere kann man damit die Elemente einer wohlgeordneten Klasse der Größe nach aufzählen - dabei hängt nämlich die Aufzählung eines Elementes $b \in A$ ab von der Aufzählung der Vorgänger von b:

6.5 Kontraktionslemma

R sei eine Wohlordnung auf A. Dann existiert genau eine Abbildung F und eine transitive Klasse B, so daß:

$$\begin{gathered} F \text{ ist ein Isomorphismus: } (A,R) \cong (B,\in), \text{ d. h.} \\ F : A \longleftrightarrow B \quad mit \\ aRb \leftrightarrow F(a) \in F(b) \quad \text{für alle } \ a,b \in A. \end{gathered}$$

Dabei sei das **geordnete Paar von Klassen** etwa definiert durch:

$$(A,B) := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}),$$

und $(B,\in)$ ist die Struktur (B,E_B) mit $E_B := \{x,y \mid x,y \in B \wedge x \in y\}$.

Beweis:

a) *Eindeutigkeit:* Sei $F : A \longleftrightarrow B$ mit $aRb \leftrightarrow F(a) \in F(b)$, B transitiv. Dann gilt für alle $b \in A$:

	$F(b) \in B \rightarrow F(b) \subseteq B$	wegen trans(B)
	$a \in F(b) \rightarrow \exists x(a = F(x) \in F(b))$	nach Voraussetzung
	$a \in F(b) \leftrightarrow \exists x(a = F(x) \wedge xRb)$,	somit
(*)	$F(b) = \{F(x) \mid xRb\}$.	

Dadurch ist aber F eindeutig festgelegt, und B ist eindeutig als Wertebereich von F bestimmt.

b) *Existenz:* Nach dem Rekursionssatz existiert (genau) ein F mit $D(F) = A$ und für alle $b \in A$:

$$F(b) = \{F(x) \mid xRb\},$$

d. h. es existiert ein $F : A \twoheadrightarrow B$ mit der Eigenschaft (*), wobei wir $B := W(F)$ gesetzt haben.

F ist *injektiv:*
Sei $F(y) = F(z)$, aber $y \neq z$. Da R eine Ordnung ist, so gilt

yRz und damit $F(y) \in F(z)$ oder
zRy und damit $F(z) \in F(y)$,

in beiden Fällen ein Widerspruch zu $F(y) = F(z)$ (und dem Fundierungsaxiom)!

F ist ein *Isomorphismus:*
Nach Def. von F gilt: $aRb \to F(a) \in F(b)$. Sei umgekehrt $F(a) \in F(b)$. Dann ist $F(a) = F(c)$ für ein cRb, aber $a = c$ (wegen der Injektivität), und somit auch aRb.

B ist *transitiv:*
Sei $c \in B = W(F)$. Dann ist $c = F(b)$ für ein $b \in A$, andererseits nach Def. von F (d.h. nach (*)): $c = F(b) = \{F(x) \mid xRb\} \subseteq B$, also $c \subseteq B$. □

Da transitive Mengen, die durch die $\in$-Beziehung wohlgeordnet sind, gerade die Ordinalzahlen sind, erhalten wir mit

$On := \{x \mid Ord(x)\}$ als **Klasse aller Ordinalzahlen**:

6.6 Repräsentationssatz für Wohlordnungen

$<$ *sei eine Wohlordnung auf* A.

(i) *Ist* $A = a$ *eine Menge, so gibt es genau eine Abbildung* f *und genau eine Ordinalzahl* α *mit*

$$f : (a, <) \cong (\alpha, \in).$$

(ii) *Ist* A *eine echte Klasse, so gibt es genau eine Abbildung* F *mit*

$$F : (A, <) \cong (On, \in).$$

□

Somit sind die Ordinalzahlen Repräsentanten von Wohlordnungen. Das eindeutig bestimmte α mit $(a, <) \cong (\alpha, \in)$ nennt man den **Wohlordnungstyp** von $(a, <)$. Man erhält ihn, wenn man die Elemente der Menge a nach der Wohlordnung $<$ aufzählt: Ist

$$a = \{a_\xi \mid \xi < \alpha\} \text{ mit } a_0 < a_1 < \ldots < a_\xi < a_\eta \ldots \text{ für } \xi < \eta < \alpha,$$

so ist α der Wohlordnungstyp von a bezüglich der Wohlordnung $<$ auf a.

Im Falle einer echten Klasse gibt es nur einen Wohlordnungstyp (nämlich On), und zwar liegt das an der Mengenbedingung F2 in der Definition 6.1.3.

Anwendung auf die Ordinalzahlen

Die kleinste Ordinalzahl ist 0, und für jede Ordinalzahl α ist $\alpha+1$ ebenfalls eine Ordinalzahl, und zwar eine Nachfolgerzahl. Die restlichen Typen von Ordinalzahlen sind Limeszahlen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset && \textbf{Null} \\ Nf(\alpha) &: \leftrightarrow \exists \xi \ \alpha = \xi + 1 && \textbf{Nachfolgerzahl} \\ Lim(\lambda) &: \leftrightarrow \lambda \neq 0 \wedge \neg Nf(\lambda) && \textbf{Limeszahl} \\ &\leftrightarrow \lambda \neq 0 \wedge \forall \xi < \lambda \ (\xi + 1 < \lambda) \end{aligned}$$

Lemma

(i) $\alpha = 0 \vee Nf(\alpha) \vee Lim(\alpha)$ *(und es gilt genau einer der drei Fälle),*

(ii) $Lim(\lambda) \leftrightarrow \lambda > 0 \wedge \lambda = \cup\lambda$,

(iii) $trans(A) \wedge A \subseteq On \rightarrow A \in On \ \vee \ A = On$,

(iv) $A \subseteq On \rightarrow \cup A \in On \ \vee \ \cup A = On$.

Beweis von (iii): Ist A transitiv, so ein E-Segment von On und nach Lemma (ii) aus 6.3 somit $= On$ oder als echtes Segment von der Form $A = \{x \mid x < \alpha\} = \alpha$ für ein α.
Zum Beweis von (iv) beachte man, daß für $A \subseteq On$ gilt: $\cup A$ ist transitiv (allgemeiner ist die Vereinigung transitiver Mengen wieder transitiv), so daß man (iii) anwenden kann. □

Beachte, daß (iii) eine Verallgemeinerung des Satzes aus 1.4 ist. (iv) besagt, daß das Supremum einer Klasse von Ordinalzahlen wieder eine Ordinalzahl ist oder = On ist, und zwar gilt in (iii) und (iv) jeweils der 1. Fall, wenn A beschränkt ist (d. h. $\exists \alpha \, A \subseteq \alpha$), der 2. Fall, falls A unbeschränkt ist (also $\forall \alpha \exists \xi \geq \alpha \ \xi \in A$).

Die Existenz von Limeszahlen folgt erst aus dem Unendlichkeitsaxiom, und damit werden wir uns im folgenden Abschnitt beschäftigen. Hier können wir die Existenzfrage erst einmal offen lassen; falls es keine Limeszahl gibt, sind die Ordinalzahlen gerade die natürlichen Zahlen, anderenfalls gehen sie darüber hinaus: Mit einer Limeszahl λ gibt es auch wieder die Nachfolgerzahlen $\lambda+1, \lambda+2, \ldots$ (die aber keine natürlichen Zahlen mehr sind) und dann wieder deren Limes, ..., usw. Somit führen die Ordinalzahlen über die natürlichen Zahlen hinaus, indem zu jeder Menge von Ordinalzahlen auch das Supremum wieder eine Ordinalzahl ist: Es gilt

$$(*) \qquad 0 = \emptyset \in On \wedge \forall \alpha(\alpha \in On \rightarrow \alpha + 1 \in On) \wedge \forall x(x \subseteq On \rightarrow \cup x \in On),$$

tatsächlich ist *On* die kleinste Klasse mit dieser Abgeschlossenheitsbedingung.

Da die Ordinalzahlen durch die $\in$ -Beziehung wohlgeordnet sind, gelten hierfür die Induktions- und Rekursionstheoreme des vorigen Abschnitts; zusätzlich kann man ihnen aber wegen (*) auch eine zweite Fassung geben, die zeigt, wie diese Prinzipien die entsprechenden Sätze über die natürlichen Zahlen verallgemeinern:

6.7 Minimumsprinzip, transfinite Induktion und Rekursion

(i) $\emptyset \neq A \subseteq On \rightarrow \exists \alpha \in A\, A \cap \alpha = \emptyset$ **Minimumsprinzip**

(ii) $\exists \alpha\, \varphi(\alpha) \rightarrow \exists \alpha(\varphi(\alpha) \wedge \forall \xi < \alpha \neg \varphi(\xi))$

(iii) $\forall \alpha(\alpha \subseteq A \rightarrow \alpha \in A) \rightarrow On \subseteq A$ **Induktionsprinzip**

(iv) $\varphi(0) \wedge \forall \alpha((\varphi(\alpha) \rightarrow \varphi(\alpha+1)) \wedge$
$\wedge \forall \lambda(Lim(\lambda) \wedge \forall \xi < \lambda\, \varphi(\xi) \rightarrow \varphi(\lambda)) \rightarrow \forall \alpha\, \varphi(\alpha)$

Dabei haben wir in (i) und (iii) die Klassen-, in (ii) und (iv) die Schema-Schreibweise benutzt; (i) - (iv) sind untereinander äquivalent. In (v) beschränken wir uns auf den Fall, welcher der Induktion der Form (iv) entspricht:

(v) **Transfinite Rekursion**: *Sind $G, H : On \times V \longrightarrow V$ Funktionen, a eine Menge, so existiert genau eine Funktion $F : On \longrightarrow V$ mit*

$$\begin{aligned} F(0) &= a \\ F(\alpha+1) &= G(\alpha, F(\alpha)) \\ F(\lambda) &= H(\lambda, \{F(\xi) \mid \xi < \lambda\}) \quad \text{für } Lim(\lambda). \end{aligned}$$

(Analog für mehrstellige Funktionen mit Parametern.) $\square$

Kapitel 7

Normalfunktionen

7.1 Addition, Multiplikation, Potenz

Der Rekursionssatz erlaubt es, die arithmetischen Operationen auf den Ordinalzahlen so einzuführen, daß sie die entsprechenden Operationen auf den natürlichen Zahlen verallgemeinern (nach JACOBSTHAL 1909):

$$\begin{array}{ll}
\alpha + 0 = \alpha & \alpha \cdot 0 = 0 \\
\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 & \alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \\
\alpha + \lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha + \xi, \quad \text{falls } \mathrm{Lim}(\lambda) & \alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha \cdot \xi, \quad \text{falls } \mathrm{Lim}(\lambda)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^0 &= 1 \\
\alpha^{(\beta+1)} &= \alpha^\beta \cdot \alpha \\
\alpha^\lambda &= \bigcup_{0 < \xi < \lambda} \alpha^\xi, \quad \text{falls } \mathrm{Lim}(\lambda)
\end{aligned}$$

Die von den natürlichen Zahlen bekannten Rechengesetze gelten zum Teil auch für die unendlichen Ordinalzahlen:

Satz

(i)	$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$	0 ist neutrales Element für $+$
(ii)	$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$	1 ist neutrales Element für $\cdot$
(iii)	$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$	0 ist Nullteiler
(iv)	$0^0 = 1,\ 0^\beta = 0$ für $\beta > 0,\ 1^\beta = 1$	
(v)	$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	$+$ ist assoziativ
(vi)	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$	$\cdot$ ist assoziativ
(vii)	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	rechts-distributiv
(viii)	$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma, \alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$	

Bevor wir auf die Beweise eingehen, wollen wir einige Beispiele berechnen. Dabei sind für den Limesfall die Operationen oft sehr einfach zu bestimmen:

Beispiele und Gegenbeispiele

$1+\omega=\bigcup_{n<\omega} n=\omega$	allgemeiner:	$n+\omega=\omega$	für jedes $n<\omega$
$2\cdot\omega=\bigcup_{n<\omega} 2\cdot n=\omega$	allgemeiner:	$n\cdot\omega=\omega$	für jedes $0<n<\omega$
$2^\omega=\bigcup_{n<\omega} 2^n=\omega$	allgemeiner:	$n^\omega=\omega$	für jedes $1<n<\omega$.

Außerdem:

$$(\omega+1)\cdot 2=(\omega+1)+(\omega+1)=\omega+1+\omega+1=\omega+\omega+1=\omega\cdot 2+1,$$

$$(\omega+1)\cdot n=\omega\cdot n+1,$$
$$(\omega+1)\cdot\omega=\bigcup_{n<\omega}(\omega+1)\cdot n=\bigcup_{n<\omega}(\omega\cdot n+1)=\bigcup_{n<\omega}\omega\cdot n=\omega\cdot\omega,$$
$$(\omega+1)^2=(\omega+1)\cdot(\omega+1)=(\omega+1)\cdot\omega+(\omega+1)=\omega\cdot\omega+\omega+1.$$

Damit erhalten wir zugleich einige **Gegenbeispiele** zu arithmetischen Gesetzen: i. a. gilt **nicht**:

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	da $1+\omega=\omega\neq\omega+1$
$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$	da $2\cdot\omega=\omega\neq\omega\cdot 2$
$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$	da $(1+1)\cdot\omega=\omega\neq 1\cdot\omega+1\cdot\omega=\omega+\omega$
$(\alpha\cdot\beta)^\gamma\leq\alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$	da $(2\cdot(\omega+1))^2=(\omega+2)^2=\omega\cdot\omega+\omega\cdot 2+2$ $>2^2\cdot(\omega+1)^2=\omega\cdot\omega+\omega+4,$
$(\alpha\cdot\beta)^\gamma\geq\alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$	da $(2\cdot 2)^\omega=\omega<2^\omega\cdot 2^\omega=\omega\cdot\omega.$

Immerhin gilt aber wenigstens noch: $(\alpha+\beta)\cdot\gamma\leq\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$.

7.2 Monotonie-Gesetze

(i)	$\alpha+\beta=\alpha+\gamma\leftrightarrow\beta=\gamma$	Kürzungsregel (aber $1+\omega=2+\omega, 1\neq 2$)
	$\alpha+\beta<\alpha+\gamma\leftrightarrow\beta<\gamma$	Monotonie im 2. Argument
(ii)	für $\alpha>0$:	
	$\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma\leftrightarrow\beta=\gamma$	Kürzungsregel (aber $1\cdot\omega=2\cdot\omega, 1\neq 2$)
	$\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma\leftrightarrow\beta<\gamma$	Monotonie im 2. Argument

(iii) für $\alpha > 1$:

	$\alpha^{\beta} = \alpha^{\gamma} \leftrightarrow \beta = \gamma$	Kürzungsregel (aber $2^{\omega} = 3^{\omega}, 2 \neq 3$)
	$\alpha^{\beta} < \alpha^{\gamma} \leftrightarrow \beta < \gamma$	Monotonie im 2. Argument
(iv)	$\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$	schwache Monotonie
(v)	$\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$	schwache Monotonie
(vi)	$\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha^{\gamma} \leq \beta^{\gamma}$	schwache Monotonie

Die arithmetischen Operationen der Addition, Multiplikation und Potenz sind offenbar vom selben Typ hinsichtlich ihres zweiten Arguments und fallen unter den allgemeinen Begriff der *Normalfunktion*. Wir werden daher die entsprechenden Gesetze als Spezialfälle von Eigenschaften der **Normalfunktionen** (VEBLEN 1908) erhalten:

Definition

$$\begin{array}{ll} Nft(F) :\leftrightarrow F : On \rightarrow On \wedge \forall \xi, \eta\ (\xi < \eta \rightarrow F(\xi) < F(\eta)) & \textbf{streng monoton} \\ \qquad \wedge \forall \lambda\ (Lim(\lambda) \rightarrow F(\lambda) = \bigcup_{\xi < \lambda} F(\xi)) & \textbf{stetig} \end{array}$$

Eine Normalfunktion ist somit eine Funktion auf den Ordinalzahlen, welche streng monoton und stetig ist.

- Die einfachste Normalfunktion ist die identische Funktion auf den Ordinalzahlen,
- die arithmetischen Operationen der Addition, Multiplikation und Potenz sind (von trivialen Anfangsfällen abgesehen) Normalfunktionen im 2. Argument (s. u.).
- Die Nachfolgerfunktion $S : On \rightarrow On$ mit $S(\alpha) = \alpha + 1$ ist zwar monoton, aber nicht stetig (da $\bigcup_{n<\omega} S(n) = \omega \neq S(\omega) = \omega + 1$).

Lemma

Es sei $F : On \rightarrow On$ stetig. Dann gilt:

$$Nft(F) \leftrightarrow \forall \alpha\ (F(\alpha) < F(\alpha + 1)),$$

d. h. eine stetige Funktion ist bereits dann eine Normalfunktion, wenn sie beim Übergang zum Nachfolger monoton ist.

Beweis: Zeige für den Teil ($\Leftarrow$) durch Induktion über β, daß

$$\forall \xi \ (\xi < \beta \to F(\xi) < F(\beta)).$$

$\square$

Die Addition ist eine wiederholte Hinzufügung von 1, die Multiplikation eine wiederholte Addition und die Potenz eine wiederholte Multiplikation. Allgemeiner können wir die Iteration einer Funktion erklären durch die folgende

Definition

Es sei $F : V \to V$ eine Funktion, a eine beliebige Menge. Dann ist

$$It = It(F,a),$$

der **Iterator** von F mit Anfangswert a, wie folgt durch transfinite Rekursion definiert:

$$\begin{aligned} It(0) &= a \\ It(\gamma+1) &= F(It(\gamma)) \\ It(\lambda) &= \bigcup_{\xi<\lambda} It(\xi) \qquad \text{falls } Lim(\lambda) \end{aligned}$$

Üblicherweise schreibt man: $F^\gamma(a) = It(F,a)(\gamma)$, so daß

$$\begin{aligned} F^0(a) &= a \\ F^{\gamma+1}(a) &= F(F^\gamma(a)) \\ F^\lambda(a) &= \bigcup_{\xi<\lambda} F^\xi(a) \qquad \text{falls } Lim(\lambda). \end{aligned}$$

Beispiele

- Der Iterator der Nachfolgerfunktion S mit dem Anfangswert α ist die Addition zu $\alpha : \alpha+\beta = S^\beta(\alpha)$,
- ist $A_\alpha : On \to On$ die Funktion mit $A_\alpha(\delta) = \delta+\alpha$, so ist deren Iterator mit Anfangswert 0 die Multiplikation mit α: $\alpha \cdot \beta = A_\alpha^\beta(0)$,
- ist $M_\alpha : On \to On$ die Funktion mit $M_\alpha(\delta) = \delta \cdot \alpha$, so ist deren Iterator mit Anfangswert 1 die Potenz von α: $\alpha^\beta = M_\alpha^\beta(1)$.

Da der Iterator einer ordinalen Funktion F stets stetig ist, ist er nach dem vorangegangenen Lemma eine Normalfunktion, wenn die Funktion F echt wächst:

Satz

Es sei $F : On \to On$ mit $\forall \xi\ (\xi < F(\xi))$. Dann ist $It(F,a)$ eine Normalfunktion. Insbesondere sind folgende Funktionen Normalfunktionen:

(i) Die Addition als Funktion des 2. Argumentes, d. h.
$\beta \mapsto \alpha + \beta$ für beliebiges α (da $\delta < S(\delta)$),

(ii) die Multiplikation als Funktion des 2. Argumentes, d. h.
$\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$ für beliebiges $\alpha > 0$ (da dann $\delta < \delta + \alpha$),

(iii) die Potenz als Funktion des 2. Argumentes, d. h.
$\beta \mapsto \alpha^\beta$ für beliebiges $\alpha > 1$ (da dann $\delta < \delta \cdot \alpha$). □

Somit gelten alle Eigenschaften von Normalfunktionen insbesondere für die obigen arithmetischen Operationen. Als streng monotone Funktionen sind sie injektiv und ihre Umkehrfunktionen sind ebenfalls streng monoton. Die einzige streng monotone und zugleich surjektive Funktion auf den Ordinalzahlen ist somit die identische Abbildung:

Satz

Es sei $F : On \to On$ streng monoton, also $\forall \xi, \eta\ (\xi < \eta \to F(\xi) < F(\eta))$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rc} (i) & \forall \xi (\xi \leq F(\xi)), \\ (ii) & \forall \xi, \eta\ (F(\xi) < F(\eta) \to \xi < \eta). \end{array}$$

Beweis: Falls $F(\alpha) < F(\beta)$ ist, so muß auch $\alpha < \beta$ sein, denn nach Voraussetzung gilt $\beta \leq \alpha \to F(\beta) \leq F(\alpha)$. Daraus erhalten wir (ii) und damit auch die Injektivität von F.

(i) kann man durch Induktion beweisen oder mit Hilfe des Minimumsprinzips: Falls $\alpha \not\leq F(\alpha)$ für ein α gilt, so wähle man ein kleinstes derartiges α. Dann gilt also

$$F(\alpha) < \alpha \wedge \forall \xi < \alpha\ \xi \leq F(\xi).$$

Setze $\gamma := F(\alpha)$. Dann ist $\gamma = F(\alpha) < \alpha$, also wegen der Monotonie von F

$$F(F(\alpha)) = F(\gamma) < F(\alpha) = \gamma,$$

und somit $F(\gamma) < \gamma$ mit $\gamma < \alpha$ im Widerspruch zur Wahl von α als kleinster derartiger Zahl! □

Hieraus erhalten wir insbesondere die früheren Monotoniegesetze 7.2.

7.3 Verallgemeinerte Stetigkeit von Normalfunktionen

Für die Nachfolgerfunktion gilt immer $\alpha < F(\alpha)$, und streng monotone Funktionen können natürlich noch viel stärker stark wachsen. Dagegen führt die Stetigkeitseigenschaften von Normalfunktionen dazu, daß es für solche Funktionen immer beliebig große "Fixpunkte" α mit $F(\alpha) = \alpha$ gibt, wo die Funktion also wieder von der identischen Funktion "eingeholt" wird. Dazu leiten wir eine Verallgemeinerung der Stetigkeit her, wollen vorher aber noch auf unterschiedliche Supremums-Begriffe aufmerksam machen:

Die Ordinalzahlen sind durch $<=\in$ irreflexiv, durch $\leq=\subseteq$ reflexiv geordnet, und somit haben wir auch zwei unterschiedliche Definitionen für das Supremum einer Menge $a \subseteq On$ von Ordinalzahlen bzw. einer Folge F von Ordinalzahlen

- $sup_{\xi<\lambda}F(\xi) := \bigcup_{\xi<\lambda} F(\xi) = \mu\gamma\,(\forall\xi < \lambda\, F(\xi) \leq \gamma)$ **sup bzgl.** $\leq$,
- $sup^{+}_{\xi<\lambda}F(\xi) := \bigcup_{\xi<\lambda} F(\xi) + 1 = \mu\gamma\,(\forall\xi < \lambda\, F(\xi) < \gamma)$ **sup bzgl.** $<$,

wobei

$$\mu\gamma\,\varphi(\gamma) = \begin{cases} \textit{das kleinste } \gamma \textit{ mit } \varphi(\gamma), & \text{falls ein solches existiert,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beide Arten des Supremums einer Folge stimmen natürlich überein, wenn die Folge kein größtes Element hat. Wir benötigen nur den folgenden Spezialfall:

Lemma über monotone Limesfolgen

Es sei $Lim(\lambda)$ und $g : \lambda \to On$ streng monoton, also

$$\forall\xi,\eta\ (\xi < \eta < \lambda \to g(\xi) < g(\eta)).$$

Setze $\alpha := sup_{\xi<\lambda}g(\xi)$, also

$$(i) \qquad \forall\eta\ (\eta < \alpha \leftrightarrow \exists\xi < \lambda\ \eta < g(\xi)).$$

Dann gilt: $Lim(\alpha)\ \wedge\ \alpha = sup^{+}_{\xi<\lambda}g(\xi)$, also

$$(ii) \qquad \forall\eta\ (\eta < \alpha \leftrightarrow \exists\xi < \lambda\ \eta \leq g(\xi))$$

Beweis: Offensichtlich ist $\alpha \neq 0$. ferner gilt:

$$\gamma < \alpha \leftrightarrow \exists\xi < \lambda\ \gamma < g(\xi) \to \exists\xi < \lambda\ \gamma \leq g(\xi).$$

Da λ eine Limeszahl ist, so

$$\xi < \lambda \to \xi + 1 < \lambda \to g(\xi) < g(\xi + 1),$$

woraus leicht die Behauptung folgt.
(Als Voraussetzung würde genügen: $\forall \xi < \lambda \exists \eta < \lambda \; g(\xi) < g(\eta)$.) □

Hiermit ergibt sich folgende verallgemeinerte Stetigkeitseigenschaft von Normalfunktionen:

Satz über die Stetigkeit von Normalfunktionen

Es sei $Nft(F), Lim(\lambda)$ und $g : \lambda \to On$ streng monoton, $\alpha = sup_{\xi<\lambda} g(\xi)$. Dann gilt:

$$Lim(\alpha) \wedge F(\alpha) = F(sup_{\xi<\lambda} g(\xi)) = sup_{\xi<\lambda} F(g(\xi)).$$

Beweis: Aufgrund des vorigen Lemmas ist α eine Limeszahl und somit

$$\begin{array}{rcll} F(\alpha) & = & sup_{\eta<\alpha} F(\eta), & \text{d. h.} \\ \gamma < F(\alpha) & \leftrightarrow & \exists \eta < \alpha \; \gamma < F(\eta), & \text{also wegen } \alpha = sup_{\xi<\lambda} g(\xi): \\ \gamma < F(\alpha) & \leftrightarrow & \exists \eta < \alpha \exists \xi < \lambda \; (\eta < g(\xi) \wedge \gamma < F(\eta)) & \\ & \to & \exists \xi < \lambda \; \gamma < F(g(\xi)) & \\ & \to & \gamma < sup_{\xi<\lambda} F(g(\xi)). & \end{array}$$

Somit erhalten wir $F(\alpha) \subseteq sup_{\xi<\lambda} F(g(\xi))$. Umgekehrt gilt aber auch:

$$\begin{array}{ll} \forall \xi < \lambda \; g(\xi) < \alpha & \text{und somit} \\ \forall \xi < \lambda \; F(g(\xi)) \leq F(\alpha) & \text{wegen der Monotonie von } F \text{, also} \\ sup_{\xi<\lambda} F(g(\xi)) \leq F(\alpha). & \end{array}$$

□

Hiermit läßt sich nun der Satz aus 7.1 beweisen, als Beispiel wählen wir

$$(viii) \qquad \alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma :$$

Beweis: Wir nehmen $\alpha > 1$ an und zeigen die Behauptung durch Induktion über γ:

$\gamma = 0: \quad \alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma, \qquad$ da $\alpha^0 = 1$.

Der Nachfolgerfall ist ebenfalls einfach:

$$\alpha^{\beta+(\gamma+1)} = \alpha^{(\beta+\gamma)+1} = \alpha^{\beta+\gamma} \cdot \alpha = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} \cdot \alpha = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma+1}$$

nach Induktionsvoraussetzung und Definition der Operationen im Nachfolgerfall. Schließlich sei λ eine Limeszahl und nach Induktionsvoraussetzung

$$\forall \xi < \lambda \ \alpha^{\beta+\xi} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\xi}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta+\lambda} &= \bigcup_{\eta<\beta+\lambda} \alpha^{\eta}, \qquad \text{da } Lim(\beta+\lambda) \\ &= \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha^{\beta+\xi} \end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit der Normalfunktion $\delta \mapsto \alpha^{\delta}$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun

$$\alpha^{\beta+\lambda} = \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\xi} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\lambda},$$

wobei wir nochmals die Stetigkeitseigenschaft angewandt haben (und zwar für die Normalfunktion $F(\delta) = \alpha^{\beta} \cdot \delta$ und die monotone Folge $g(\xi) = \alpha^{\xi}$.) □

7.4 Fixpunkte von Normalfunktionen

Ist $F : On \to On$ eine ordinale Funktion, so heißt eine Ordinalzahl α mit $\alpha = F(\alpha)$ ein **Fixpunkt** oder eine **kritische Stelle** von F.

Existenz von Fixpunkten

Jede Normalfunktion F hat beliebig große Fixpunkte:

$$Nft(F) \to \forall \alpha \, \exists \beta \, (\alpha \leq \beta \wedge \beta = F(\beta)),$$

und zwar erhält man zu gegebenem α den nächstgrößeren Fixpunkt β *durch* ω-*fache Iteration der Funktion F, ausgehend von* α:

$$\begin{aligned} \beta &= F^{\omega}(\alpha) = \bigcup \{\alpha, F(\alpha), F(F(\alpha)), \ldots\}, \text{ also} \\ \beta &= \bigcup_{n<\omega} \beta_n, \quad \text{wobei } \beta_0 = \alpha, \ \beta_{n+1} = F(\beta_n). \end{aligned}$$

Beweis: Offenbar gilt die Behauptung im Falle $\alpha = F(\alpha)$. Anderenfalls muß aber $\alpha < F(\alpha)$ sein, und dann ist die β-Folge monoton:

$$\alpha = \beta_0 < F(\alpha) = \beta_1 < F(F(\alpha)) = \beta_2 < \ldots$$

Somit gilt aufgrund der Stetigkeitseigenschaft von F:

$$F(\beta) = \bigcup_{n<\omega} F(\beta_n) = \bigcup_{n<\omega} \beta_{n+1} = \bigcup_{n<\omega} \beta_n = \beta.$$

Es ist leicht zu sehen, daß β der kleinste Fixpunkt von F ist mit $\beta \geq \alpha$. □

Ist F eine Normalfunktion, so kann man also ihre Fixpunkte durch eine Funktion $\mathsf{D}F$, die **Ableitung** von F, unbegrenzt aufzählen:

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}F(0) &= \mu\beta\,(\beta = F(\beta)) \\
\mathsf{D}F(\gamma+1) &= \mu\beta\,(\mathsf{D}F(\gamma) < \beta \wedge \beta = F(\beta)) \\
\mathsf{D}F(\lambda) &= \mu\beta\,(\forall\xi < \lambda\ \mathsf{D}F(\xi) < \beta \wedge \beta = F(\beta))
\end{aligned}$$

Diese Funktion ist nach Definition streng monoton, und da der Limes von Fixpunkten wieder ein Fixpunkt ist: Ist

$$\forall\xi < \lambda\ \alpha_\xi = F(\alpha_\xi) \wedge \alpha = \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha_\xi, \text{ so ist auch}$$

$$\alpha = \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha_\xi = \bigcup_{\xi<\lambda} F(\alpha_\xi) = F(\bigcup_{\xi<\lambda} \alpha_\xi) = F(\alpha)$$

(und zwar wieder wegen der Stetigkeitseigenschaft von Normalfunktionen). Also erhalten wir:

Satz

Ist F eine Normalfunktion, so auch $\mathsf{D}F$*, die Ableitung von F.*

Beispiel

Die Potenzen von ω bilden eine Normalfunktion $\delta \mapsto \omega^\delta$. Ihre kritischen Stellen heißen ε-**Zahlen**, und die kleinste ε-Zahl ε_0 ist

$$\varepsilon_0 = sup\{\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots\}.$$

Dieses ist also die kleinste Zahl ε mit $\omega^\varepsilon = \varepsilon$.

Zum Abschluß erwähnen wir noch ohne Beweis die

CANTORsche Normalform

Es sei $\alpha > 1$. *Dann ist jede Ordinalzahl* β *eindeutig darstellbar in der Form*

$$\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \ldots \alpha^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1} \quad \text{mit } 0 < \delta_i < \alpha,$$
$$\gamma_0 > \gamma_1 > \ldots > \gamma_{k-1}.$$

Damit erhalten wir eine Verallgemeinerung der Dezimaldarstellung ($\alpha = 10$) der natürlichen Zahlen auf alle Ordinalzahlen. Interessant ist für Anwendungen auf transfinite Zahlen besonders die Darstellung zur Basis $\alpha = \omega$, wobei die ε-Zahlen dann die Darstellung $\varepsilon = \omega^{\varepsilon} \cdot 1$ besitzen!

Kapitel 8

Die von-Neumannsche Hierarchie

8.1 Mengeninduktion

Das Fundierungsaxiom haben wir bisher nur benutzt, um die Definition der Ordinalzahlen zu vereinfachen. Hier wollen wir es jetzt in einer neuen Bedeutung kennenlernen: jede Menge läßt sich - von der leeren Menge ausgehend - durch Bildung von Mengen von Mengen von ... darstellen. Damit erhalten wir einen stufenweisen Aufbau der Mengen, wie er bereits in der RUSSELLschen Typentheorie (s. 2.2) zum Ausdruck gekommen ist. Durch transfinite Rekursion definieren wir eine Folge von Mengen $(V_\alpha | \alpha \in On)$, indem wir mit der leeren Menge beginnen und dann die Potenzmengenoperation iterieren:

$$V_\alpha = \mathcal{P}^\alpha(\emptyset), \text{ also}: \; V_0 = \emptyset, \, V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha), \, V_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} V_\xi \text{ für } Lim(\lambda).$$

Die Mengen V_α nennt man auch VON-NEUMANNsche **Stufen**; sie sind transitiv und aufsteigend geordnet (*kumulativ*):

Lemma

(i) $trans(V_\alpha)$

(ii) $\alpha \leq \beta \rightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta$

Beweis: durch Induktion über α bzw. β. □

Die Stufen V_α sind (durch ihre Indizes) wie die Ordinalzahlen wohlgeordnet und transitiv, warum sind sie dann selbst keine Ordinalzahlen? Elemente einer Stufe

V_α sind nicht notwendig wieder Stufen, und die $\in$-Beziehung ist zwar eine Wohlordnung auf allen Stufen, nicht aber auf deren Elementen!

Um zu zeigen, daß jede Menge in einer Stufe vorkommt, benötigen wir den Begriff der **transitiven Hülle** *(transitive closure)*:

Definition

$$\begin{aligned} TC(a) :&= \bigcup_{n<\omega} h(n) \qquad \text{mit } h(0) = a,\ h(n+1) = \bigcup h(n), \text{ also} \\ TC(a) :&= U^\omega(a), \qquad \text{wobei } U(c) = \bigcup c. \end{aligned}$$

Die Bezeichnung wird gerechtfertigt durch die folgende Charakterisierung:

Lemma

$TC(a)$ ist die kleinste transitive Obermenge von a:

(i) $a \subseteq TC(a) \wedge trans(TC(a))$,

(ii) $\forall x\,(a \subseteq x \wedge trans(x) \to TC(a) \subseteq x)$.

Der einfache *Beweis* folgt aus den Eigenschaften von *trans*. □

Die Äquivalenz von Induktions- und Minimumsprinzip für Wohlordnungen 6.7 überträgt sich auf die $\in$-Beziehung:

Satz

(i) $\forall x\,[\forall y \in x\,\varphi(y) \to \varphi(x)] \to \forall x \varphi(x)$ **$\in$-Induktion**

(i') $\forall x\,[x \subseteq A \to x \in A] \to A = V$ **Mengen-Induktion**

(ii) $\exists x\,\varphi(x) \to \exists x[\varphi(x) \wedge \forall y \in x \neg\varphi(y)]$ **Fundierungsschema**

(ii') $A \neq \emptyset \to \exists x[x \in A \wedge x \cap A = \emptyset]$ **Fundierungsaxiom für Klassen**

Beweis: Alle Aussagen sind untereinander logisch äquivalent, wobei (i) und (i') Varianten voneinander sind (jeweils in Formelschema bzw. Klassenschreibweise), ebenso (ii) und (ii'), und alle folgen aus dem Fundierungsaxiom, was wir hier etwa für (ii') zeigen wollen:

Sei also $A \neq \emptyset$, etwa $a \in A$. Setze $b := A \cap TC(\{a\})$. Dann ist wegen $a \in b$: $b \neq \emptyset$, und zwar eine *Menge*, auf welche wir das Fundierungsaxiom anwenden können: es existiert ein $c \in b$ mit

$$(*) \qquad c \cap b = \emptyset.$$

$$\text{Es bleibt zu zeigen:} \quad c \in A \wedge c \cap A = \emptyset :$$

Zunächst ist $c \in A$, da $c \in b \subseteq A$. Wäre $c \cap A \neq \emptyset$, etwa $d \in c \cap A$, so $d \in A$ und wegen $d \in c \in TC(\{a\}) \wedge trans(TC(\{a\}))$ auch $d \in TC(\{a\})$, also $d \in c \cap b$ im Widerspruch zu (*)! □

Durch Mengeninduktion erhalten wir den:

Satz

$$V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$$

Beweis: Wir setzen zunächst $N := \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ und zeigen $a \subseteq N \rightarrow a \in N$:
Sei also $a \subseteq N$, d. h. $\forall x \in a\, \exists \alpha\, x \in V_\alpha$. Mittels

$$h : a \rightarrow On,\ h(x) \mapsto \mu\alpha\, x \in V_\alpha$$

wählen wir das jeweils kleinste α und bilden das Supremum dieser Menge von Ordinalzahlen:

$$\beta := \bigcup_{x \in a} h(x).$$

Dann ist also $\forall x \in a\, x \in V_{h(x)} \subseteq V_\beta$ und somit $a \subseteq V_\beta$. Damit gilt aber $a \in V_{\beta+1}$, d. h. $a \in N$. □

Bemerkung

1. Zum Beweis des obigen Satzes haben wir das Fundierungsaxiom (in Form der Mengeninduktion) benutzt; tatsächlich ist die Aussage, daß jede Menge als Element einer Stufe vorkommt, äquivalent zum Fundierungsaxiom: Es sei ZF^0 die Theorie ZF, aber ohne das Fundierungsaxiom. Definieren wir in ZF^0 den Ordinalzahlbegriff mit dem Zusatz *fund(a)*, so gelten die früheren Ergebnisse über transfinite Induktion und Rekursion in ZF^0. Bildet man nun wieder die Klasse
$$N = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha,$$

so ist $N = \{x \mid fund(x)\}$ die Klasse aller fundierten Mengen, und es gilt in ZF^0:

$$V = N \leftrightarrow \mathsf{Fund}.$$

2. Man kann zeigen, daß in N alle Axiome von ZF gelten und erhält daraus:

   Ist ZF^0 widerspruchsfrei, so auch $\mathsf{ZF} = \mathsf{ZF}^0 + \mathsf{Fund}$.

3. Mit Hilfe eines anderen *inneren Modells* kann man auch zeigen:

   Ist ZF^0 widerspruchsfrei, so auch $\mathsf{ZF}^0 + \neg\mathsf{Fund}$.

   Also ist das Fundierungsaxiom unabhängig von den übrigen Axiomen von ZF.

8.2 Mengen von Rang

Die in der Mathematik gebräuchlichen Mengen sind stets fundiert; für den Aufbau der Mengenlehre ist das Fundierungsaxiom zwar weitgehend entbehrlich, vereinfacht aber die Entwicklung der Ordinalzahltheorie. Darüber hinaus läßt es sich benutzen, um jeder Menge einen “Rang” zuzuordnen:

Definition (MIRIMANOFF 1917)

$$\rho(a) := \mu\alpha\; a \in V_{\alpha+1} \qquad \textbf{Rang von } a$$

Lemma

(i) $a \in V_\alpha \leftrightarrow \exists \xi < \alpha\; a \subseteq V_\xi$

(ii) $a \in V_\alpha \to \bigcup a \in V_\alpha \wedge \{a\}, \mathcal{P}(a) \in V_{\alpha+1}$

(iii) $a \subseteq b \in V_\alpha \to a \in V_\alpha$

(iv) $V_\alpha \cap On = \alpha$

(v) $\alpha < \beta \leftrightarrow V_\alpha \in V_\beta,\; \alpha \leq \beta \leftrightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta$

Beweis: (i) und (iv) zeigt man durch Induktion über α, (ii) folgt aus (i) und der Transitivität der V_α’s, und (iii) folgt aus (i). (v) zeigt man am einfachsten mit (iv) des folgenden Lemmas. □

Eigenschaften des Ranges

(i) $a \subseteq b \rightarrow \rho(a) \leq \rho(b)$

(ii) $a \in b \rightarrow \rho(a) < \rho(b)$

(iii) $\rho(\{a\}) = \rho(\mathcal{P}(a)) = \rho(a) + 1$

(iv) $\rho(\alpha) = \rho(V_\alpha) = \alpha$

(v) $V_\alpha = \{x | \rho(x) < \alpha\}$

(vi) $\rho(\alpha) = \bigcup_{x \in a} \rho(x) + 1 = sup^+_{x \in a} \rho(x)$

Beweis: Übungsaufgabe! □

Bemerkungen

- Wegen $\omega \subseteq V_\omega$, $\mathcal{P}(\omega) \subseteq V_{\omega+1}$, $\mathcal{P}(\omega) \in V_{\omega+2}$ kommen reelle Zahlen, Mengen und Funktionen von reellen Zahlen und alle Objekte der reellen Analysis in $V_{\omega+\omega}$ vor (sicher schon in $V_{\omega+10}$). Darüber hinaus sind die Stufen V_α transitive Mengen mit interessanten Abschlußeigenschaften:

- $a, b \in V_\alpha \rightarrow \{a\}, \{a,b\}, \mathcal{P}(a) \in V_{\alpha+1}, (a,b) \in V_{\alpha+2}$.

- Ist λ eine Limeszahl, so ist also V_λ abgeschlossen unter
  $$\{a\}, \{a,b\}, (a,b), \bigcup a, \mathcal{P}(a), a \times b$$
  und enthält mit jedem a auch jede Teilmenge $b \subseteq a$.

- $(V_\omega, \in)$ ist Modell aller Axiome von ZF, bis auf das Unendlichkeitsaxiom, das hierin falsch ist (da alle Mengen in V_ω endlich sind, s. unten 9.2).

- $(V_\lambda, \in)$ ist für Limeszahlen $\lambda > \omega$ Modell aller Axiome von ZF, bis auf das Ersetzungsaxiom,

- $HC := \{x \mid TC(x)\ abz\ddot{a}hlbar\}$ ist ein Modell aller Axiome von ZF, bis auf das Potenzmengenaxiom.

- Die Frage nach der Existenz von Ordinalzahlen α, für die $(V_\alpha, \in)$ ein Modell von ZF ist, führt zu den "großen Kardinalzahlen", deren Existenz in ZF nicht beweisbar ist ("unerreichbare" Zahlen).

Offensichtlich weisen die von-NEUMANNschen Stufen V_α gewisse "Ähnlichkeiten" mit V auf. Genauer läßt sich dieser Zusammenhang in der Form eines

Reflexionsprinzips

$$\exists\alpha[a \in V_\alpha \wedge \forall x_1 \dots x_n \in V_\alpha(\varphi^{V_\alpha}(x_1 \dots x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1 \dots x_n))]$$

ausdrücken, wobei die Formel φ^a (die *Relativierung* von φ nach a) aus φ hervorgeht, indem dort jeder Quantor Qx durch den relativierten Quantor $Qx \in a$ ersetzt wird. Somit besagt das Reflexionsprinzip, daß zu jeder Formel φ ein beliebig großes V_α existiert, das bezüglich der Eigenschaft φ sich wie die Allklasse V verhält. Man kann Reflexionsprinzipien benutzen als alternative Möglichkeit, die Theorie ZF zu axiomatisieren - bei geeigneter Formulierung machen sie alle Axiome über die Existenz von Mengen (bis auf das Aussonderungsaxiom) überflüssig und sind natürlich modelltheoretisch von besonderem Interesse (Näheres im Teil V).

8.3 Anwendungen des Ranges

Eine Einteilung aller Mengen in Äquivalenzklassen führt häufig zu echten Klassen; ein geeignetes Repräsentantensystem erhält man dann meistens nur unter Anwendung des Auswahlaxioms. Mit Hilfe des Rangbegriffes kann man sie aber auch nach SCOTT-TARSKI 1955 auf Mengen beschränken: Jeder Klasse A ordnet man die Elemente von A zu, die minimalen Rang haben:

Definition

$$A_{min} := \{x \in A \mid \forall y \in A\ \rho(x) \leq \rho(y)\}$$

Satz

(i) $a, b \in A_{min} \rightarrow \rho(a) = \rho(b)$,

(ii) $A_{min} \subseteq A\ \wedge\ A_{min} \in V$,

(iii) $A_{min} \neq \emptyset \leftrightarrow A \neq \emptyset$.

Beweis: (i) folgt aus unmittelbar aus der Definition. Ist $A \neq \emptyset$, so existiert nach dem Fundierungsaxiom für Klassen ein $a \in A$ mit $a \cap A = \emptyset$, dieses hat dann unter allen Elementen von A den minimalen Rang (es kann aber natürlich mehrere Elemente von minimalem Rang geben). Ist $\rho(a) = \alpha$, so $A_{min} \subseteq V_{\alpha+1}$ und somit eine (nichtleere) Menge. □

Definition

R ist eine **Äquivalenzrelation** auf der Klasse A gdw. $R \subseteq A \times A$ und

Ä1	$\forall x \in A \;\; xRx$	**reflexiv**
Ä2	$\forall x, y \in A \; (xRy \rightarrow yRx)$	**symmetrisch**
Ä3	$\forall x, y, z \in A \; (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$	**transitiv**

Für jedes $a \in A$ sei $[a]_R := \{x \mid xRa\}$ die **Äquivalenzklasse** von a bzgl. R und $a_R := ([a]_R)_{min}$ die entsprechende Teilmenge von minimalem Rang.

Abstraktionsprinzip (FREGE 1884, RUSSELL 1907, SCOTT 1955)

Es sei R Äquivalenzrelation auf A. Dann ist A die Vereinigung der paarweise disjunkten Äquivalenzklassen: $A = \bigcup_{a \in A} [a]_R$ *mit*

$$a \in [a]_R$$
$$[a]_R \neq [b]_R \rightarrow [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$$
$$[a]_R = [b]_R \leftrightarrow aRb.$$

Die a_R *sind immer Mengen, und für sie gilt immerhin noch:*

$$a_R \neq \emptyset, \quad a_R = b_R \leftrightarrow aRb,$$

so daß sie als Repräsentantenmengen für die Äquivalenzklassen gewählt werden können.

Kapitel 9

Die Rolle des Unendlichkeitsaxioms

Wenn man möglichst schnell und einfach das Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen erhalten will, so definiert man sie als Durchschnitt aller induktiven Mengen (und damit als kleinste induktive Menge):

$$\mathbb{N} := \bigcap\{x \mid Ind(x)\}, \quad \text{wobei}$$
$$Induktiv(a) :\leftrightarrow \emptyset \in a \land \forall y(y \in a \rightarrow y \cup \{y\} \in a).$$

Da der Durchschnitt über die leere Menge jedoch keine Menge (sondern die echte Klasse aller Mengen) ist, muß man für diesen Weg das Unendlichkeitsaxiom voraussetzen (welches gerade besagt, daß es eine induktive Menge gibt). Wir wollen jedoch - soweit möglich - dieses Axiom vermeiden und wählen daher den *Begriff* der natürlichen Zahl als "endliche" Ordinalzahl, d. h. als Ordinalzahl unterhalb der ersten Limeszahl:

$$\begin{aligned} Nz(n) : \quad &\leftrightarrow \quad Ord(n) \land (n = 0 \lor Nf(n)) \land \forall x \in n\,(x = 0 \lor Nf(x)) \\ &\leftrightarrow \quad Ord(n) \land \forall \lambda (Lim(\lambda) \rightarrow n < \lambda) \quad \textbf{natürliche Zahl} \end{aligned}$$

Da das Unendlichkeitsaxiom Un auch damit gleichbedeutend ist, daß eine Limeszahl existiert, bedeutet diese Definition:

a) Gilt Un, so ist die kleinste Limeszahl ω = *Menge* der natürlichen Zahlen.

b) Gilt $\neg$Un, existiert also keine unendliche Menge, so sind alle Mengen endlich und die natürlichen Zahlen bilden eine echte *Klasse*, die mit der Klasse *On* aller Ordinalzahlen zusammenfällt.

Für die natürlichen Zahlen als spezielle Ordinalzahlen können wir aus den jeweiligen Prinzipien für die Ordinalzahlen entsprechende Aussagen über die natürlichen Zahlen gewinnen (dabei benutzen wir für natürliche Zahlen wie üblich die Variablen n, m, k):

Induktionsprinzip $\forall n(\forall m < n\, m \in A \to n \in A) \to \forall n\, n \in A$

Induktionsschema $\varphi(0) \wedge \forall n[\varphi(n) \to \varphi(n+1)] \to \forall n\, \varphi(n)$

Minimumsprinzip $\exists n\, \varphi(n) \to \exists n[\varphi(n) \wedge \forall m < n\, \neg\varphi(m)]$

Rekursion *Sind $G, H : \mathbb{N} \times V \longrightarrow V$ Funktionen, a eine Menge, so existiert genau eine Funktion $F : \mathbb{N} \longrightarrow V$ mit*

$$\begin{aligned} F(0) &= a \\ F(n+1) &= G(n, F(n). \end{aligned}$$

9.1 Die Peano-Theorie PA

Die **Sprache** von PA enthält ein 1-stelliges Funktionszeichen $'$, zwei 2-stellige Funktionszeichen $+, \cdot$ sowie eine Individuenkonstante 0. Ähnlich wie im Falle der mengentheoretischen Sprache bilden wir hieraus die Menge der *zahlentheoretischen Formeln*, in welcher nun die

Axiome von PA formuliert werden:

P1	$x' \neq 0$	P2	$x' = y' \to x = y$
P1	$x + 0 = x$	P5	$x \cdot 0 = 0$
P4	$x + y' = (x+y)'$	P6	$x \cdot y' = x \cdot y + x$

sowie die unendlich-vielen Induktionsaxiome:

IndS $\quad \varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x')) \to \forall x\, \varphi(x)$,

wobei φ eine Formel der zahlentheoretischen Sprache ist.

Die Menge der natürlichen Zahlen ω mit $a' = a \cup \{a\}$, $0 = \emptyset$ und mit den mengentheoretisch (durch Rekursion auf den natürlichen Zahlen) definierten Operationen $+, \cdot$ (der Einfachheit halber benutzen wir hierfür dieselben Zeichen wie für die Symbole der Sprache von PA) bilden ein Modell von PA, das

Standardmodell $\quad \mathcal{N} = (\omega, ', +, \cdot, 0)$.

Modelle, die nicht isomorph zum Standardmodell sind, heißen *Nichtstandardmodelle*. Im Rahmen der Mathematischen Logik zeigt man, daß die obige Theorie sehr viele (sowohl abzählbare wie auch überabzählbare) Nichtstandardmodelle besitzt. Im Rahmen der Mengenlehre dagegen kann man das Induktionsschema IndS aber nicht nur für Aussagen der Sprache von PA, sondern für beliebige mengentheoretische Formeln nachweisen, und es läßt sich in ZF zeigen, daß das Standardmodell bis auf Isomorphie das einzige dieser (mengentheoretisch erweiterten) Axiome ist (wobei man P3 – P6 nicht einmal benötigt):

Kategorizität der mengentheoretischen PEANO-Axiome

Die Theorie $\mathsf{PA}^{(2)}$ (PEANO-Axiome 2. Stufe) besitzt folgende Axiome:

P1 $\quad \forall x\, e \neq x$

P2 $\quad \forall x \forall y (x' = y' \to x = y)$

$\mathsf{Ind}^{(2)}$ $\quad \forall X[0 \in X \wedge \forall x(x \in X \to x' \in X) \to \forall x\, x \in X]$

Die *Kategorizität* dieser Theorie besagt, daß es (bis auf Isomorphie) genau ein Modell gibt, d. h.:

Jedes Modell von $\mathsf{PA}^{(2)}$ *ist isomorph zum Standardmodell* $(\omega,',0)$.

Beweis: $\mathrm{Ind}^{(2)}$ ist ein Axiom, in welchem $\forall X$ ein Quantor 2. Stufe ist, welcher in einem Modell $(w,*,e)$ ausdrückt: *für alle Teilmengen von* w …, d. h. dieses Axiom entspricht dem mengentheoretische Induktionsprinzip.

Es sei nun also $(w,^*,e)$ ein Modell von $\mathsf{PA}^{(2)}$, d.h.

(1) $e \neq x^*$ für alle $x \in w$,

(2) $x^* = y^* \to x = y$ für alle $x, y \in w$,

(3) $e \in v \wedge \forall x(x \in v \to x^* \in v) \to w \subseteq v$ für alle Mengen $v \subseteq w$.

Der gesuchte Isomorphismus ist eine Abbildung $f : \omega \longleftrightarrow w$ mit

$$f(0) = e \wedge \forall n \in \omega\, f(n') = f(n)^*.$$

Der Rekursionssatz für die natürlichen Zahlen liefert ein (sogar eindeutig bestimmtes) f mit dieser Eigenschaft; zu zeigen bleibt also nur noch die Bijektivität:

f ist surjektiv: Sei $v := W(f) = \{f(n) \mid n \in \omega\}$. Dann folgt aus den rekursiven Bedingungen für f:

$$e \in v \wedge \forall x(x \in v \rightarrow x^* \in v),$$

also nach (3): $w \subseteq v$ und damit $w = v$, d. h. f ist surjektiv.

f ist injektiv, d. h.

$$(i) \quad m \neq n \rightarrow f(m) \neq f(n).$$

Zunächst zeige man durch Induktion über m, daß jede von 0 verschiedene Zahl einen Vorgänger besitzt:

$$(ii) \quad m \neq 0 \rightarrow \exists n(m = n')$$

und dann (i) durch Induktion über n:

1. Sei $n = 0$ und $n \neq m$. Dann ist $m \neq 0$, also nach (i) $m = k'$ für ein k und damit $f(0) = e \neq f(m) = f(k)^*$ nach (2).

2. Sei (i) bewiesen für n (und alle m), $m \neq n'$. Falls $m = 0$, schliessen wir wie oben auf $f(m) \neq f(n')$. Falls $m \neq 0$, so ist wieder $m = k'$ für ein k. Aus $m = k' \neq n'$ folgt wegen (P2) $k \neq n$ und damit nach Induktionsvoraussetzung $f(k) \neq f(n)$.

□

9.2 Die Theorie der endlichen Mengen

Bezeichnet ZF_{fin} die Theorie ZF, in welcher das Unendlichkeitsaxiom durch seine Negation ersetzt ist, so kann man sie als *Theorie der endlichen Mengen* auffassen; $(V_\omega, \in)$ ist "das Standardmodell" dieser Theorie. Diese ist ebenso "stark" wie die PEANO-Arithmetik PA, d. h. sie lassen sich wechselweise ineinander interpretieren, und damit ist insbesondere ZF ohne das Unendlichkeitsaxiom genau dann widerspruchsfrei, wenn die PEANO-Arithmetik widerspruchsfrei ist:

- Wie oben bemerkt, kann man in ZF *ohne* Unendlichkeitsaxiom die natürlichen Zahlen (als Klasse) definieren und die arithmetischen Operationen der Addition und Multiplikation auf den natürlichen Zahlen (mittels des Rekursionssatzes) definieren, so daß hierfür die PEANO-Axiome gelten,

- umgekehrt kann man (nach W. ACKERMANN) in der Theorie PA endliche Mengen durch Zahlen kodieren und eine entsprechende $\in$-Beziehung so definieren, daß hierfür die Axiome von ZF_{fin} gelten.
- In ZF ohne Unendlichkeitsaxiom (oder einer geeigneten Erweiterung von PA zur Theorie 2. Stufe) kann man auch eine eingeschränkte Analysis betreiben; um aber etwa die Gesamtheit der reellen Zahlen zur Verfügung zu haben, benötigt man das Unendlichkeitsaxiom.

9.3 Anwendungen der numerischen Rekursion

Als Spezialfall des Rekursionstheorems für die natürlichen Zahlen erhalten wir die Möglichkeit, Funktionen zu iterieren und damit Mengen zu erhalten, die unter vorgegebenen Funktionen abgeschlossen sind:

Satz über die Iteration und den Abschluß

(i) *Zu jeder Funktion F und jeder Menge a gibt es eine Funktion*

$$H : \mathbb{N} \times V \longrightarrow V \;\; mit$$
$$H(0,a) = a, \; H(n+1,a) = F(H(n,a)).$$

Wir nennen H auch die **Iteration von** F **mit dem Anfangswert** a und schreiben auch $F^n(a)$ für $H(n,a)$.

(ii) *Zu jeder Funktion F und jeder Menge a gibt es eine Obermenge b von a, die unter F abgeschlossen ist:*

$$\exists y (a \subseteq y \land \forall x \in y \, F(x) \in y)$$

Beweis von (ii): Zu gegebenem F und der Ausgangsmenge a definiere durch Rekursion eine Funktion G mit den Eigenschaften

$$G(0) = a, \quad G(n') = \{F(x) \mid x \in G(n)\} \quad \text{und setze} \quad b := \bigcup_{n \in \omega} G(n).$$

Dann ist offensichtlich $a \subseteq b \land \forall x \in b \; F(x) \in b$, und zwar ist b die kleinste derartige Menge, die **Hülle** oder der **Abschluß** von a unter der Abbildung F. $\square$

Für viele Anwendungen gut zu benutzen ist das

Hüllenaxiom (HS) $\exists y (a \subseteq y \land \forall x \in y \, F(x) \in y)$.

Satz

Unter der Voraussetzung der übrigen Axiome von ZF *(einschließlich des Aussonderungsschemas) ist das*

Ersetzungsaxiom + Unendlichkeitsaxiom *äquivalent zum* Hüllenaxiom.

Beweis: HS haben wir in obigem Satz in ZF gezeigt. Umgekehrt folgt aus HS das Unendlichkeitsaxiom (mit $a = \emptyset$ und $F(x) = x'$) und ähnlich das Ersetzungsaxiom, indem es für eine Funktion F und eine Menge a zunächst eine Obermenge $b \supseteq a$ mit $\{F(x) \mid x \in b\} \subseteq b$ liefert, für die dann aber $\{F(x) \mid x \in a\}$ als Teilklasse von b eine Menge nach dem Aussonderungsaxiom ist. □

Anwendungen des Hüllenaxioms

1. Ähnlich wie wir ω als (kleinste) Ordinalzahl erhalten können, die > 0 ist und unter $'$ abgeschlossen ist, erhalten wir zu jeder Ordinalzahl α eine (nächstgrößere) Limeszahl $\lambda > \alpha$, aber auch Ordinalzahlen $> \alpha$, die unter arithmetischen Operationen abgeschlossen sind:
   $\forall \xi, \eta < \gamma \quad \xi + \eta < \gamma$ bzw. die **ε-Zahlen:** $\forall \xi < \varepsilon\ 2^{\xi} < \varepsilon$, usw.
   (In ähnlicher Weise haben wir Fixpunkte für Normalfunktionen erhalten, s. 7.4.)

2. Die Existenz der transitiven Hülle $TC(a)$ einer Menge a folgt unmittelbar aus HS (in 8.1 haben wir sie durch durch ω-Iteration gebildet).

3. Eine Menge ist **endlich** gdw sie sich auf die Zahlen $\{0, \ldots, n\}$ für eine natürliche Zahl n abbilden läßt,

   $HF := \{x \mid TC(x) \text{ } endlich\}$ ist die Klasse der **erblich-endlichen** Mengen.

   Sie läßt sich auch beschreiben durch $HF = V_\omega$ und ist somit eine Menge (wobei man wesentlich das Unendlichkeitsaxiom benutzt - dagegen ist die Klasse aller endlichen Mengen stets eine echte Klasse).

4. Mit Hilfe der von-NEUMANNschen Stufenhierarchie kann man die folgenden Verstärkungen des Hüllenaxioms erhalten:

   $$\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y, \ldots) \rightarrow \exists \alpha\, \forall x \in V_\alpha\, \exists y \in V_\alpha\, \varphi(x, y, \ldots), \text{ bzw.}$$
   $$\forall x \in a\, \exists y\, \varphi(x, y, \ldots) \rightarrow \exists u\, (a \subseteq u \wedge \forall x \in a\, \exists y \in u\, \varphi(x, y, \ldots)),$$

   welche sich (in engem Zusammenhang mit den Reflexionsprinzipien) auch zur Axiomatisierung von ZF verwenden lassen (s. Teil V).

Teil III

Mengen auswählen

Kapitel 10

Das Auswahlaxiom

steht am Anfang der Entwicklung einer axiomatischen Mengenlehre: ZERMELO stellte sein Axiomensystem in Zusammenhang mit seinem zweiten Beweis des Wohlordnungssatzes dar, und bis heute ist es wohl das interessanteste Axiom geblieben wegen seiner Auswirkungen nicht nur für die Mengenlehre, sondern auch für fast alle Gebiete der Mathematik.[1] In seiner einfachsten Form besagt es, daß das Produkt einer Menge nicht-leerer Mengen wiederum nicht leer ist (RUSSELL 1906: *multiplicative axiom*):

Auswahlaxiom: $(\mathsf{AC}, 1904/08) \quad \forall x \in a\, x \neq \emptyset \rightarrow \prod_{x \in a} x \neq \emptyset,$

d. h. $\forall x \in a\, x \neq \emptyset \rightarrow \exists f (Fkt(f) \wedge D(f) = a \wedge \forall x \in a\, f(x) \in x)$
(ein solches f heißt **Auswahlfunktion** für die Menge a.)

Das AC ist unabhängig von den übrigen ZF-Axiomen:
Ist ZF_0 ($= \mathsf{ZF}$ ohne Fundierungsaxiom) widerspruchsfrei, so auch

$\mathsf{ZF}_0 + \neg\mathsf{AC}$ (FRAENKEL 1922),
$\mathsf{ZF} + \mathsf{AC}$ (GÖDEL 1938),
$\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{AC}$ (COHEN 1963).

Im Gegensatz zu den anderen mengentheoretischen Axiomen fordert es die Existenz einer Menge, ohne sie zu definieren oder auch nur einen Hinweis für eine mögliche Beschreibung zu bieten. Ähnlich ist es im Falle des Fundierungsaxioms, dafür hat aber das Auswahlaxiom zahlreiche Anwendungen, besitzt aber auch verschiedene

[1] Zur Geschichte und Problematik des Auswahlaxioms s. das Buch von G.H. MOORE: *Zermelo´s axiom of choice,* Springer 1982

10.1 Mengentheoretisch äquivalente Formen

AC2 $\forall x \in a\, F(x) \neq \emptyset \to \prod_{x \in a} F(x) \neq \emptyset$

AC2´ $\forall x \in a\, \exists y\, \varphi(x,y) \to \exists f[Fkt(f) \wedge D(f) = a \wedge \forall x \in a\, \varphi(x, f(x))]$
(ein solches f heißt **Auswahlfunktion** für φ)

AC3 $\forall x \in a\, x \neq \emptyset \wedge \forall x,y \in a(x \neq y \to x \cap y = \emptyset) \to \exists z \forall x \in a \exists! u\, u \in z \cap x$
(ein solches z heißt **Auswahlmenge** für die nicht-leeren, disjunkten Mengen in a; $\exists! u \ldots$ = es existiert genau ein $u \ldots$)

AC3´ r Äquivalenzrelation auf $a \to \exists z \forall x \in a \exists! u\, (x,u) \in r$
(jede Äquivalenzrelation besitzt ein Repräsentantensystem)

AC4 $Fkt(f) \to \exists g(Fkt(g) \wedge g : W(f) \rightarrowtail D(f) \wedge g \subseteq f^{-1})$
(jede Funktion besitzt eine Umkehrfunktion; $f^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$)

AC5 $Rel(r) \to \exists f(Fkt(f) \wedge D(f) = D(r) \wedge f \subseteq r)$

Der *Beweis* dieser Aussagen aus dem Auswahlaxiom beruht darauf, daß man in allen diesen Fällen eine Auswahl in Abhängigkeit von den Elementen einer *Menge* treffen muß (dabei benötigt man für AC2´ das Fundierungsaxiom, um den Bereich der möglichen y auf eine genügend große Menge V_α einschränken zu können). Umgekehrt sind die obigen Auswahlprinzipien allgemein genug, um hieraus das ursprüngliche AC zu folgern. □

10.2 Der Zermelosche Wohlordnungssatz

Das Auswahlaxiom, AC*, ist äquivalent zum Wohlordnungssatz:*

WO1 $\forall x \exists r(r \textit{ ist Wohlordnung auf } x)$,

bzw.

WO2 $\forall x \exists f \exists \alpha(f : \alpha \longleftrightarrow x)$,

d. h. jede Menge a läßt sich aufzählen:

$$a = \{a_\xi | \xi < \alpha\} \textit{ für ein } \alpha \textit{ und eine Folge } (a_\xi \xi < \alpha).$$

Beweis: Ist r Wohlordnung auf a, so isomorph zur $\in$-Beziehung auf einer Ordinalzahl α (nach 6.6 (i)), somit $\mathsf{WO1} \Rightarrow \mathsf{WO2}$. Ist umgekehrt $f : a \longleftrightarrow \alpha$ für eine Ordinalzahl α, so kann man auf a eine Wohlordnung r definieren durch

$$xry \iff f(x) \in f(y),$$

wodurch die natürliche Wohlordnung auf α auf die Menge a übertragen wird. Also gilt auch $\mathsf{WO2} \Rightarrow \mathsf{WO1}$.

$\mathsf{WO1} \Rightarrow \mathsf{AC}$: Ist eine Menge wohlgeordnet, so kann man aus ihren Elementen eine Auswahl treffen, indem man das kleinste Element (bezüglich der Wohlordnung) auswählt: Sei $\forall x \in a\, x \neq \emptyset$. Nach WO1 gibt es eine Wohlordnung $<$ auf $\bigcup a$. Damit kann man eine Auswahlfunktion f definieren durch

$$f(x) = \text{das kleinste (bzgl. } <) \ y \in x \text{ für } x \in a.$$

$\mathsf{AC} \Rightarrow \mathsf{WO1}$: Sei $a \neq \emptyset$. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Funktion

$$f : \mathcal{P}(a) - \{\emptyset\} \longrightarrow V \ \text{ mit } \forall x \subseteq a\, (x \neq \emptyset \rightarrow f(x) \in x).$$

Damit können wir rekursiv eine Aufzählung G von a definieren:

$$G(\alpha) = \begin{cases} f(a - \{G(\xi) \mid \xi < \alpha\}), & \text{falls } a - \{G(\xi) \mid \xi < \alpha\} \neq \emptyset \\ a, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) $a \notin \{G(\xi) \mid \xi < \alpha\} \rightarrow G \restriction \alpha$ ist injektiv: Für $\gamma < \alpha$ ist

$$G(\gamma) = f(a - \{G(\xi) \mid \xi < \gamma\}) \in a - \{G(\xi) \mid \xi < \gamma\},$$

also $G(\gamma) \neq G(\xi)$ für alle $\xi < \gamma$.

(ii) $a \in W(G)$,

denn anderenfalls wäre $G : On \longrightarrow a$ nach (i) eine injektive Funktion, und damit a keine Menge! Es gibt also ein α mit $G(\alpha) = a$, welches wir minimal wählen. Dann ist $G \restriction \alpha : \alpha \longrightarrow a$ injektiv. Es bleibt zu zeigen:

(iii) $G \restriction \alpha : \alpha \longrightarrow a$ ist surjektiv.

Wäre nämlich $W(G \restriction \alpha) \subset a$, so $G(\alpha) = f(a - \{G(\xi) \mid \xi < \alpha\}) \in a$ im Widerspruch zur Definition von α!

□

Bemerkung

Der Wohlordnungssatz besagt, daß jede Menge eine Wohlordnung besitzt, ohne (wie schon im Falle des Auswahlaxioms und ähnlich auch für die folgenden Maximumsprinzipien) konkret eine Wohlordnung anzugeben. *Endliche* Mengen lassen sich leicht wohlordnen (man braucht sie ja nur zu ordnen) und alle Wohlordnungen sind in diesem Falle isomorph. Im Falle *unendlicher* Mengen dagegen gibt es (wenn überhaupt!) stets verschiedene Wohlordnungen, wenn auch für jede Wohlordnung ihr Ordnungstyp eindeutig bestimmt ist.

10.3 Maximumsprinzipien von Zorn und Hausdorff

Diese Prinzipien formulieren wir am besten für reflexive Ordnungen:

Eine (reflexive) **teilweise Ordnung** auf A ist eine 2-stellige Relation R auf A, für die gilt:

(a) $\forall x \in A \quad xRx$ **reflexiv**,
(b) $\forall x, y, z \in A\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$ **transitiv**,
(c) $\forall x, y \in A\ (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$ **antisymmetrisch**.
(d) $K \subseteq A$ heißt R-**Kette:** $\leftrightarrow \forall x, y \in K\ (xRy \vee yRx)$,
d.h. je zwei Elemente aus K sind bzgl. R vergleichbar;
(e) $a \in A$ heißt R-**obere Schranke** von $B \subseteq A :\leftrightarrow \forall x \in B\ xRa$,
$a \in A$ heißt R-**maximal:** $\leftrightarrow \forall x \in A\ (aRx \rightarrow a = x)$.

Ein maximales Element besitzt also kein echt größeres, braucht aber nicht das größte Element zu sein (zumindest nicht in einer teilweisen Ordnung).

HAUSDORFFsches Maximumsprinzip ($\mathsf{H}, 1914$)

r sei teilweise Ordnung auf der Menge a. Dann gibt es eine (bzgl. $\subseteq$) maximale r-Kette k, d. h. ein $k \subseteq a$ mit: k ist r-Kette $\wedge \forall y$ (y r-*Kette* $\wedge\ k \subseteq y \rightarrow k = y$).

ZORNsches Lemma ($\mathsf{ZL}, 1935$)

r sei teilweise Ordnung auf der Menge a mit der Eigenschaft

(*) *jede r-Kette besitzt eine r-obere Schranke.*

Dann hat a ein maximales Element (bzgl. r).

Diese beiden Aussagen sind äquivalent zum Auswahlaxiom:

Beweis von WO $\Rightarrow$ H: r sei partielle Ordnung auf a, $a = \{a_\xi | \xi < \alpha\}$ sei wohlgeordnet. Wir definieren eine Teilmenge $\{b_\xi | \xi < \alpha\}$ von a durch Rekursion wie folgt:

$$b_\beta = \begin{cases} a_\beta & \text{falls } \{b_\xi | \xi < \beta\} \cup \{a_\beta\} \ r\textit{-Kette}, \\ a_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir eine maximale r-Kette $\{b_\xi | \xi < \alpha\}$ (mit $b_0 = a_0$).

H $\Rightarrow$ ZL: Sei r partielle Ordnung auf a, die (*) erfüllt. Nach H existiert eine maximale r-Kette $k \subseteq a$. Eine obere Schranke von k ist dann ein maximales Element (sonst könnte man k echt erweitern).

ZL $\Rightarrow$ AC: Sei $a \neq \emptyset$ und $\forall x \in a\, x \neq \emptyset$. Setze

$$B := \{f \mid \exists y \subseteq a(f : y \to \bigcup a \wedge \forall x \in y\, f(x) \in x)\}.$$

Jedes Element von B ist eine partielle Auswahlfunktion und Teilmenge von $a \times \bigcup a$, damit ist auch B als Menge $b \subseteq \mathcal{P}(a \times \bigcup a)$ abschätzbar. Als teilweise Ordnung auf $B = b$ wählen wir $r = \subseteq$ -Beziehung. Für jede r-Kette k ist dann $\bigcup k$ eine obere Schranke, und ein nach dem ZORNschen Lemma maximales Element in B ist dann eine Auswahlfunktion für a . □

Bemerkungen

- Aus obigem Beweis läßt sich ablesen, daß H sogar allgemeiner gilt: jede partielle Ordnung r auf a besitzt für jedes $b \in a$ eine r-Kette k mit $b \in k$.

- Das ZORNsche Lemma ist offenbar trivial, wenn r eine lineare Ordnung auf a ist, weil dann a selbst schon eine Kette ist. Daher kann man Anwendungen von ZL nur für teilweise Ordnungen erwarten. Wie in obigem Beweis ist häufig diese Ordnung die $\subseteq$ -Beziehung, und meistens kann man (*) in diesem Fall nachweisen, indem man zeigt, daß

  $$\text{für jede } \subseteq\text{-Kette } k\text{: } \bigcup k \in a.$$

  (Dann ist $\bigcup k$ nämlich eine obere Schranke.)

- Für Anwendungen benötigt man gelegentlich nur abgeschwächte Formen des Auswahlaxioms:

Auswahlaxiom für abzählbare Mengen: (AC_ω)

$$\forall n \in \omega\, a_n \neq \emptyset \to \exists f(D(f) = \omega \wedge \forall n \in \omega\, f(n) \in a_n),$$

Axiom der abhängigen Auswahl: (DC, *dependent choice*)

$$Rel(R) \wedge a_0 \in a \,\wedge\, \forall x \in a\, \exists y \in a\, xRy$$
$$\to \exists f[f : \omega \longrightarrow a \,\wedge\, f(0) = a_0 \,\wedge\, \forall n < \omega\, f(n)Rf(n+1)]$$

Es gilt: $\mathsf{AC} \to \mathsf{DC}, \mathsf{DC} \to \mathsf{AC}_\omega$ (aber die Umkehrungen sind nicht beweisbar).

Das AC_ω wird vielfach in der Analysis benutzt (s.u.), insbesondere auch für die Aussage, daß die Vereinigung abzählbar-vieler abzählbarer Mengen wiederum abzählbar ist. DC benötigt man z. B. für die Äquivalenz verschiedener Endlichkeitsdefinitionen sowie zum Beweis, daß die Minimalitätsbedingung der Fundiertheit (s. F1 von 6.1.3)

$$\mathsf{F1} \quad \forall z\,(\emptyset \neq z \subseteq A \to \exists x \in z\, \forall y \in z\; y \not< x)$$

äquivalent ist zur Aussage, daß es keine unendlich-absteigenden $<$-Ketten gibt:

$$\mathsf{F11} \quad \neg\exists f(f : \omega \longrightarrow V \,\wedge\, \forall n < \omega\, f(n+1) < f(n))$$

(dabei benötigt man gerade das DC, um F11 → F1 zu zeigen, während die umgekehrte Richtung auch ohne DC beweisbar ist).

10.4 Anwendungen des Auswahlaxioms

Jeder K-Vektorraum besitzt eine Basis.

K sei ein Körper, V ein Vektorraum über dem Körper K, V und K seien Mengen (hier also V nicht Klasse aller Mengen!). Wir wenden zum Beweis das ZORNsche Lemma an und wählen

$$P := \{b \mid b \text{ Menge von linear unabhängigen Vektoren} \subseteq V\}, \leq := \subseteq \text{ auf } P.$$

Dann ist $\leq$ eine partielle Ordnung auf der Menge P, und für jede Kette $k \subseteq P$ ist $\bigcup k$ eine obere Schranke von k in P. Nach dem ZORNschen Lemma existiert also ein maximales Element in P; eine maximale linear unabhängige Menge von Vektoren ist aber eine Basis.

Bemerkungen

1. A. Blass: *Existence of bases implies AC*, Contempory Math., Axiomatic Set Theory, AMS 31 (1983)) hat gezeigt, daß auch die Umkehrung gilt: Hat jeder Vektorraum eine Basis besitzt, so gilt das Auswahlaxiom.

2. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann man auch als (unendlich-dimensionalen) Vektorraum über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ auffassen, eine Basis nennt man in diesem Fall eine HAMEL-*Basis*. Aus der Existenz einer HAMEL-Basis folgt nun aber insbesondere die Existenz einer Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle reellen x, y; f ist zwar $\mathbb{Q}$-linear, aber nicht $\mathbb{R}$-linear. Tatsächlich kann f unstetig sein, und es ist sogar möglich, daß $W(f) \subseteq \mathbb{Q}$!

Der Satz von Hahn-Banach

(s. Bücher über Funktionalanalysis)

Nicht-meßbare Mengen

Es existiert eine Menge reeller Zahlen, die nicht Lebesgue-meßbar ist. (VITALI 1905)

Beweis: Die *Lebesgue-meßbaren* Mengen bilden eine Teilmenge $L \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, auf welcher das *Lebesgue-Maß* definiert ist als Abbildung

$$m : L \longrightarrow \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} \cup \{\infty\},$$

so daß gilt:

(L1) L enthält die offenen und abgeschlossenen Intervalle:
$(a,b), [a,b] \in L$ für alle reellen Zahlen $a < b$, und es ist $m([a,b]) = b - a$.

(L2) L ist ein *Mengenring*, d. h. $A, B \in L \rightarrow A \cup B, A \cap B, A - B \in L$.

(L3) $A \subseteq B \rightarrow m(A) \leq m(B)$. *Monotonie*

(L4) Ist $(A_i | i < \omega)$ eine abzählbare Folge von Mengen $\in L$, so ist auch $\bigcup_{i<\omega} A_i \in L$, und falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so
$m(\bigcup_{i<\omega} A_i) = \sum_{i<\omega} m(A_i)$, *$\sigma$-Additivität*

(L5) $A \in L \wedge r \in \mathbb{R} \rightarrow A + r = \{a + r \mid a \in A\} \in L$
und $m(A) = m(A + r)$. *Translationsinvarianz*

Auf $[0,1]$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$x \sim y :\leftrightarrow x, y \in [0,1] \;\wedge\; x - y \in \mathbb{Q}.$$

Nach dem Auswahlaxiom in der Form (AC3´) existiert hierzu ein Repräsentantensystem S, d. h.

$$S \subseteq [0,1] \;\wedge\; \forall x \in [0,1]\; \exists! y \in S\; (x \sim y).$$

Setzen wir $S_r := \{x + r \mid x \in S\} = S + r$, so ist $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r$, und es ist

$$S_r \cap S_t = \emptyset \quad \text{für } r, t \in \mathbb{Q},\; r \neq t.$$

Wäre S Lebesgue-meßbar, also $S \in L$, so erhielte man im Falle $m(S) = 0$: $m(\mathbb{R}) = 0$, und im Falle $m(S) > 0 : 2 = m([0,2]) = \infty$, Widerspruch! Somit ist die Menge S nicht Lebesgue-meßbar. □

Äquivalenz verschiedener Stetigkeitsdefinitionen

Für $x \in \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ wird die ε-*Umgebung* von x definiert durch

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\}.$$

1. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ definiert man die *abgeschlossene Hülle* von A durch

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} : \;&\leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{bzw.} \\ &\leftrightarrow\; x = lim_{n \to \infty} x_n \textit{ für eine Folge } (x_n)_{n<\omega} \textit{ mit } \forall n < \omega\; x_n \in A. \end{aligned}$$

2. Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann definiert man (ε, δ bezeichnen hier reelle Zahlen)
   f stetig in x:

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall y \in \mathbb{R}\; (|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \quad \text{bzw.} \\ &\leftrightarrow\; f(x) = lim_{n \to \infty} f(x_n) \textit{ für alle Folgen } (x_n)_{n<\omega} \textit{ mit } x = lim_{n<\infty} x_n. \end{aligned}$$

Um die Äquivalenz der jeweiligen Definitionen zu zeigen, benötigt man (in jeweils einer Richtung) das Auswahlaxiom - tatsächlich genügt hier das AC_ω, da man sich auf die abzählbar-vielen ε-Werte $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ beschränken kann.

Satz von TYCHONOFF

Das Produkt quasi-kompakter Räume ist quasi-kompakt.

(Diese Aussage ist äquivalent zum Auswahlaxiom.)

BOOLEsches Primidealtheorem

Eine **BOOLEsche Algebra** ist ein Modell $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ der BOOLEschen Gesetze, die wir in 3.3 für die mengentheoretischen Operationen formuliert haben. Um den trivialen Fall auszuschließen, fügen wir noch $\emptyset \neq V$ als Axiom hinzu, so daß stets $0 \neq 1$ gilt und die kleinste BOOLEschen Algebra aus zwei Elementen besteht.

Beispiele und Bemerkungen

1. Für eine nicht-leere Menge M ist $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, -, \emptyset, M)$ eine BOOLEsche Algebra, die *Potenzmengenalgebra* von M. Eine Unteralgebra davon, definiert also auf einer Teilmenge $B \subseteq \mathcal{P}(M)$, die $\emptyset$ und M enthält und abgeschlossen ist unter den Mengenoperationen $\cap, \cap, -$, heißt *Mengenalgebra*.

2. Jede endliche BOOLEschen Algebra ist isomorph zu einer Potenzmengenalgebra und hat damit 2^n Elemente für eine natürliche Zahl n. Die Menge $\{x \subseteq \mathbb{N} \mid x \textit{ endlich oder } \mathbb{N} - x \textit{ endlich}\}$ mit den üblichen mengentheoretischen Operationen ist eine abzählbare BOOLEsche Algebra, die aber nicht zu einer Potenzmengenalgebra isomorph sein kann.

3. Es gibt zahlreiche Beispiele BOOLEscher Algebren, die keine Mengenalgebren sind. Diese lassen sich am besten mit topologischen Hilfsmitteln beschreiben; aber es gibt auch natürliche Beispiele aus der Logik:

Die LINDENBAUM-Algebra einer Theorie T

Für eine Theorie T und eine Aussage σ in der Sprache $\mathcal{L}$ dieser Theorie kann man einen *Folgerungsbegriff* erklären: $\mathsf{T} \vdash \sigma$ bedeute: $\boldsymbol{\sigma}$ **folgt aus** (den Axiomen von) T. Damit erhält man eine Äqivalenzrelation

$$\varphi \sim_{\mathsf{T}} \psi :\Longleftrightarrow \mathsf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi,$$
$$L(\mathsf{T}) := \{[\sigma]_{\mathsf{T}} \mid \sigma \ \mathcal{L}\text{-Satz}\}$$

sei die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen. Den aussagenlogischen Operationen entsprechen dann Operationen auf $L(\mathsf{T})$:

$$[\varphi]_{\mathsf{T}} \wedge [\psi]_{\mathsf{T}} := [\varphi \wedge \psi]_{\mathsf{T}}$$

und ähnlich für die übrigen Operationen. Damit wird $L(\mathsf{T})$ zu einer BOOLEschen Algebra mit

$$0 = \{\sigma \mid \mathsf{T} \vdash \neg\sigma\} \text{ und } 1 = \{\sigma \mid \mathsf{T} \vdash \sigma\}.$$

Ein **Filter** einer BOOLEsche Algebra $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ ist eine nichtleere Teilmenge $F \subseteq B$ mit folgenden Eigenschaften:

(F1) $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$,

(F2) $x \in F,\ y \in B \Rightarrow x \vee y \in F$.

Ein Filter F heißt **echt** gdw $F \neq B$. Ein **Primfilter (Ultrafilter)** ist ein echter Filter F mit der zusätzlichen Eigenschaft

(U) $x \in F$ oder $-x \in F$.

Ultrafilter kann man auch als maximale echte Filter charakterisieren; sie haben außerdem folgende Eigenschaften:

$$\begin{array}{rcl} x \notin U & \Leftrightarrow & -x \in U \\ x \in U \text{ und } y \in U & \Leftrightarrow & x \wedge y \in U \\ x \in U \text{ oder } y \in U & \Leftrightarrow & x \vee y \in U \end{array}$$

und stehen damit in enger Verbindung zum Wahrheitsprädikat, was in dem folgenden Satz zum Ausdruck kommt.

Das **BOOLEsche Primidealtheorem (BPI)** besagt:
Jeder echte Filter in einer BOOLE*schen Algebra läßt sich zu einem Ultrafilter erweitern* (bzw.: *Jedes echte Ideal in einer* BOOLE*schen Algebra läßt sich zu einem Primideal erweitern.*)

(Die Begriffe **Ideal** und **Primideal** sind die zu **Filter** und **Ultrafilter** dualen Begriffe (vertausche $\vee$ mit $\wedge$).)

Das BPI folgt offensichtlich aus dem Auswahlaxiom (mittels des ZORNschen Lemmas), ist aber echt schwächer.

Satz

Das BPI *ist äquivalent zu folgenden Aussagen:*

(i) *Jede* BOOLE*sche Algebra besitzt einen Ultrafilter.*

(ii) STONEscher Repräsentationssatz: *Jede* BOOLE*sche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.*

(iii) *Satz von* TYCHONOFF *für T_2-Räume*

(iv) *Vollständigkeitssatz für formale Sprachen erster Stufe*

(v) *Kompaktheitssatz für formale Sprachen erster Stufe*

Weitere Abschwächungen des Auswahlaxioms sind:

Ordnungserweiterungsprinzip (OE)

Jede partielle Ordnung läßt sich zu einer linearen Ordnung erweitern.

Ordnungsprinzip (OP)

Jede Menge besitzt eine lineare Ordnung.

Es gilt: $\mathsf{AC} \Rightarrow \mathsf{BPI} \Rightarrow \mathsf{OE} \Rightarrow \mathsf{OP}$ (ohne Umkehrungen).

Eine weitere interessante Folgerung aus dem Auswahlaxiom ist das Paradox von HAUSDORFF, BANACH und TARSKI:

Wagon, S.: *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge 1986
French, R. M.: *The Banach-Tarski theorem.* Math. Intell. 10 (1988), 21-28
Kirsch, A.: *Das Paradox von Hausdorff, Banach und Tarski. Kann man es verstehen?* Math. Semesterberichte 37,2 (1990), 216-239

Viele weitere Ergebnisse und eine Übersicht findet man in dem bereits erwähnten Buch

Moore, G. H.: *Zermelo´s Axiom of Choice.* Springer 1982.

Schließlich seien noch erwähnt:

Kanamori, A.: *The mathematical import of Zermelo´s well-ordering theorem*
Bull. Symb. Logic 3,3 (1997), 281-311
Keremides, K.: *Disasters in topology without the axiom of choice*
Archiv Math. Logik 40,8 (2001), 569-580

Teil IV

Die Größe der Mengen

Kapitel 11

Mächtigkeiten und Kardinalzahlen

Grundlegend für die Theorie der Kardinalzahlen ist der Begriff der *Mächtigkeit* einer Menge. Zunächst definieren wir, wann zwei Mengen *gleichmächtig* sind:

$$a \sim b :\leftrightarrow \exists f(f : a \longleftrightarrow b) \qquad \textbf{gleichmächtig}$$

11.1 Endliche und abzählbare Mengen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Begriff des *Endlichen* zu erfassen; da man hierbei auch das *Unendliche* definiert, ist der Begriff keineswegs trivial, was sich auch darin zeigt, daß die verschiedenen Definitionen oft erst mit Hilfe des Auswahlaxioms als äquivalent nachgewiesen werden können (s. (iv) des folgenden Satzes).

1. Der übliche Begriff der *endlichen* Menge greift auf die natürlichen Zahlen zurück:

Eine Menge a ist **endlich** gdw ihre Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen von 0 bis $n-1$ für ein n abgezählt werden können. Da nach unserer Festlegung $\{0,1,\ldots,n-1\} = n$ ist, so haben wir eine besonders einfache Definition:

$$\begin{array}{rrcl} a & \text{endlich}: & \leftrightarrow & \exists n < \omega\ (a \sim n), \\ a & \text{unendlich}: & \leftrightarrow & \neg\, a \text{ endlich}. \end{array}$$

Ist a endlich, so ist die natürliche Zahl n mit $a \sim n$ (die man durch Abzählen bestimmt) eindeutig festgelegt und gibt die *Anzahl* der Elemente von a an - für unendliche Mengen gilt dies aber nicht mehr!

2. Von WHITEHEAD-RUSSELL stammt die folgende Definition, die den Zahlbegriff vermeidet:

Eine Menge $u \subseteq \mathcal{P}(a)$ heißt *induktive Familie von Teilmengen von a* gdw

$$\emptyset \in u \wedge \forall x \in u\, \forall y \in a\; x \cup \{y\} \in u,$$

d. h. u enthält die leere Menge und mit jeder Menge x auch die um ein Element aus a erweiterte Menge. Definiere:

$$a \text{ endlich} :\leftrightarrow \forall u \subseteq \mathcal{P}(a)(u \textit{ induktive Familie von Teilmengen von } a \rightarrow a \in u).$$

Dieser Begriff ist äquivalent zu obiger Definition.

3. DEDEKIND wählt eine (anfangs als paradox angesehene) Eigenschaft zur Charakterisierung unendlicher Mengen:

$$a \textit{ D-unendlich} :\leftrightarrow \exists x \subset a\,(a \sim x)$$

Satz

(i) $n \sim m \wedge n, m \in \omega \rightarrow n = m$, allgemeiner:
$\alpha \sim m \wedge m \in \omega \rightarrow \alpha = m$, (jedoch: $\omega \sim \omega + 1 \sim \omega + \omega$)

(ii) α *endlich* $\leftrightarrow \alpha \in \omega$, insbesondere:
$\forall n \in \omega\,(n \textit{ endlich}) \wedge \omega \textit{ unendlich}$
$\forall n \in \omega\, \neg(n \textit{ D-unendlich}) \wedge \omega \textit{ D-unendlich}$

(iii) a *D-unendlich* $\leftrightarrow \exists x \subseteq a(x \sim \omega)$

(iv) a *D-unendlich* $\rightarrow a$ *unendlich*,
a *D-unendlich* $\leftrightarrow a$ *unendlich* (mit DC !)

Beweis von (iii) (DEDEKIND 1888):

Sei a D-unendlich, also $f : a \longleftrightarrow b \subset a$ für ein f und ein b. Wähle $a_0 \in a - b$ und setze $a_{n+1} = f(a_n)$ (rekursive Definition!). Es ist also $a_1 \neq a_0$ (wegen $a_1 \in b$) und allgemeiner $a_n \neq a_m$ für $n \neq m$. Somit ist $\{a_n | n < \omega\}$ eine abzählbar-unendliche Teilmenge von a.

Ist umgekehrt $\{a_n | n < \omega\}$ eine abzählbar-unendliche Teilmenge von a, wobei $a_n \neq a_m$ für $n \neq m$, so definieren wir eine Funktion $g : a \longrightarrow a$ durch

$$g(x) = \begin{cases} a_{n+1}, & \text{falls } x = a_n \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist dann $g : a \longleftrightarrow a - \{a_0\} \subset a$. □

Eigenschaften endlicher Mengen

(i) $\emptyset$ *und* $\{a\}$ *sind endlich,*

(ii) *sind a und b endlich, so auch* $a \cup b, a \cap b, a - b, a \times b, \mathcal{P}(a), F[a], {}^a b$,

(iii) a *endlich* $\wedge \forall x \in a$ (x *endlich*) $\rightarrow \bigcup a$ *endlich,*

(iv) a *endlich* $\wedge\, b \subseteq a \rightarrow b$ *endlich.*

(v) **Induktionsprinzip für endliche Mengen:**

$$\varphi(\emptyset) \wedge \forall x\, [x\ endlich \wedge \varphi(x) \rightarrow \forall y (\varphi(x \cup \{y\}))] \rightarrow \forall x (x\ endlich\ \rightarrow \varphi(x)).$$

Diese Eigenschaften beweist man am einfachsten mit Hilfe des Endlichkeitsbegriffes von WHITEHEAD-RUSSELL, zeigt dann, daß unter diesem Begriff alle natürlichen Zahlen endlich sind und somit beide Endlichkeitsdefinitionen zusammenfallen. □

Wir wollen von den endlichen zu abzählbaren Mengen übergehen. Diese lassen sich mit Hilfe der natürlichen Zahlen abzählen:

a **abzählbar:** $\longleftrightarrow a = \emptyset \vee a = \{a_n | n < \omega\}$ *für eine Folge* $(a_n | n < \omega)$.

Damit sind dann auch die endlichen Mengen einbegriffen, da in der Abzählung Elemente mehrfach aufgezählt werden können. Wir unterscheiden:

1. $f : \omega \twoheadrightarrow a$ heißt **Aufzählung** von a (es ist dann $a = \{f(n) | n < \omega\}$),
2. $f : \omega \leftrightarrow a$ heißt **Aufzählung** von a **ohne Wiederholungen**.

Eine Aufzählung ohne Wiederholungen (also eine bijektive Abbildung auf die natürlichen Zahlen) liefert eine abzählbar-unendliche Menge:

a **abzählbar-unendlich:** $\longleftrightarrow a \sim \omega$.

Für die Menge der endlichen Teilmengen von a bzw. die Menge der endlichen Folgen von Elementen von a benutzen wir folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{<\omega}(a) : &= \{x \mid x \subseteq a \wedge x\ endlich\} \\ a^{<\omega} : &= \{f \mid \exists n < \omega f : n \longrightarrow a\} \end{aligned}$$

Eigenschaften abzählbarer Mengen

(i) *a abzählbar* $\longleftrightarrow$ *a endlich* $\vee$ *a abzählbar-unendlich*
$\longleftrightarrow \exists \alpha \leq \omega \, (a \sim \alpha)$,

(ii) *sind a und b abzählbar, so auch*
$a \cup b$, $a \cap b$, $a - b$, $a \times b$, $F[a]$, $\mathcal{P}_{<\omega}(a)$ *und* $a^{<\omega}$,

(iii) (unter der Voraussetzung des Auswahlaxioms - AC_ω genügt):
a abzählbar $\wedge\ \forall x \in a$ (*x abzählbar*) $\rightarrow \bigcup a$ *abzählbar*,

(iv) *a abzählbar* $\wedge\ b \subseteq a \rightarrow b$ *abzählbar*.

Beweis von (i): Sei zunächst a abzählbar, also $a = \{a_n \mid n < \omega\}$ für eine Folge $(a_n \mid n < \omega)$, die möglicherweise Wiederholungen enthält. Diese lassen wir weg, indem wir neu aufzählen: Setze $b_0 = a_0$ und definiere (durch Rekursion) $b_{n+1} = a_k$, wobei k minimal ist mit $a_k \neq b_i$ für alle $i \leq n$. (Da wir a als unendlich voraussetzen können, muß ein solches k existieren.) Es ist dann $n \mapsto b_n$ eine Aufzählung von a ohne Wiederholungen.

Umgekehrt sind offenbar endliche wie auch abzählbar-unendliche Mengen abzählbar.

Wir zeigen nun (iii), wobei wir annehmen können, daß die betrachteten Mengen nicht-leer sind: Dazu geben wir zunächst eine **Paarfunktion** an:

$$f : \omega \times \omega \longleftrightarrow \omega, \qquad f(n,m) = 2^n \cdot (2m+1) - 1.$$

Sei nun $a = \{a_n \mid n < \omega\}$ abzählbar und $\forall n \in \omega$ (a_n abzählbar), also

$$\forall n \in \omega \, \exists g \, (g : \omega \twoheadrightarrow a_n)$$

Nach AC_ω existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\omega}$ mit $\forall n \in \omega \ (a_n = \{g_n(m) | m \in \omega\})$, und somit

$$\bigcup a = \bigcup_{n\in\omega} a_n = \{g_n(m) \mid m,n \in \omega\} = \{g(n,m) \mid m,n \in \omega\},$$

wobei $g : \omega \times \omega \twoheadrightarrow \bigcup_{n\in\omega} a_n$ definiert ist durch $g(n,m) = g_n(m)$.

Die gewünschte Abbildung $h : \omega \twoheadrightarrow \bigcup_{n\in\omega} a_n$ erhält man nun aus g durch Vorschalten der Inversen f^{-1} der oben definierten Paarfunktion f.

(ii) beweist man ähnlich, wobei man sich leicht überzeugt, daß in diesem Fall das abzählbare Auswahlaxiom nicht benötigt wird. $\square$

11.2 Überabzählbare Mengen

Während die Potenzmenge einer endlichen Menge auch wieder endlich ist, ist die Potenzmenge einer abzählbar-unendlichen Menge nicht mehr abzählbar, also **überabzählbar**: Wäre

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\omega) &= \{a_n \mid n \in \omega\}, && \text{so wäre auch} \\ a := \{m \in \omega \mid m \notin a_m\} &= a_n && \text{für ein } n, \text{dann aber} \\ n \in a_n &\leftrightarrow n \notin a_n && \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

Wir erhalten also einen Widerspruch wie im Falle der RUSSELLschen Antinomie! In ähnlicher Weise kann man zeigen, daß die Menge aller zahlentheoretischen Funktionen und auch die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$ überabzählbar sind.

Vergleich von Mächtigkeiten

Obwohl wir die *Mächtigkeit* einer Menge noch nicht erklärt haben, konnten wir Mengen als gleichmächtig definieren, wenn sie sich eineindeutig aufeinander abbilden lassen. Ebenso lassen sich Mengen hinsichtlich ihrer Größe vergleichen, ohne sie vorher aufzählen zu müssen:

$$\begin{array}{rcll} a \sim b: & \leftrightarrow & \exists f (f : a \longleftrightarrow b) & a \text{ ist } \textbf{gleichmächtig} \text{ mit } b \\ a \preceq b: & \leftrightarrow & \exists f (f : a \rightarrowtail b) & a \text{ ist } \textbf{kleiner oder gleichmächtig} \text{ mit } b \\ & \leftrightarrow & \exists x \subseteq b\ (a \sim x) & (a \text{ ist } \textit{schmächtiger} \text{ als } b) \\ a \prec b: & \leftrightarrow & a \preceq b \wedge a \not\sim b & a \text{ ist } \textbf{kleiner} \text{ als } b \end{array}$$

(Genauer sollte man für $a \preceq b$ sagen: *a ist von Mächtigkeit kleiner oder gleich b*.) So ist z.B.

$$n \preceq \omega,\ n \prec \omega,\ \omega \preceq \omega+1,\ \omega+1 \preceq \omega,\ \omega \prec \mathcal{P}(\omega),$$
$$\text{aber:}\quad \omega+1 \not\prec \omega,\ \omega \not\prec \omega+1.$$

Lemma

(i)	$a \preceq a$	reflexiv
(ii)	$a \preceq b \land b \preceq c \to a \preceq c$	transitiv
(iii)	$a \subseteq b \to a \preceq b$	aber i. a. nicht umgekehrt!
(iv)	$a \sim c \land a \preceq b \to c \preceq b$	ebenso für $\prec$
(v)	$b \sim d \land a \preceq b \to a \preceq d$	ebenso für $\prec$

Die Gleichmächtigkeit (Äquivalenz) von Mengen ist somit außer einer Äquivalenzrelation auch eine Kongruenzrelation bezüglich $\preceq$ und $\prec$; die Relation $\preceq$ ist reflexiv und transitiv. Der folgende Satz besagt, daß $\preceq$ antisymmetrisch ist (bis auf $\sim$), was trivial ist, wenn man das Auswahlaxiom benutzt. Als eines der wenigen Ergebnisse der Theorie der Mächtigkeiten läßt er sich aber auch ohne diese Voraussetzung beweisen:

11.3 Satz von Cantor-Schröder-Bernstein

$$a \preceq b \ \land \ b \preceq a \ \to a \sim b$$

Beweis: Wir führen die Behauptung zunächst auf den einfacheren Fall

$$(*) \qquad a \preccurlyeq b \ \land \ b \subseteq a \ \to a \sim b$$

zurück: Nach Voraussetzung existieren Abbildungen

$$\begin{aligned} g : a &\longleftrightarrow a' \subseteq b, \\ h : b &\longleftrightarrow b' \subseteq a, \qquad \text{also mit} \\ f := h \circ g : a &\rightarrowtail b' \qquad \text{gilt} \\ a \preccurlyeq b' \ \land \ b' &\subseteq a \ \land \ b' \sim b. \end{aligned}$$

Nach (*) gilt dann $a \sim b'$, also auch $a \sim b$, wie zu zeigen war.

Zum Beweis von (*) gehen wir von einer injektiven Abbildung

$$f : a \rightarrowtail b \subseteq a$$

aus und konstruieren daraus eine Abbildung

$$g : a \leftrightarrow b$$

wie folgt:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b] \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $f^0(y) = y, f^{n+1}(y) = f(f^n(y))$ (numerische Rekursion). Es gilt nun:

(i) g ist surjektiv, d. h. $W(g) = b$:

Sei $d \in b$. Falls $d \in \bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b]$, so ist $d \in f^n[a-b]$ für ein n, und zwar $n > 0$ wegen $d \in b$. Dann ist aber $d = f(f^{n-1}(y))$ für ein y und damit $d \in W(g)$. Im anderen Fall ist aber $d = g(d)$ und damit auch $d \in W(g)$.

(ii) g ist injektiv:

Da f injektiv ist, so auch g auf $\bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b]$, und als identische Abbildung ist sie auch auf dem Komplement injektiv. Ist jedoch einerseits $x \in \bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b]$ und andererseits $y \in a - \bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b]$, so muß auch $g(x) \neq g(y)$ sein, da $g(x) \in \bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b]$, während $g(y) = y$ im Komplement liegt. Somit ist g eine Bijektion von a auf b.

□

Der folgende Satz benötigt zum Beweis notwendig das Auswahlaxiom, da er hierzu äquivalent ist:

11.4 Vergleichbarkeitssatz von Hartogs

$$a \preceq b \vee b \preceq a$$

Beweis: Nach dem Wohlordnungssatz gibt es Ordinalzahlen α, β mit $a \sim \alpha$ und $b \sim \beta$. Da Ordinalzahlen vergleichbar sind (und zwar $\alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$), überträgt sich diese Beziehung in der Form $a \preceq b \vee b \preceq a$ auf die entsprechenden Mengen. □

Folgerung

Jede unendliche Menge enthält eine abzählbar-unendliche Teilmenge (und ist damit D-unendlich).

Daß es zu jeder Menge eine mit größerer Mächtigkeit gibt, zeigt der

11.5 Satz von Cantor

$$a \prec \mathcal{P}(a)$$

Beweis: Da durch $x \mapsto \{x\}$ eine injektive Funktion definiert wird, ist $a \preceq \mathcal{P}(a)$. Die Annahme $a \sim \mathcal{P}(a)$ widerlegt man wie im Fall $a = \omega$ durch ein Diagonalargument: Falls $f : a \twoheadrightarrow \mathcal{P}(a)$, so setze man $d := \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$. Dann erhält man wegen der Surjektivität von f ein $b \in a$ mit $d = f(b)$, was aber mit

$$b \in f(b) = d \leftrightarrow b \notin f(b)$$

zum Widerspruch führt! □

11.6 Alternative zum Größenvergleich

Da bei einer Abbildung Mengen möglicherweise auf dasselbe Element abgebildet werden können, wird man das Bild einer Menge a als höchstens so groß wie a selbst ansehen. Man findet daher auch folgende Definition:

$$a \preceq^* b :\leftrightarrow a = \emptyset \vee \exists f(f : b \twoheadrightarrow a).$$

Für die Definition der Abzählbarkeit haben wir z. B.:

$$a \textit{ abzählbar} \leftrightarrow a \preceq^* \omega \leftrightarrow a \preceq \omega,$$

und der obige Satz von CANTOR besagt gerade: $a \not\preceq^* \mathcal{P}(a)$. Allgemein gilt:

$$a \preceq b \leftrightarrow a \preceq^* b,$$

und zwar $(\rightarrow)$, weil eine injektive Funktion stets eine Umkehrfunktion besitzt, aber für die Umkehrung benötigt man das Auswahlaxiom (oder zumindest eine Wohlordnung von b)! Ebenso gilt zwar stets $F[a] \preceq^* a$, aber $F[a] \preceq a$ allgemein nur, wenn das Auswahlaxiom vorausgesetzt ist.

11.7 Kardinalzahlen

Für die *Mächtigkeit* einer Menge a, bezeichnet mit $\overline{\overline{a}}$, soll gelten:

$$\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{b}} \leftrightarrow a \sim b.$$

Diese Eigenschaft kann man in verschiedener Weise erfüllen:

- $\overline{\overline{a}} = \{x \mid x \sim a\}$ (FREGE-RUSSELL). Allerdings sind diese Äquivalenzklassen dann stets echte Klassen (außer für $a = \emptyset$).

- $\overline{\overline{a}} = \{x \mid x \sim a\}_{min}$ (SCOTT-TARSKI, s. 8.3) Mächtigkeiten sind nun stets Mengen, aber im konkreten Fall schwer zu bestimmen.

- Wähle aus der Äquivalenzklasse $\{x \mid x \sim a\}$ einen geeigneten Repräsentanten als die Mächtigkeit von a aus:

Im Falle einer endlichen Menge kann man ihre Mächtigkeit dadurch bestimmen, daß man sie abzählt: Ist

$$a \sim \{0, \ldots, n-1\} = n,$$

so ist n eindeutig durch a bestimmt und bezeichnet die *Anzahl* der Elemente von a. Ist jedoch a eine unendliche Menge, so können folgende Probleme auftauchen:

1. a besitzt keine Wohlordnung und damit auch keine Aufzählung,

2. a besitzt Aufzählungen verschiedener Länge.

Das erste Problem läßt sich vermeiden, indem man das Auswahlaxiom voraussetzt: Dann läßt sich jede Menge wohlordnen:

$$a = \{\alpha_\xi \mid \xi < \alpha\} \quad \text{für ein } \alpha,$$

aber das zweite Problem bleibt bestehen: Selbst bei injektiven Aufzählungen ist im Falle unendlicher Menge die "Länge" α nie eindeutig bestimmt. Als *Kardinalzahl* von a wählt man daher das kleinstmögliche[1] derartige α:

$$|a| := \overline{\overline{a}} := \mu\alpha(a \sim \alpha) \qquad \textbf{Kardinalzahl} \text{ von } a.$$

Die Kardinalzahl einer Menge a ist somit *die kleinste Ordinalzahl unter allen gleichmächtigen Mengen* (man sagt dann auch, daß man die Kardinalzahlen mit den **Anfangszahlen** identifiziert).

[1] $\mu\alpha\,\varphi$ bezeichnet die kleinste Ordinalzahl α mit der Eigenschaft φ, falls eine solche existiert, die Zahl 0 sonst.

Bemerkung

Setzt man dagegen das Auswahlaxiom nicht voraus, so muß man unterscheiden zwischen *Mächtigkeiten* (allgemeiner Fall) und *Kardinalzahlen* (im Falle wohlgeordneter Mengen, für die man dann die entsprechenden Anfangszahlen als Mächtigkeit = Kardinalzahl wählen kann). Da man ohnehin ohne Auswahlaxiom keine befriedigende Theorie der Mächtigkeiten entwickeln kann, werden wir im folgenden das Auswahlaxiom voraussetzen und brauchen dann nicht zwischen Kardinalzahlen und Mächtigkeiten zu unterscheiden.

Lemma

(i) $a \sim b \leftrightarrow \overline{\overline{a}} = \overline{\overline{b}}$,

(ii) $a \preceq b \leftrightarrow \overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{b}}$,

(iii) $a \prec b \leftrightarrow \overline{\overline{a}} < \overline{\overline{b}}$.

Definition

$$
\begin{array}{rl}
Card(a) :\leftrightarrow \exists x(a = |x|) & \textbf{Kardinalzahl} \\
Cn := \{x \mid Card(x)\} & \textbf{Klasse aller Kardinalzahlen}
\end{array}
$$

Lemma

(i) $Card(\alpha) \leftrightarrow \forall \xi < \alpha\ (\xi \not\sim \alpha)$
$\leftrightarrow \forall \xi < \alpha\ (\xi \prec \alpha) \leftrightarrow \alpha = |\alpha|$,

(ii) $Card(\alpha) \wedge \alpha \geq \omega \rightarrow Lim(\alpha)$,

(iii) $a \subseteq Cn \rightarrow \bigcup a \in Cn$,

(iv) $\forall \alpha \exists \kappa \in Cn\ \alpha < \kappa$,

(v) *Cn ist eine echte Klasse.*

Beweis: (i) drückt auf verschiedene Weise aus, daß Kardinalzahlen Anfangszahlen sind. Für (ii) zeigt man, daß für unendliches α stets gilt: $\alpha + 1 \sim \alpha$ (nach derselben Methode wie $\omega + 1 = \{0, 1, \ldots \omega\} \sim \{\omega, 0, 1, \ldots\} \sim \omega$). (iv) beweist man am einfachsten mit dem Satz von CANTOR: $\alpha \prec \mathcal{P}(\alpha)$. Insbesondere gibt es keine größte Kardinalzahl und die Klasse aller Kardinalzahlen kann keine Menge sein. □

Definition

$$\alpha^+ := \mu\xi(\xi \in Cn \wedge \alpha < \xi) \qquad \textbf{kardinaler Nachfolger}$$

Mit Hilfe des Satzes von CANTOR (und des Auswahlaxioms) ergibt sich wie in obigem Beweis:

$$\alpha \prec \alpha^+ \leq |\mathcal{P}(\alpha)|.$$

Man kann stattdessen aber auch die HARTOGsche Funktion

$$H(a) := \{\xi \mid \xi \preceq a\}$$

verwenden und ohne Benutzung des Auswahlaxioms zeigen, daß

$$H(\alpha) = \mu\xi(|\alpha| < \xi) = \alpha^+$$

ist. Zur Aufzählung der unendlichen Kardinalzahlen benutzt man seit CANTOR den hebräischen Buchstaben $\aleph$ (aleph):

$$\omega = \aleph_0 < \aleph_1 < \ldots \aleph_\omega < \ldots \qquad \textbf{Aleph-Funktion}$$

$\aleph_0$ ist also die Kardinalzahl abzählbar-unendlicher Mengen, $\aleph_1$ die erste überabzählbare Kardinalzahl, allgemeiner $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$ und (nach (iii) des obigen Lemmas) $\aleph_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \aleph_\xi$ für Limeszahlen λ.

Beispiele

$|n| = n$ für jede natürliche Zahl n,
$|\mathbb{N}| = |\omega| = |\omega+1| = |\omega+2| = \ldots = |\omega+\omega| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$,
$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$,
$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}\times\mathbb{R}| \geq \aleph_1$,
$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \geq \aleph_2, \ldots$

Da die Folge der Kardinalzahlen unbeschränkt und auch stetig ist, ist die $\aleph$-Funktion eine Normalfunktion. Sie besitzt als solche beliebige große kritische Stellen, also Kardinalzahlen κ mit

$$\kappa = \aleph_\kappa,$$

deren Aufzählung wieder eine Normalfunktion mit kritischen Stellen, deren Aufzählung wieder kritische Stellen besitzt ...

11.8 Operationen auf den Kardinalzahlen

Die arithmetischen Operationen auf den Kardinalzahlen definiert man analog zum endlichen Fall, wobei im Falle der Addition zu beachten ist, daß man als Summe zweier Kardinalzahlen die Mächtigkeit der Vereinigung *disjunkter* Mengen der entsprechenden Kardinalzahl wählt:

$$\begin{aligned} \kappa \oplus \lambda &= |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})| \\ \kappa \odot \lambda &= |\kappa \times \lambda| \\ \kappa^{\underline{\lambda}} &= |{}^{\lambda}\kappa| = |\{f \mid f : \lambda \to \kappa\}| \end{aligned}$$

Endliche Ordinal- und Kardinalzahlen stimmen überein (es sind gerade die natürlichen Zahlen), und für diese Fälle stimmen diese Operationen mit den entsprechenden Operationen auf den Ordinalzahlen ebenfalls überein. Für unendliche Kardinalzahlen ergeben sich aber wesentliche Unterschiede. So sind die Operationen der Addition und Multiplikation auf den Kardinalzahlen (wie im Falle der natürlichen Zahlen, aber im Gegensatz zu den ordinalen Operationen) kommutativ, assoziativ und distributiv - wenngleich diese Gesetze trivial sind; es gilt nämlich der

11.9 Satz von Hessenberg

Es seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen. Dann gilt:

$$\kappa \oplus \lambda = \kappa \odot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

(Tatsächlich braucht nur eine der beiden Zahlen unendlich zu sein, im Falle der Multiplikation darf aber natürlich keine = 0 sein.) Dieses Ergebnis läßt sich (mit einfachen Monotoniegesetzen) zurückführen auf den

Satz

Für unendliche Kardinalzahlen gilt:

$$\kappa \odot \kappa = \kappa.$$

Beweis: Wir werden eine bijektive Abbildung $F : On \times On \leftrightarrow On$ angeben, die die Paare von Ordinalzahlen abzählt, und zwar so, daß für jede unendliche Kardinalzahl κ gilt:

$$F \restriction \kappa \times \kappa : \kappa \times \kappa \longleftrightarrow \kappa.$$

Dazu müssen wir die Paare von Ordinalzahlen wohlordnen. Zunächst definieren wir auf $On \times On$ die **lexikographische Ordnung**:

$$(\alpha,\beta) <_l (\gamma,\delta) :\leftrightarrow \alpha < \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta).$$

Dieses ist zwar eine lineare Ordnung, die die Minimumsbedingung erfüllt, aber nicht die Mengenbedingung, denn in dieser Ordnung kommt die *echte* Klasse aller Ordinalzahlen $\{(0,\xi) \mid \xi \in On\}$ vor dem Paar $(1,0)$! Deshalb wandelt man diese Ordnung nach GÖDEL ab, indem man nach dem Maximum der Paare vorsortiert:

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta) <_g (\gamma,\delta) :\leftrightarrow{} & \max(\alpha,\beta) < \max(\gamma,\delta) \vee \\ & \vee (\max(\alpha,\beta) = \max(\gamma,\delta) \wedge (\alpha,\beta) <_l (\gamma,\delta)).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder eine lineare Ordnung, die offensichtlich die Mengenbedingung erfüllt, aber auch weiterhin die Minimalitätsbedingung, und zwar findet man in einem nicht-leeren $A \subseteq On \times On$ das kleinste Element, indem man

- zunächst das kleinste $\gamma_0 \in \{\max(\alpha,\beta) \mid (\alpha,\beta) \in A\}$ bestimmt,
- sodann hierzu das kleinste $\alpha_0 \in \{\alpha \mid \exists\beta\, ((\alpha,\beta) \in A \wedge \max(\alpha,\beta) = \gamma_0)\}$
- und schließlich das kleinste $\beta_0 \in \{\beta \mid (\alpha_0,\beta) \in A \wedge \max(\alpha_0,\beta) = \gamma_0\}$.

(α_0,β_0) ist dann das kleinste Element von A bezüglich $<_g$.

Nach dem Kontraktionslemma 6.5 existiert also eine transitive Klasse A und ein Ordnungsisomorphismus $F : On \times On \leftrightarrow A$ mit

$$(\alpha,\beta) <_g (\gamma,\delta) \leftrightarrow F(\alpha,\beta) < F(\gamma,\delta).$$

Da $On \times On$ eine echte Klasse ist, so auch A und damit $A = On$. Damit haben wir also eine bijektive Abbildung aller Paare von Ordinalzahlen auf On erhalten, von der wir nun noch zeigen, daß sie für jede unendliche Kardinalzahl κ auch die Paare in $\kappa \times \kappa$ nach dem Ordnungstyp κ aufzählt:

Zunächst bemerken wir, daß:

$$(*) \qquad \alpha \times \alpha = \{(\xi,\eta) \mid (\xi,\eta) <_g (0,\alpha)\},$$

also ist $\alpha \times \alpha$ ein $<_g$-Segment. Aufgrund der rekursiven Definition von F und wegen (*) gilt:

$$(**) \qquad F(0,\alpha) = F[\alpha \times \alpha] \geq \alpha.$$

Für $\alpha = \omega$ ist offenbar $F[\omega \times \omega] = \omega$ und allgemein gilt für jedes α:

$$F[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha] = \aleph_\alpha.$$

Diese Aussage beweisen wir durch Induktion nach α:

1. Fall: $\alpha = 0$, also $\aleph_\alpha = \omega$. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es nach (**) zwei natürliche Zahlen n, m mit $\omega = F(n,m)$. Für $k = \max(n,m) + 1$ erhielten wir dann jedoch $\omega = F(n,m) < F(0,k) = F[k \times k]$, aber $F[k \times k]$ ist offenbar endlich, Widerspruch!

2. Fall: $\alpha > 0$, und wir nehmen wieder an $F[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha] > \aleph_\alpha$, wobei wir α minimal mit dieser Eigenschaft wählen. Wie im ersten Fall existieren dann Zahlen $\gamma, \delta < \aleph_\alpha$ mit $F(\gamma, \delta) = \aleph_\alpha$. Wir setzen $\rho = \max(\gamma, \delta) + 1$, so daß $\omega \leq \rho < \aleph_\alpha$ (da $\aleph_\alpha$ als Ordinalzahl eine Limeszahl ist) und $(\gamma, \delta) <_g (0, \rho)$. Somit

$$\aleph_\alpha = F(\gamma, \delta) <_g F(0, \rho) = F[\rho \times \rho],$$

insbesondere $\aleph_\alpha \leq |\rho \times \rho|$. Wegen der Minimalität von α gilt nun aber $|\rho \times \rho| = |\rho| < \aleph_\alpha$, Widerspruch! $\square$

Den Satz von HESSENBERG können wir nun hieraus folgern: Für unendliches κ gilt zunächst:

$$\kappa \leq \kappa \oplus \kappa \leq \kappa \odot \kappa = \kappa, \text{ also } \kappa \oplus \kappa = \kappa \odot \kappa = \kappa.$$

Es seien nun κ, λ Kardinalzahlen und etwa $\kappa \leq \lambda$, λ unendlich. Dann gilt also

$$\begin{aligned} &\lambda \leq \kappa \oplus \lambda \leq \lambda \oplus \lambda = \lambda, \quad &&\text{also } \kappa \oplus \lambda = \lambda, \text{ und ebenso} \\ &\lambda \leq \kappa \odot \lambda \leq \lambda \odot \lambda = \lambda, \quad &&\text{also } \kappa \odot \lambda = \lambda \text{ für } \kappa, \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich die Bestimmung der Kardinalzahl unendlicher Mengen in vielen Fällen, und in Verallgemeinerung des Falles abzählbarer Mengen erhalten wir:

Satz

Für $\emptyset \neq b \preceq a$, a unendlich, gilt:

(i) $|a \cup b| = |a \times b| = |a|$,

(ii) $|a^{<\omega}| = |\mathcal{P}_{<\omega}(a)| = |a|$.

Kapitel 12

Die Menge der reellen Zahlen

12.1 Mengen von der Größe des Kontinuums

Während nach dem Satz von HESSENBERG Addition und Multiplikation von unendlichen Kardinalzahlen trivial (nämlich das Maximum) ist, stößt man bereits bei Bestimmung der einfachsten transfiniten Potenz, nämlich $2^{\underline{\omega}}$, auf unlösbare Probleme. Dabei hat diese Kardinalzahl eine besondere Bedeutung als Mächtigkeit der reellen Zahlen (des *Kontinuums*):

Satz

$$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}.$$

Beweis: Die zweite Gleichheit folgt aus der Äquivalenz der Potenzmenge einer Menge a mit der Menge der charakteristischen Funktionen von Teilmengen von a. Es gibt zahlreiche Beweise für den ersten Teil, am einfachsten ist die Beziehung

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|,$$

nachzuweisen, indem man z. B. jeder reellen Zahl r die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$ (also praktisch den entsprechenden DEDEKINDschen Schnitt) zuordnet und die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ benutzt oder die Darstellung reeller Zahlen als Dezimalbrüche (bzw. Dualbrüche im Binärsystem). Für den Beweis der umgekehrten Beziehung stört die fehlende Eindeutigkeit der Dezimal- bzw. Binärdarstellung, was sich jedoch nur auf abzählbar-viele Fälle bezieht, die wegen der Überabzählbarkeit von

$\mathbb{R}$ aber keine Rolle spielen. Man kann aber auch etwa wie folgt argumentieren: Für eine Binärfolge $f : \mathbb{N} \to 2 = \{0,1\}$ definieren wir eine zugeordnete reelle Zahl

$$r_f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot f(n)}{3^{n+1}},$$

womit wir eine injektive Abbildung von ${}^{\mathbb{N}}2$ in die reellen Zahlen erhalten und damit auch $|\mathbb{R}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. $\square$

Folgerungen

1. Mit $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ ist auch $|\mathbb{R}^n| = (2^{\aleph_0})^n = 2^{\aleph_0}$, es ist sogar

$$|\mathbb{R}^{\omega}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \odot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

   d. h. es gibt genau so viele abzählbare Folgen reeller Zahlen wie es reelle Zahlen gibt!

2. Da eine stetige reelle Funktion bereits durch ihre Werte auf den abzählbarvielen rationalen Stellen eindeutig bestimmt ist und da es mit den konstanten Funktionen mindestens so viele stetige Funktionen wie reelle Zahlen gibt, so gilt:

$$|\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \land f \text{ stetig}\}| = |\{f \mid f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

3. Dagegen erhalten wir höhere Mächtigkeiten, indem wir zur Potenzmenge der reellen Zahlen oder zur Menge aller reellen Funktionen übergehen:

$$|\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}.$$

12.2 Die Cantorsche Kontinuumshypothese

Wie groß ist nun $2^{\aleph_0}$? Nach dem Satz von CANTOR ist die Menge der reellen Zahlen überabzählbar, also $2^{\aleph_0} \geq \aleph_0^+ = \aleph_1$. Die

Cantorsche Kontinuumshypothese (CH) $\quad 2^{\aleph_0} = \aleph_1$

erscheint als naheliegende, zumindest einfachste Festlegung der Größe von $2^{\aleph_0}$. Sie ist zwar mit den Axiomen von $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC}$ verträglich (GÖDEL 1938), aber aus ihnen nicht beweisbar (COHEN 1963) und somit unabhängig von den Axiomen von $\mathsf{ZF}+\mathsf{AC}$.

CH besagt, daß die Mächtigkeit der reellen Zahlen nach dem Abzählbaren die nächst-größere Kardinalzahl ist. Um CH zu widerlegen, müßte man also eine Menge reeller Zahlen angeben, die überabzählbar, aber noch von Mächtigkeit $< 2^{\aleph_0}$ ist, um dagegen CH zu beweisen, muß man zeigen, daß für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$A \text{ abzählbar} \vee A \sim \mathbb{R}$$

Diese Eigenschaft (wir werden sagen: A **erfüllt** CH) läßt sich zwar nicht für alle, aber doch viele Mengen zeigen, die nicht zu "kompliziert" sind; entsprechende Untersuchungen haben zur *Deskriptiven Mengenlehre* geführt, auf die wir (hoffentlich) später noch etwas näher eingehen werden. Hier wollen wir nur einige Ergebnisse darstellen:

Satz

Jedes Intervall (das nicht nur aus einem Punkt besteht) und jede offene Teilmenge von reellen Zahlen ist leer oder von Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$, erfüllt insbesondere also CH.

Beweis: Man kann leicht bijektive Abbildungen des offenen Einheitsintervalles $]0,1[\leftrightarrow \mathbb{R}$ auf die reellen Zahlen angeben, sowie bijektive Abbildungen zwischen zwei beliebigen offenen Intervallen, so daß diese (soweit $\neq \emptyset$) gleichmächtig mit $\mathbb{R}$ sind. Da jede nicht-leere offene Teilmenge ein derartiges Intervall enthält, hat auch sie die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$. Die übrigen Intervalle entstehen aus den offenen durch Hinzunahme eines oder beider Randpunkte, was die (bereits unendliche) Kardinalzahl nicht verändert. $\square$

Abgeschlossene Mengen können auch endlich oder abzählbar sein; daß sie aber auch CH erfüllen, ist nicht so leicht nachzuweisen. Man führt dazu den Begriff der *perfekten* Menge ein und zeigt:

- jede nicht-leere perfekte Menge hat die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$,
- jede abgeschlossene Menge ist disjunkte Vereinigung einer perfekten Menge mit einer abzählbaren Menge.

12.3 Einige topologische Begriffe

Wir haben oben bereits einige einfache topologische Begriffe metrischer Räume benutzt und tragen die Definitionen mit einigen Ergänzungen nach:

Definition

Für reelle Zahlen ε, a mit $\varepsilon > 0$ und eine Menge reeller Zahlen $M \subseteq \mathbb{R}$ sei

1. $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$ die (offene) ε-**Umgebung** von a,
2. a ist **Berührpunkt** von $M :\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, |U_\varepsilon(a) \cap M| > 0$,
3. a ist **Häufungspunkt** von $M :\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, |U_\varepsilon(a) \cap M| > 1$,
4. a ist **Kondensationspunkt** von $M :\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, |U_\varepsilon(a) \cap M| > \aleph_0$.

Für einen *Berührpunkt a* einer Menge M enthält also jede Umgebung des Punktes a mindestens einen Punkt von M, insbesondere sind alle Punkte von M selbst Berührpunkte, aber auch die Endpunkte eines offenen Intervalls sind Berührpunkte.

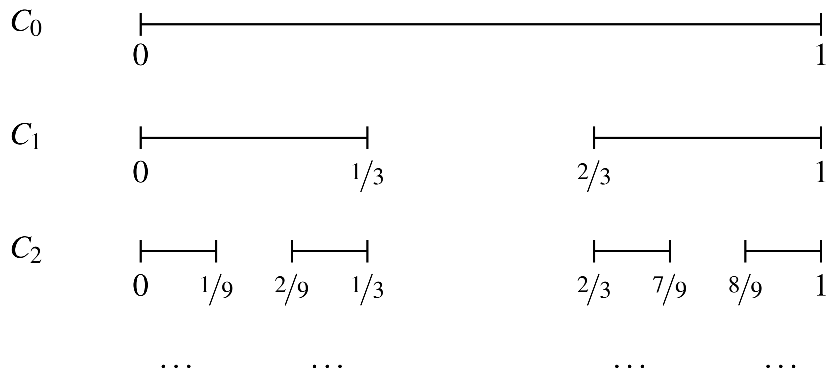
Im Falle eines *Häufungspunktes* muß in jeder Umgebung mindestens ein weiterer Punkt von M liegen, und wenn man diese Umgebungen verkleinert, ebenfalls ein weiterer, so daß in der Umgebung eines Häufungspunktes unendlich-viele Punkte von M liegen. (Punkte, die nicht Häufungspunkte sind, heißen **isolierte** Punkte.) Der Grenzwert 0 der Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots$ ist Häufungspunkt, aber kein Kondensationspunkt der Menge der Folgenglieder, während Endpunkte eines Intervalls *Kondensationspunkte* sind.

5. $\overline{M} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ Berührpunkt von } M\}$ **abgeschlossene Hülle** von M,
   $M' := \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ Häufungspunkt von } M\}$ **Ableitung** von M,
   also $\overline{M} = M \cup M'$.
6. M **abgeschlossen**: $\leftrightarrow M = \overline{M} \leftrightarrow M' \subseteq M$,
   M **offen**: $\leftrightarrow \mathbb{R} - M$ abgeschlossen,
7. M **in sich dicht**: $\leftrightarrow M \subseteq M'$,
8. M **perfekt**: $\leftrightarrow M = M'$.

Die Ableitung M' entsteht also aus M, indem man einerseits die isolierten Punkte wegläßt und andererseits die Ränder von M hinzunimmt. Eine abgeschlossene Menge enthält alle ihre Häufungspunkte, eine in sich dichte Menge hat keine isolierten Punkte. (Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wie auch die Irrationalzahlen sind in sich dichte Teilmengen der reellen Zahlen, aber weder offen noch abgeschlossen.) Perfekte Mengen enthalten also ihre Häufungspunkte und haben keine isolierten Punkte, die einfachsten perfekten Mengen sind die abgeschlossenen Intervalle, während eine konvergente Folge zusammen mit ihrem Grenzwert zwar abgeschlossen, nicht aber perfekt ist.

Eine weniger triviale perfekte Menge ist die CANTOR-*Menge* (das CANTORsche **Diskontinuum**), welches aus dem abgeschlossenen Einheitsintervall $[0,1]$ entsteht, indem man jeweils die inneren offenen Drittel entfernt:

$$C_0 = [0,1],\ C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1] \ldots,\ D = \bigcap_{n<\omega} C_n :$$



Man kann diese Menge auch darstellen als spezielle triadische Dezimalbrüche:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a_0/3 + a_1/3^2 + \ldots \text{ mit } a_n \in \{0,2\}\}.$$

Diese Menge (die übrigens gerade als Wertebereich der injektiven Abbildung $f \mapsto r_f$ von 12.1 aufgetreten ist) mag zunächst zwar etwas ungewöhnlich erscheinen, ist aber das Musterbeispiel einer nicht-leeren perfekten Menge, was sich auch aus dem Beweis des folgenden Satzes ablesen läßt:

12.4 Satz über perfekte Mengen

Jede nicht-leere perfekte Menge $P \subseteq \mathbb{R}$ hat die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.

Beweis: $2^{\aleph_0}$ ist die Mächtigkeit der Menge $C = \{f \mid f : \omega \to 2\}$ aller unendlichen Binärfolgen,

$$2^{<\omega} := \{s \mid \exists n \in \omega\, s : \{0, \dots, n-1\} \to 2\},$$

die Menge der endlichen Binärfolgen. Für jede solche Folge $s = (s_0, \dots, s_{n-1})$ bezeichne $s^\frown i = (s_0, \dots, s_{n-1}, i)$ die jeweilige Verlängerung um die Zahl i für $i = 0, 1$.

Es sei nun $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}$. Jeder unendlichen Binärfolge f soll genau ein Punkt in P entsprechen. Dazu ordnen wir den endlichen Approximationen von f Umgebungen einer Intervallschachtelung zu, die den gewünschten Bildpunkt definiert. Dabei müssen wir darauf achten, daß verschiedene Folgen tatsächlich verschiedene Bildpunkte definieren. Das erreichen wir, indem wir eine Folge $(U_s | s \in 2^{<\omega})$ von offenen Intervallen definieren, so daß für jedes
$s : \{0, \dots, n-1\} \to 2$ gilt:

(i) U_s ist eine ε-Umgebung eines Punktes von P einer Länge $2\varepsilon \leq 2^{-n}$,

(ii) $U_{s^\frown 0} \cap U_{s^\frown 1} = \emptyset$,

(iii) $\overline{U_{s^\frown i}} \subseteq U_s$ für $i = 0, 1$.

Da P abgeschlossen ist, enthält für jedes $f \in C$ die Menge

$$\bigcap_{n<\omega} U_{f \restriction n}$$

wegen (i) und (iii) genau einen Punkt aus P, den wir mit $h(f)$ bezeichnen. Damit erhalten wir eine (wegen (ii) injektive) Abbildung

$$h : C \rightarrowtail P,$$

und somit hat P die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.

Die Intervalle U_s definieren wir durch Induktion nach $n =$ Länge von s:

Für $n = 0$ brauchen wir nur (i) zu erfüllen (P ist nicht-leer). Ist U_s bereits definiert, so wählen wir hierin 2 verschiedene Punkte $x, y \in P$ (jeder Punkt in P ist ja Häufungspunkt, so daß dies möglich ist) und da ja auch x, y Häufungspunkte von P sind, können wir auch genügend kleine offene Intervalle $U_{s^\frown i}$ wählen, so daß (i) - (iii) erfüllt sind. $\square$

Bemerkung

In der Deskriptiven Mengenlehre benutzt man statt der reellen Zahlen den

- BAIREschen Raum $\mathcal{N}$ der Folgen natürlicher Zahlen $f : \omega \to \omega$ oder den
- CANTORraum $\mathcal{C}$ der unendlichen Binärfolgen, jeweils mit der Produkttopologie.

Dabei ist $\mathcal{N}$ homöomorph zum Raum der Irrationalzahlen (als Teilraum von $\mathbb{R}$), $\mathcal{C}$ homöomorph zum Unterraum, der durch das CANTORsche Diskontinuum gebildet wird. Diese - und viele weitere - Räume fallen unter den Begriff des *Polnischen Raumes* (ein separabler und vollständiger metrischer Raum). Der obige Beweis zeigt, daß sich der CANTORraum in jeden perfekten Polnischen Raum einbetten läßt; auch der folgende Satz von CANTOR-BENDIXSON gilt für beliebige Polnische Räume.

12.5 Der Satz von Cantor-Bendixson

Satz über die Anzahl isolierter Punkte

Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist die Menge $R = M - M'$ der isolierten Punkte abzählbar.

Beweis: Da die Menge der Paare $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ der Paare rationaler Zahlen abzählbar ist, gibt es auch eine Abzählung $I_0, I_1 \ldots$ der nicht-leeren offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten. Für jedes $x \in R$ sei

$$f(x) = \mu n \in \mathbb{N}\, (x \in I_n \ \wedge\ I_n \cap M = \{x\}).$$

Dann ist $f : R \rightarrowtail \omega$, also ist R abzählbar. □

Die Restmenge R kann jedoch wieder isolierte Punkte besitzen, nimmt man die isolierten Punkte von R weg, so können jetzt wiederum isolierte Punkte übrig bleiben. Wir betrachten daher nach CANTOR die Folge der Ableitungen:

Definition

$M \subseteq \mathbb{R}$ sei eine Menge von reellen Zahlen. Die Folge der **Ableitungen** von M wird durch transfinite Rekursion definiert:

$$M^0 = M,\ M^{\alpha+1} = (M^\alpha)',\ M^\lambda = \bigcap_{\xi<\lambda} M^\xi \ \text{ für Limeszahlen } \lambda.$$

Lemma

Für $M \subseteq \mathbb{R}, \alpha > 0$ gilt:

(i) M^α *ist abgeschlossen,*

(ii) $M^\alpha \supseteq M^{\alpha+1}$.

Somit erhalten wir eine absteigende Folge

$$M^1 \supseteq M^2 \supseteq \ldots \supseteq M^\alpha \supseteq M^{\alpha+1} \ldots.$$

Da M eine Menge ist, die Ordinalzahlen aber eine echte Klasse bilden, muß dieser Prozeß einmal stoppen, so daß alle M^α ab einem α konstant sind. Das kleinste derartige α heißt **Cantor-Bendixson-Rang** von M und das zugehörige M^α (das wegen $M^\alpha = M^{\alpha+1} = (M^\alpha)'$ perfekt ist), der **perfekte Kern** von M. Man kann zeigen, daß es für jede abzählbare Ordinalzahl α eine Menge reeller Zahlen mit CANTOR-BENDIXSON-Rang α gibt; umgekehrt werden wir zeigen, daß der CANTOR-BENDIXSON-Rang jeder Menge reeller Zahlen abzählbar ist. Es gibt absteigende Folgen von Mengen reeller Zahlen mit einer überabzählbaren Länge. Dagegen sind absteigende Folgen von *abgeschlossenen* Mengen höchstens abzählbar:

Lemma

Es sei $(A_\xi | \xi < \beta)$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit $A_0 \supset A_1 \supset \ldots A_\xi \supset \ldots$. Dann ist β abzählbar.
(Wir können dann auch schreiben: $\beta < \omega_1$, wobei $\omega_1 := \{\xi \mid \xi \text{ abzählbar}\} = \aleph_1$ die erste überabzählbare Ordinalzahl ist).

Beweis: Wir benutzen wieder eine Abzählung $I_0, I_1, \ldots I_n \ldots$ aller nicht-leeren Intervalle mit rationalen Endpunkten und definieren für jedes $\alpha < \beta$ eine Menge natürlicher Zahlen

$$N_\alpha := \{n \in \mathbb{N} | I_n \cap A_\alpha \neq \emptyset\}.$$

Damit erhalten wir eine absteigende Folge von Mengen natürlicher Zahlen:

$$N_0 \supset N_1 \supset \ldots N_n \supset \ldots:$$

Für $\alpha < \gamma < \beta$ ist offenbar $N_\gamma \subseteq N_\alpha$. Wegen $A_{\alpha+1} \subset A_\alpha$ gibt es ein $x \in A_\alpha - A_{\alpha+1}$, und es ist

$$N_x := \{n \in \mathbb{N} \mid x \in I_n\} \subseteq N_\alpha.$$

Wäre auch $A_{\alpha+1} \cap I_n \neq \emptyset$ für alle $n \in N_x$, so wäre x Häufungspunkt von $A_{\alpha+1}$ und damit $x \in A_{\alpha+1}$ wegen der Abgeschlossenheit von $A_{\alpha+1}$, im Widerspruch zur Wahl von x! Also muß es ein $n \in N_x \subseteq N_\alpha$ geben mit $n \notin N_{\alpha+1}$, folglich ist also die Folge der N_α echt absteigend.

Definieren wir nun für $\alpha < \beta$

$$g(\alpha) = \mu n(n \in N_\alpha - N_{\alpha+1}),$$

so erhalten wir eine injektive Abbildung $g : \beta \rightarrowtail \omega$, also muß β abzählbar sein.
□

Satz von Cantor-Bendixson

Für jede abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathbb{R}$ gibt es eine eindeutige Zerlegung
$F = P \cup A,\ P \cap A = \emptyset$ *mit*

(i) *P ist perfekt, A ist abzählbar,*

(ii) *$P = F^\alpha$ für ein abzählbares α.*

Beweis: Wir setzen

$$\alpha^* := \mu\alpha(F^\alpha = F^{\alpha+1}), P := F^{\alpha^*}.$$

Dann ist nach dem obigen Lemma α^* abzählbar und P offenbar perfekt. Für jedes $\alpha < \alpha^*$ ist die Restmenge $A_\alpha := F^\alpha - F^{\alpha+1}$ der isolierten Punkte von F^α abzählbar und damit auch

$$A := \bigcup_{\alpha<\alpha^*} A_\alpha$$

abzählbar. Damit haben wir die gesuchte Zerlegung $F = P \cup A$, deren Eindeutigkeit leicht nachzuweisen ist (benutze die Überabzählbarkeit von nicht-leeren perfekten Mengen).

Ein alternativer Beweis bestimmt P als die Menge der Kondensationspunkte von F. □

Eine abgeschlossene Menge reeller Zahlen, die überabzählbar ist, muß somit eine nicht-leere perfekte Teilmenge enthalten und folglich von der Mächtigkeit des Kontinuums sein. Mit dieser Methode kann man noch für einige weitere Mengen zeigen, daß sie CH erfüllen:

12.6 Die Borelschen Mengen

Die rationalen wie auch die irrationalen Zahlen erfüllen CH, sind aber weder offen noch abgeschlossen, sondern gehören zu F_σ- bzw. G_δ-Mengen:

- Eine G_δ-Menge ist von der Form $\bigcap_{n<\omega} G_n$ für eine abzählbare Folge offener Mengen $(G_n|n<\omega)$ (G benutzt man oft zur Bezeichnung offener Mengen (*Gebiete*), δ = abzählbarer Durchschnitt),

- eine F_σ-Menge ist von der Form $\bigcup_{n<\omega} F_n$ für eine abzählbare Folge abgeschlossener Mengen $(F_n|n<\omega)$ (F benutzt man oft zur Bezeichnung abgeschlossener Mengen (*fermé*), σ = abzählbare Vereinigung),

- eine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist von der Form $\bigcup_{n<\omega} M_n$ für eine abzählbare Folge von G_δ-Mengen $(M_n|n<\omega)$,

  eine $F_{\sigma\delta}$-Menge ist von der Form $\bigcap_{n<\omega} M_n$ für eine abzählbare Folge von F_σ-Mengen $(M_n|n<\omega)$, und ähnlich für $G_{\delta\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}\cdots$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar, also eine F_σ-Menge, sie ist jedoch keine G_δ-Menge; das Komplement, die Menge der Irrationalzahlen, ist somit eine G_δ-, aber keine F_σ-Menge. G_δ-Mengen sind übrigens genau die Mengen, die als Stetigkeitspunkte einer reellen Funktion auftreten können.

Im Jahr 1906 hat YOUNG gezeigt, daß CH auch für die G_δ-Mengen gilt, HAUSDORFF hat dies Ergebnis 1914 auf die $G_{\delta\sigma\delta}$ und $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$ verallgemeinert. Ein wesentlicher Fortschritt stellte die Verallgemeinerung auf die BOREL-Mengen dar:

- Die BOREL-Mengen (von reellen Zahlen) bilden die kleinste Klasse $\mathcal{B}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$, für die gilt

  1. alle offenen und abgeschlossenen Mengen sind in $\mathcal{B}$,
  2. $\mathcal{B}$ ist abgeschlossen unter (Komplementen von Mengen und) abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten.

Die BOREL-Mengen kann man auch als Hierarchie wie folgt erhalten:

$$
\begin{aligned}
\Sigma^0_1 &= \{G \mid G \text{ offen}\},\\
\Pi^0_\alpha &= \{X \mid \mathbb{R} - X \in \Sigma^0_\alpha\},\\
\Sigma^0_\alpha &= \{X \mid X = \bigcup_{n<\omega} X_i, \forall i < \omega\, X_i \in \Pi^0_{\xi_i}, \xi_i < \alpha\} \text{ für } \alpha > 1,\\
\mathcal{B} : &= \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi^0_\alpha.
\end{aligned}
$$

In dieser Bezeichnung besteht

- Σ^0_1 aus den offenen,
- Π^0_1 aus den abgeschlossenen,
- Σ^0_2 aus den F_σ-, Π^0_2 aus den G_δ-Mengen, usw.

Die G_δ-Mengen lassen sich gerade als die Stetigkeitsstellen von reellen Funktionen charakterisieren, während die Mengen $\{x \mid f'(x) \text{ existiert}\}$ für eine stetige reelle Funktion f eine $F_{\sigma\delta}$-Menge ist.

ALEXANDROV und (unabhängig) HAUSDORFF zeigten 1916, daß alle BORELschen Mengen CH erfüllen. Da es nur $2^{\aleph_0}$-viele Intervalle, daher auch nur ebensoviele offene und abgeschlossene Mengen gibt, gibt es auch nur $2^{\aleph_0}$-viele BOREL-Mengen (da man nur den Abschluß unter *abzählbaren* Vereinigungen zu bilden braucht, den man - wie in obiger Hierarchie - nur ω_1-oft zu bilden braucht), auch sie bilden immer noch nur einen kleinen Ausschnitt aller Mengen von reellen Zahlen (von denen es insgesamt $2^{2^{\aleph_0}}$-viele gibt).

Die Hierarchie der BOREL-Mengen läßt sich erweitern zur *projektiven Hierarchie* der Σ^1_n- und Π^1_n-Mengen; diese führt - mittels Projektionen statt abzählbarer Vereinigungen - von den BOREL-Mengen über die *analytischen* Mengen zu noch komplizierteren Mengen. Für die analytischen Mengen (Σ^1_1) haben 1917 SOUSLIN und LUSIN auch noch die die *Perfekte-Mengen-Eigenschaft* nachgewiesen: jede analytische Menge, die überabzählbar ist, enthält eine perfekte Menge und ist somit von der Mächtigkeit des Kontinuums. Leider läßt sich diese Methode nicht auf alle überabzählbaren Mengen erweitern; denn mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man zeigen, daß es eine überabzählbare Menge gibt, die *keine* nicht-leere perfekte Teilmenge enthält, und es ist möglich (d. h. verträglich mit den Axiomen von $\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH}$), daß es bereits eine Π^1_1-Menge gibt, die keine nicht-leere perfekte Teilmenge besitzt[1].

[1] Siehe hierzu auch den von U. FELGNER herausgegebenen Sammelband über *Mengenlehre* oder auch Y.N. MOSCHOVAKIS: *Descriptive Set Theory*

12.7 Verspielte Mengen

Für eine Teilmenge $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ des BAIREschen Raumes $\mathcal{N}$ betrachten wir das folgende 2-Personen-Spiel **G(A)**:

Zwei Spieler I und II wählen abwechselnd natürliche Zahlen, wobei Spielerin I beginnt:

$$\begin{array}{lcccccccccc} \text{I:} & a_0 & & a_2 & & a_4 & & a_6 & & \dots \\ \text{II:} & & a_1 & & a_3 & & a_5 & & a_7 & \dots \end{array}$$

Damit wird eine unendliche Folge $f = (a_0, a_1, \dots)$ erzeugt; Spielerin I gewinnt, falls $f \in A$, sonst gewinnt Spieler II.

Eine **Strategie** für I ist eine Abbildung

$$\sigma : \bigcup_{n<\omega} {}^{2n}\omega \to \omega,$$

welche also jeder Folge mit einer geraden Anzahl natürlicher Zahlen eine Zahl zuordnet, entsprechend ist eine **Strategie** für II eine Abbildung

$$\tau : \bigcup_{n<\omega} {}^{2n+1}\omega \to \omega.$$

Spielt I mit der Strategie σ (d. h. sie wählt $a_0 = \sigma(\emptyset), a_2 = \sigma((a_0, a_1)), \dots$), und spielt II mit der Strategie τ, so sei die dadurch entstehende Folge mit $\sigma^*\tau$ bezeichnet.

Eine **Gewinnstrategie** für I (und für das Spiel $G(A)$) ist eine Strategie σ, mit welcher I stets gewinnt, d. h. mit $\forall\tau\ \sigma^*\tau \in A$, ebenso ist eine **Gewinnstrategie** für II (und für das Spiel $G(A)$) eine Strategie τ, mit welcher II stets gewinnt, d. h. mit $\forall\sigma\ \sigma^*\tau \notin A$.

Das Spiel $G(A)$ (und damit auch die Menge A) heißt **determiniert** gdw I oder II eine Gewinnstrategie haben:

$$\begin{aligned} A \text{ determiniert} : \quad &\leftrightarrow \quad \exists\sigma\,\forall\tau\ \sigma^*\tau \in A \vee \exists\tau\,\forall\sigma\ \sigma^*\tau \notin A \\ &\leftrightarrow \quad \forall\tau\,\exists\sigma\ \sigma^*\tau \in A \to \exists\sigma\,\forall\tau\,\sigma^*\tau \in A. \end{aligned}$$

Einfache Mengen (wie endliche oder co-endliche Mengen) sind offensichtlich determiniert, ferner gilt:

- alle abgeschlossenen Mengen sind determiniert (GALE-STEWART 1953),

- alle F_σ-Mengen sind determiniert (WOLFE 1955),
- alle $G_{\delta\sigma}$-Mengen sind determiniert (DAVIS 1964),
- alle BOREL-Mengen sind determiniert (MARTIN 1975),

wobei das letzte Ergebnis auch unter dem Gesichtspunkt interessant ist, dass der Beweis notwendig das Ersetzungsaxiom erfordert (FRIEDMAN).

MYCIELSKI und STEINHAUS haben 1962 das folgende Axiom vorgeschlagen:

Axiom der Determiniertheit (AD)

$$\forall A \subseteq^\omega \omega \ \ A \text{ ist determiniert.}$$

Folgerungen aus AD

- Alle Mengen reeller Zahlen sind L-meßbar, haben die perfekte-Mengen-Eigenschaft (d. h. sie sind abzählbar oder enthalten eine perfekte Teilmenge) und erfüllen somit (CH), und es gilt das abzählbare Auswahlaxiom AC_ω. Ferner ist jeder Ultrafilter in $\mathcal{P}(\omega)$ ein Hauptfilter.
- Andererseits gilt das Auswahlaxiom nicht, die reellen Zahlen können nicht wohlgeordnet werden, die Restklassen von $\mathcal{P}(\omega)/I$, wobei I das Ideal der endlichen Mengen $\{x \subseteq \mathbb{N} \mid x \text{ endlich}\}$ ist, lassen sich nicht ordnen, und überhaupt ist die Kardinalzahltheorie recht bizarr: $\aleph_1$ ist mit der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ der reellen Zahlen nicht vergleichbar, zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ gibt es keine Mächtigkeit, zwischen $2^{\aleph_0}$ und $2^{(2^{\aleph_0})}$ jedoch genau 3 Mächtigkeiten.

Das Axiom AD kann somit als Alternative zum Auswahlaxiom angesehen werden, einigen positiven Ergebnissen stehen jedoch ungewöhnliche Eigenschaften gegenüber, insbesondere in der Theorie der Kardinalzahlen und Mächtigkeiten. Problematisch ist vor allem die Widerspruchsfreiheit dieses Axioms; um 1988 wurde gezeigt, daß die Widerspruchsfreiheit der Theorie $\mathsf{ZF}+\mathsf{DC}+\mathsf{AD}$ gleichwertig ist mit der Widerspruchsfreiheit der Theorie $\mathsf{ZF}+\mathsf{AC}$, zu welcher die Existenz gewisser “großer” Kardinalzahlen hinzugenommen wird.

Kapitel 13

Potenzen von Kardinalzahlen

Für Kardinalzahlen, die ja auch zugleich Ordinalzahlen sind, sind sowohl ordinale wie kardinale Operationen definiert. Diese Unterscheidung ist besonders wichtig im Falle der Potenzen, da z. B.

$$2^\omega = \omega \text{ (ordinale Potenz), während } 2^{\underline{\omega}} > \omega \text{ (kardinale Potenz)}.$$

Im Falle der Kardinalzahlen, insbesondere in der Alephschreibweise, soll die Potenzoperation im folgenden stets die kardinale Potenz darstellen (wenn nicht anderes vermerkt wird).

Aus dem Satz von HESSENBERG 11.9 folgen einige einfache Abschätzungen für die Potenzen:

Satz von Bernstein

$$\begin{array}{rcl} 2 \leq \kappa \leq \aleph_\alpha & \rightarrow & 2^{\aleph_\alpha} = \kappa^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha}, \quad d.h. \\ \beta \leq \alpha & \rightarrow & 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\beta^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha}. \end{array}$$

Beweis: Es ist

$$2 \leq \kappa \leq \aleph_\alpha \rightarrow 2^{\aleph_\alpha} \leq \kappa^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} \leq (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha \odot \aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha},$$

so daß hier überall die Gleichheit gelten muß. □

13.1 Unendliche Summen und Produkte

Mit Hilfe unendlicher Summen und Produkte werden wir eine (und praktisch die einzige) Ungleichheit in der Theorie der Kardinalzahlen erhalten, ausgedrückt im

Satz von KÖNIG-JOURDAIN, aus dem sich der Satz von CANTOR 11.5 als Spezialfall ergibt.

Definition

$(\kappa_x | x \in a)$ sei eine Folge von Kardinalzahlen. Dann heißt

$$\bigoplus_{x\in a} \kappa_x := |\bigcup_{x\in a}(\kappa_x \times \{x\})| \quad \textbf{kardinale Summe von } (\kappa_x|x \in a)$$
$$\bigotimes_{x\in a} \kappa_x := |\prod_{x\in a} \kappa_x| \quad \textbf{kardinales Produkt von } (\kappa_x|x \in a)$$

Darin sind offensichtlich die folgenden Spezialfälle enthalten:

$\kappa \oplus \lambda$	(endliche Summe)	für $a = 2$,
$\kappa \otimes \lambda$	(endliches Produkt	für $a = 2$,
$\kappa^{\underline{\lambda}} = \bigotimes_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$	(Potenz)	für $a = \lambda$, alle $\kappa_\xi = \kappa$.

Die unendliche Summe erlaubt eine Abschätzung der Vereinigungsmenge:

Lemma

$$|\bigcup_{\xi<\alpha} a_\xi| \preceq \bigoplus_{\xi<\alpha} |a_\xi|$$

Beweis: Definiere eine surjektive Abbildung

$$f: \bigcup_{\xi<\alpha}(a_\xi \times \{\xi\}) \twoheadrightarrow \bigcup_{\xi<\alpha} a_\xi$$

durch $f(y,\xi) = y$ für $\xi < \alpha, y \in a_\xi$. □

Der Wert von $\bigoplus_{\xi<\alpha} \kappa_\xi$ hängt natürlich nicht nur von den einzelnen κ_ξ ab, sondern auch von der Kardinalzahl der Indexmenge:

Abschätzungssatz

Es sei $\kappa \geq \aleph_0$ eine unendliche Kardinalzahl, $(\kappa_\xi | \xi < \alpha)$ eine Folge von Kardinalzahlen. Dann gilt:

(i) $\forall \xi < \alpha\ \kappa_\xi \leq \kappa \rightarrow \bigoplus_{\xi<\alpha} \kappa_\xi \leq \max(\kappa, |\alpha|) \wedge \bigotimes_{\xi<\alpha} \kappa_\xi \leq \kappa^{\underline{|\alpha|}}$,

(ii) $\forall \xi < \alpha\ |a_\xi| \leq \kappa \rightarrow |\bigcup_{\xi<\alpha} a_\xi| \leq \max(\kappa, |\alpha|)$,

(iii) $\forall \gamma < \alpha\ \kappa_\gamma \leq \bigoplus_{\xi<\alpha} \kappa_\xi$ (und ähnlich für das Produkt, falls alle $\kappa_\xi \neq 0$).

Beweis von (i): Es sei $\delta := |\alpha|, f : \alpha \leftrightarrow \delta$. Definiere eine injektive Abbildung

$$h : \bigcup_{\xi<\alpha} (\kappa_\xi \times \{\xi\}) \rightarrowtail \kappa \times \delta$$

durch $h(\gamma,\xi) = (\gamma, f(\xi))$ für $\gamma \in \kappa_\xi, \xi < \alpha$. □

Im Endlichen wächst das Produkt zweier Zahlen schneller als ihre Summe (außer für die Anfangsfälle: $1+1 > 1 \cdot 1$). Allgemeiner gilt:

$$(*) \qquad \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \qquad \text{für } \kappa, \lambda \geq 2$$

und diese $\leq$-Beziehung läßt sich auf den unendlichen Fall verallgemeinern:

Satz

$$\forall x \in a\ (2 \leq \kappa_x) \rightarrow \bigoplus_{x \in a} \kappa_x \leq \bigotimes_{x \in a} \kappa_x$$

Beweis: Nach obiger Vorbemerkung können wir annehmen, daß a mindestens 3 Elemente enthält. Um eine injektive Abbildung

$$h : \bigcup_{x \in a} (\kappa_x \times \{x\}) \rightarrowtail \prod_{x \in a} \kappa_x$$

zu definieren, beachten wir, daß jedes $z \in D(h)$ von der Form $z = (y,x)$ für genau ein $x \in a$ und genau ein $y < \kappa_x$ ist, welches durch eine Funktion f mit $D(f) = a$ und $f(x) < \kappa_x$ für $x \in a$ charakterisiert werden soll. Wir definieren daher

$$y \neq 0 : \quad h(y,x) = f \text{ mit } \quad f(u) = \begin{cases} 0 & \text{für } u \neq x, \\ y & \text{für } u = x. \end{cases}$$

$$y = 0 : \quad h(y,x) = f \text{ mit } \quad f(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u \neq x, \\ 0 & \text{für } u = x. \end{cases}$$

Die so definierte Funktion h ist injektiv, denn da a mindestens 3 Elemente enthält, nimmt $h(y,x)$ genau einen Wert nur einmal an, nämlich y (und zwar an der Stelle x). □

Für endliche Zahlen (≥ 2) wächst das Produkt echt stärker als die entsprechende Summe, wogegen für zwei unendliche Kardinalzahlen ihre Summe wieder gleich ihrem Produkt ist. Um eine echte $<$-Beziehung zu erhalten, muß die Voraussetzung nochmals verstärkt werden:

13.2 Satz von König-Jourdain

(i) $\forall x \in a\, (a_x \prec b_x) \rightarrow \bigcup_{x \in a} a_x \prec \prod_{x \in a} b_x$, bzw.

(ii) $\forall x \in a\, (\kappa_x < \lambda_x) \rightarrow \bigoplus_{x \in a} \kappa_x < \bigotimes_{x \in a} \lambda_x$.

Beweis: Es seien also κ_x, λ_x Kardinalzahlen mit $\forall x \in a\, (\kappa_x < \lambda_x)$. Wir setzen

$$b := \bigcup_{x \in a} (\kappa_x \times \{x\}), \quad c := \prod_{x \in a} \lambda_x$$

und müssen zeigen: $b \prec c$. Da $b \preceq c$ nach der Methode des vorausgegangenen Satzes gezeigt werden kann, müssen wir nur noch $b \not\sim c$ nachweisen, was - wie beim Satz von CANTOR 11.5 - indirekt erfolgt:

Angenommen, es wäre $f : b \rightarrow c$. Dann wird gelten, daß f nicht surjektiv sein kann, es also ein $h \in c$ gibt mit $h \notin W(f)$. Nun ist aber

$$W(f) = \{f(z) \mid z \in b\} = \{f(\beta, x) \mid x \in a \wedge \beta < \kappa_x\},$$

und wir werden mittels eines Diagonalargumentes ein h finden, so daß $h \in c$, aber

$$(*) \qquad \forall x \in a\, \forall \beta < \kappa_x\, h(x) \neq f(\beta, x)(x).$$

Dazu bemerken wir, daß für jedes $x \in a$ nach 11.6

$$|\{f(\beta, x)(x) | \beta < \kappa_x\}| \leq \kappa_x < \lambda_x,$$

insbesondere

$$\lambda_x - \{f(\beta, x)(x) \mid \beta < \kappa_x\} \neq \emptyset.$$

Das gesuchte $h \in \prod_{x \in a} \lambda_x$ mit der Eigenschaft (*) können wir also definieren durch

$$h(x) = \mu\gamma(\gamma \in \lambda_x - \{f(\beta, x)(x) \mid \beta < \kappa_x\}) \text{ für } x \in a.$$

□

Bemerkungen

1. Der Beweis des Satzes von KÖNIG-JOURDAIN (KÖNIG 1905, ZERMELO 1908) benutzt das Auswahlaxiom, was unvermeidbar ist, denn für $a_x = 0$ erhalten wir aus diesem Satz:

$$\forall x \in a\, (0 \prec b_x) \rightarrow 0 \prec \prod_{x \in a} b_x$$

und damit das Auswahlaxiom.

2. Für den Spezialfall $a_x = 1, b_x = 2$ erhält man
$$\bigoplus_{x\in a} 1 < \bigotimes_{x\in a} 2, \text{ d. h. } \quad |a| < |2^a|$$
und damit den Satz von CANTOR 11.5.

3. Als Korollar erhält man auch das folgende Monotoniegesetz für aufsteigende Folgen von Kardinalzahlen:

Korollar

Es sei $Lim(\lambda) \wedge \forall \xi, \eta < \lambda\, (\xi < \eta \rightarrow 0 < \kappa_\xi < \kappa_\eta)$. *Dann gilt:*

$$\bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_x < \bigotimes_{\xi<\lambda} \kappa_x.$$

Hausdorffsche Rekursionsformel

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$$

Beweis: Der Teil ($\geq$) ist klar. Andererseits ist für

$$\begin{aligned} \alpha+1 \leq \beta \quad &: \quad \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}, \\ \beta < \alpha+1 \quad &: \quad \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \bigoplus_{\gamma<\aleph_{\alpha+1}} \gamma^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \end{aligned}$$

nach (ii) des Abschätzungssatzes aus 13.1, wobei man für das erste $\leq$ die Regularität von $\aleph_{\alpha+1}$ (s. 13.5) benötigt. □

Beispiel

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1 \cdot \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Satz

$$\bigoplus_{\xi<\alpha+1} \aleph_\xi = \aleph_\alpha, \quad \bigoplus_{\xi<\lambda} \aleph_\xi = \aleph_\lambda \ \textit{für } Lim(\lambda)$$
$$\bigotimes_{\xi<\alpha+1} \aleph_\xi = \aleph_\alpha^{|\alpha|}, \quad \bigotimes_{\xi<\lambda} \aleph_\xi = \aleph_\lambda^{|\lambda|} \ \textit{für } Lim(\lambda)$$

Während die Mächtigkeit der Potenzmenge einer unendlichen Menge in ZFC weitgehend unbestimmt bleibt, gibt es jedoch Abschätzungen für

13.3 Eingeschränkte Potenzmengenoperationen

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{<\lambda}(a) : &= \{x \mid x \subseteq a \wedge |x| < \lambda\},\\ \mathcal{P}_{\leq\lambda}(a) : &= \{x \mid x \subseteq a \wedge |x| \leq \lambda\},\\ \mathcal{P}_{\lambda}(a) : &= \{x \mid x \subseteq a \wedge |x| = \lambda\}.\end{aligned}$$

Satz

Für unendliches a, κ, λ :

(i) $|\mathcal{P}_{<\omega}(a)| = |a|$,

(ii) $|\{f \mid Fkt(f) \wedge D(f) \subseteq \kappa \wedge D(f) \text{ } endlich \wedge W(f) \subseteq \lambda\}| = \max(\kappa, \lambda)$.

(iii) $|\mathcal{P}_{\lambda}(\kappa)| = |\mathcal{P}_{\leq\lambda}(\kappa)| = \kappa^{\lambda}$ für $\lambda \leq \kappa$, insbesondere:

(iv) $|\mathcal{P}_{\kappa}(\kappa)| = |\mathcal{P}(\kappa)| = \kappa^{\kappa} = 2^{\kappa}$.

Beweis von (i): Es ist

$$\kappa \leq |\{x \subseteq \kappa | x \text{ } endlich\}| \leq \bigoplus_{n<\omega} \kappa^n = \bigoplus_{n<\omega} \kappa \leq \kappa \otimes \omega = \kappa.$$

(ii): Es sei

$$a := \{f \mid Fkt(f) \wedge D(f) \subseteq \kappa \wedge D(f) \, endlich \wedge W(f) \subseteq \lambda\}.$$

Dann ist

- $|a| \geq \kappa$, da $f : \kappa \rightarrowtail a,\ f(\xi) = \{(\xi, 0)\}$ injektiv ist,
- $|a| \geq \lambda$, da $f : \lambda \rightarrowtail a,\ f(\xi) = \{(0, \xi)\}$ injektiv ist,
- $|a| \leq |\kappa \times \lambda| = \max(\kappa, \lambda)$, da $a \subseteq \{f \subseteq \kappa \times \lambda \mid f \text{ } endlich\}$.

(iii): Mit AC erhält man eine injektive Abbildung

$$\{x \subseteq \kappa \mid |x| \leq \lambda\} \rightarrowtail \kappa^{\lambda}$$

durch die Zuordnung

$$x \mapsto f_x \text{ } mit \text{ } D(f_x) = \lambda \wedge W(f_x) = x,$$

und somit ist

$$(*) \qquad |\{x \subseteq \kappa \mid |x| \leq \lambda\}| \leq \kappa^\lambda.$$

Andererseits ist für $\lambda \leq \kappa$: $\kappa = \kappa \otimes \lambda$, und somit ist κ in λ-viele disjunkte Mengen der Mächtigkeit λ zerlegbar:

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} f(\xi) \quad \text{mit}$$
$$\forall \xi, \eta < \lambda (\xi \neq \eta \rightarrow f(\xi) \cap f(\eta) = \emptyset) \quad \wedge \quad \forall \xi < \lambda\, |f(\xi)| = \kappa.$$

Also ist auch

$$(**) \qquad \kappa^\lambda = \bigotimes_{\xi<\lambda} \kappa \leq |\{x \subseteq \kappa \mid |x| = \lambda\}|,$$

denn durch $g \mapsto W(g)$ wird eine injektive Abbildung

$$\prod_{\xi<\lambda} f(\xi) \rightarrowtail \{x \subseteq \kappa \mid |x| = \lambda\}$$

definiert. Aus (*) und (**) erhalten wir nun

$$\kappa^\lambda \leq |\{x \subseteq \kappa \mid |x| = \lambda\}| \leq |\{x \subseteq \kappa \mid |x| \leq \lambda\}| \leq \kappa^\lambda$$

und somit überall die Gleichheit. □

Anwendung auf Abschlußoperationen

Gegeben sei eine Funktion F und eine Menge a. Nach 9.3 gibt es eine Menge b, welche a enthält und unter F abgeschlossen ist:

$$a \subseteq b \wedge \forall x \in b\, F(x) \in x.$$

Das kleinste (bzgl. $\subseteq$) derartige b nennt man den **Abschluß** von a unter F.

Wenn wir den Existenzbeweis (mit Hilfe der numerischen Rekursion) noch einmal durchführen und dabei auf die Mächtigkeiten der betreffenden Mengen achten, so sehen wir, daß für die Mächtigkeit des Abschlusses gilt:

$$|a| \leq \aleph_\alpha \rightarrow \exists b (a \subseteq b \wedge \forall x \in b\, F(x) \in x \wedge |b| \leq \aleph_\alpha),$$

wobei man auf beiden Seiten auch $\leq \aleph_\alpha$ durch $= \aleph_\alpha$, sowie eine Funktion F durch endlich- oder abzählbar-viele Funktionen ersetzen kann.

13.4 Konfinalität

In der Reihe der $\aleph$´s fällt auf, daß $\aleph_\omega$ ein Limes von abzählbar-vielen kleineren Kardinalzahlen ist, selbst aber nicht abzählbar ist. Die Folge der Ordinalzahlen $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$, aber auch $\aleph_2, \aleph_{17}, \aleph_{35} \ldots$, haben dasselbe Supremum $\aleph_\omega$, bilden also eine mit $\aleph_\omega$ confinale Menge:

Definition

$$\begin{aligned} a \subseteq \alpha \textbf{ confinal in } \alpha : &\leftrightarrow \bigcup a = \alpha \\ &\leftrightarrow \forall \xi < \alpha\, \exists \eta \in a\, \xi < \eta \\ cf(\lambda) : &= \mu\beta\, \exists f (f : \beta \to \lambda \wedge W(f) \textit{ confinal in } \lambda) \\ &= \mu\beta\, \exists f (f : \beta \to \lambda \wedge \lambda = \bigcup_{\eta<\beta} f(\eta)) \end{aligned}$$

$cf(\lambda)$ heißt **Konfinalitätsindex** von λ, wobei λ eine Limeszahl sei. In den übrigen Fällen (die weniger interessieren) setzt man $cf(0) = 0, cf(\alpha + 1) = 1$.

Lemma

(i) $cf(\alpha) \leq \alpha$, $Lim(\lambda) \to Lim(cf(\lambda))$,

(ii) $cf(\aleph_0) = \aleph_0$, $cf(\aleph_\omega) = cf(\aleph_{\omega+\omega}) = \omega$, allgemeiner:

(iii) $Lim(\lambda) \to cf(\aleph_\lambda) = cf(\lambda)$.

Definition

$$\begin{aligned} reg(\alpha) : &\leftrightarrow cf(\alpha) = \alpha \qquad \textbf{regulär} \\ sing(\alpha) : &\leftrightarrow cf(\alpha) < \alpha \qquad \textbf{singulär} \end{aligned}$$

Insbesondere sind

$0, 1, \aleph_0$	regulär, dagegen
$2, 3 \ldots, n+1, \ldots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+\omega}, \aleph_{\aleph_\omega}$	singulär.

Wir werden später sehen, daß alle unendlichen kardinalen Nachfolgerzahlen, also alle $\aleph_{\alpha+1}$, regulär sind.

Lemma

Für Limeszahlen λ gilt:

(i) $cf(\lambda)$ ist eine unendliche Kardinalzahl,

(ii) $cf(\lambda) = \mu\beta\ \exists f(f : \beta \to \lambda \wedge f\ monoton wachsend \wedge \lambda = \bigcup_{\eta<\beta} f(\eta))$,

(iii) $cf(cf(\lambda)) = cf(\lambda)$, *insbesondere ist* $cf(\lambda)$ *stets eine reguläre Kardinalzahl.*

Beweis von (i): Es sei für geeignete f, g

$$\beta = cf(\lambda), f : \beta \to \lambda \wedge \lambda = \bigcup_{\eta<\beta} f(\eta),\ g : |\beta| \leftrightarrow \beta.$$

Dann ist auch $\lambda = \bigcup_{\eta<|\beta|} f(g(\eta))$, also $|\beta| = \beta$ wegen der Minimalität von β als Konfinalitätsindex.

(ii) folgt daraus, daß für eine Funktion $f : \beta \to \lambda$ die monotone Aufzählung von $W(f)$ "kürzer" als $D(f)$ ist, d. h. für ein monoton wachsendes $g : \beta \to \lambda$ mit $W(g) = W(f)$ ist $\delta \leq \beta$.

(iii) beweist man ähnlich wie (i) unter Benutzung von (ii). □

Eine Vereinigung endlich-vieler endlicher Mengen ist wieder endlich; ähnliches gilt für den Fall von Mengen einer Kardinalität < als eine reguläre Kardinalzahl:

13.5 Eigenschaften regulärer Kardinalzahlen

Es sei $\kappa \geq \omega$ eine Kardinalzahl. Dann gilt:

(i) $reg(\kappa) \leftrightarrow \forall x(|x| < \kappa \wedge \forall y \in x\ |y| < \kappa \to |\bigcup_{y\in x} y| < \kappa)$,

(ii) $reg(\kappa) \leftrightarrow \forall \alpha < \kappa\, \forall f(f : \alpha \to \kappa \to \bigoplus_{\xi<\alpha} |f(\xi)| < \kappa)$,

d. h. κ ist regulär gdw die Summe von $< \kappa$-vielen Kardinalzahlen $< \kappa$ auch wieder $< \kappa$ ist, insbesondere

(iii) $reg(\kappa) \wedge b = \bigcup_{x\in a} a_x \wedge |b| = \kappa \to |a| \geq \kappa \vee \exists x \in a\,(|a_x| = \kappa)$.

Satz

$\aleph_0$ und alle Nachfolgerkardinalzahlen $\aleph_{\alpha+1}$ sind regulär.

Beweis: Annahme: $\delta := cf(\aleph_{\alpha+1}) < \aleph_{\alpha+1}$. Dann gibt es also ein

$$f : \delta \to \aleph_{\alpha+1} \text{ mit } \aleph_{\alpha+1} = \bigcup_{\eta<\delta} f(\eta).$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} |\delta| < \aleph_{\alpha+1} \quad &\wedge \quad \forall\eta < \delta\ |f(\eta)| < \aleph_{\alpha+1}, \text{ somit} \\ |\delta| \leq \aleph_{\alpha} \quad &\wedge \quad \forall\eta < \delta\ |f(\eta)| \leq \aleph_{\alpha}, \text{ also} \\ |\aleph_{\alpha+1}| \quad &= \quad |\bigcup_{\eta<\delta} f(\eta)| \leq \aleph_{\alpha}, \end{aligned}$$

Widerspruch! □

Offen bleibt der Fall der Limeskardinalzahlen $\aleph_\lambda$ mit Limeszahlen λ; alle bekannten derartigen Zahlen, wie

$$\aleph_\omega, \aleph_{\omega+\omega}, \aleph_{\aleph_\omega}, \aleph_{\aleph_{\aleph_1}} \dots$$

sind singulär. Reguläre Limeskardinalzahlen heißen *unerreichbare* Zahlen:

Definition (HAUSDORFF 1908, TARSKI, ZERMELO 1930)

Es sei $\kappa > \omega$ eine überabzählbare Kardinalzahl.

$$\begin{aligned} \kappa\ (schwach)\ unerreichbar: \quad &\leftrightarrow \quad reg(\kappa) \wedge \exists\lambda(Lim(\lambda) \wedge \kappa = \aleph_\lambda) \\ &\leftrightarrow \quad reg(\kappa) \wedge \forall\alpha < \kappa\ \alpha^+ < \kappa \\ \kappa\ (stark)\ unerreichbar: \quad &\leftrightarrow \quad reg(\kappa) \wedge \forall\alpha < \kappa\ 2^{\underline{\alpha}} < \kappa \end{aligned}$$

Bemerkungen

- Manchmal zählt man auch $\aleph_0$ zu den unerreichbaren Kardinalzahlen (diese Zahl ist regulär und erfüllt auch die beiden letzten der obigen Bedingungen), und alle unerreichbaren Zahlen sind auch schwach unerreichbar. Falls man die

Allgemeine Kontinuumshypothese GCH $\quad \forall\alpha\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^+$

voraussetzt, stimmen die schwach unerreichbaren mit den (stark) unerreichbaren Zahlen überein.

- Für ein unerreichbares $\kappa > \omega$ muß gelten:

$$\kappa = \aleph_\kappa = \mathsf{D}(\aleph)(\kappa) = \mathsf{DD}(\aleph)(\kappa) = \ldots,$$

  d. h. κ ist Fixpunkt der $\aleph$-Funktion, Fixpunkt der Ableitung der $\aleph$-Funktion, Fixpunkt der Ableitung der Ableitung der $\aleph$-Funktion ...

  Falls die Mengenlehre ZF widerspruchsfrei ist, kann man in ZFC die Existenz unerreichbarer Zahlen $> \aleph_0$ nicht beweisen, denn für ein derartiges κ ist die Menge V_κ (mit der gewöhnlichen $\in$-Beziehung) ein Modell von ZFC.

Wir fassen zusammen:

13.6 Die wichtigsten Eigenschaften der Potenz

Für Kardinalzahlen $\kappa, \lambda \geq \omega$ gelten die folgenden Beziehungen:

(i)	$2^\kappa > \kappa$	(CANTOR), sogar:
(ii)	$cf(2^\kappa) > \kappa$	und allgemeiner:
(iii)	$cf(\lambda^\kappa) > \kappa$	und
(iv)	$\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$.	

Beweis von (ii): Annahme: es gibt ein

$$f : \delta \to 2^\kappa \text{ mit } \delta \leq \kappa \wedge 2^\kappa = \bigcup_{\eta<\delta} f(\eta).$$

Dann ist $\forall \eta < \delta \, |f(\eta)| < 2^\kappa$ und somit

$$2^\kappa = |\bigcup_{\eta<\delta} f(\eta)| \leq \bigoplus_{\eta<\delta} |f(\eta)| < \bigotimes_{\eta<\delta} 2^\kappa = (2^\kappa)^{|\delta|} = 2^{\kappa \otimes |\delta|} = 2^\kappa$$

(wobei wir den Satz von KÖNIG-JOURDAIN benutzt haben), Widerspruch!

(iii) beweist man ähnlich. Zum Beweis von (iv) können wir κ als singulär und damit Limeskardinalzahl voraussetzen. Es sei mit $\lambda = cf(\kappa)$

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha_\xi = \bigcup_{\xi<\lambda} \kappa_\xi, \; \kappa_\xi = \alpha_\xi^+.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\kappa &\leq \bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \leq \kappa \otimes \lambda = \kappa, \quad \text{also} \\
\kappa &= \bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi, \quad \text{wobei alle } \kappa_\xi < \kappa. \quad \text{Somit} \\
\kappa &< \bigotimes_{\xi<\lambda} \kappa = \kappa^\lambda = \kappa^{cf(\kappa)} \quad \text{nach KÖNIG-JOURDAIN.} \qquad \Box
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $cf(2^{\aleph_0}) > \omega$, also

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega, \aleph_{\omega+\omega}, \aleph_{\aleph_\omega} \cdots,$$

aber mehr läßt sich in ZFC nicht beweisen:

Satz von Easton

Über die Potenzen $2^{\aleph_\alpha}$ für reguläres $\aleph_\alpha$ läßt sich in ZFC *(also ohne die Allgemeine Kontinuumshypothese* GCH *anzunehmen) nur beweisen:*

(i) $\aleph_\alpha < \aleph_\beta \rightarrow 2^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta}$,

(ii) $cf(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$.

Tatsächlich gilt nämlich: Ist ZF widerspruchsfrei und $F : Cn \rightarrow Cn$ eine Funktion mit den Eigenschaften

(i) $\kappa < \lambda \rightarrow 2^\kappa \leq 2^\lambda$,

(ii) $cf(F(\kappa)) > \kappa$

und ist F "vernünftig" definiert (z. B. *nicht* $F(\kappa) = (2^\kappa)^+$), so existiert ein Modell von ZFC mit

$$F(\kappa) = 2^\kappa \text{ für alle regulären } \kappa.$$

Für singuläres κ ist in dem Modell 2^κ so "klein wie möglich", im allgemeinen aber nicht so frei wählbar.

Definition

$$2^{<\kappa} := \sup_{\lambda<\kappa} 2^{\underline{\lambda}} \qquad \text{schwache Potenz von } \kappa.$$

Aus GCH folgt natürlich, daß $2^{<\kappa} = \kappa$ für alle unendlichen Kardinalzahlen ist.

Satz

Für jede Limeskardinalzahl κ gilt:

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$$

Beweis: Es sei also (wie im Beweis von 13.6 (iv))

$$\kappa = \bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \qquad \text{mit } \lambda = cf(\kappa) \wedge \forall \xi < \kappa \; \kappa_\xi < \kappa.$$

Dann ist

$$2^\kappa = 2^{\bigoplus_{\xi<\lambda}\kappa_\xi} = \bigotimes_{\xi<\lambda} 2^{\kappa_\xi} \leq (2^{<\kappa})^{\underline{\lambda}} \leq (2^\kappa)^{\underline{\lambda}} = 2^\kappa$$

wegen $\lambda \leq \kappa$. □

Daß der Wert von 2^κ für singuläre κ nicht plötzlich springen kann, besagt der

Satz von Bukowsky-Hechler

κ sei eine singuläre Kardinalzahl. Dann gilt:

$$\exists \gamma_0 \, \forall \gamma \, (\gamma_0 \leq \gamma < \kappa \to 2^\gamma = 2^{\gamma_0}) \to 2^\kappa = 2^{\gamma_0}.$$

Beweis: Wir können annehmen, daß $cf(\kappa) \leq \gamma_0$. Dann ist nach Voraussetzung $2^{<\kappa} = 2^{\gamma_0}$ und somit nach obigem Satz:

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} = (2^{\gamma_0})^{cf(\kappa)} = 2^{\gamma_0}.$$

□

Bemerkung

Man kann nun zeigen, daß

1. die Potenzen der Form 2^κ sich mit Hilfe der *Gimel*-Funktion $\gimel(\kappa) = \kappa^{cf(\kappa)}$ bestimmen lassen,

2. die Potenzen der Form $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ sich mit Hilfe der cf-Funktion, der Gimel-Funktion $\gimel(\kappa) = \kappa^{cf(\kappa)}$ und den Werten $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$ für $\gamma < \alpha$ bestimmen lassen.

Setzt man die Allgemeine Kontinuumshypothese voraus, so ist $\gimel(\kappa) = \kappa^+$ und dann lassen sich die allgemeinen Potenzen besonders leicht angeben:

Satz (GCH)

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & \text{falls} \quad \aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha), \\ \aleph_{\alpha+1} & \text{falls} \quad cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha, \\ \aleph_{\beta+1} & \text{falls} \quad \aleph_\alpha \leq \aleph_\beta. \end{cases}$$

Hinsichtlich des Wertes von 2^κ für singuläres κ gibt es noch verschiedene Einzelresultate:

- Ist $\aleph_\lambda$ singulär mit überabzählbarer Konfinalität, so überträgt sich die Kontinuumshypothese von den Zahlen unterhalb von $\aleph_\lambda$ auf $\aleph_\lambda$ selbst (SILVER 1974):
$$\forall \beta < \lambda \; 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1} \rightarrow 2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}.$$
- Ein Ergebnis von SHELAH 1989 betrifft eine singuläre Kardinalzahl von abzählbarer Konfinalität:
$$\forall n < \omega \; 2^{\aleph_n} < \aleph_\omega \rightarrow 2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\aleph_4}.$$
- Schließlich gilt nach PATEI folgendes interessante Ergebnis:
$$\forall \alpha \; 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\gamma} \textit{ für ein festes } \gamma \rightarrow \gamma < \omega.$$

Teil V

Reflexionen über Mengen

Kapitel 14

Partielle Reflexion

14.1 Die Levy-Hierarchie der mengentheoretischen Formeln

Am Anfang hatten wir bereits **beschränkte Quantoren** $\forall x \in a$, $\exists x \in a$ eingeführt als Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \forall x \in a\, \varphi &\quad \text{steht für} \quad \forall x(x \in a \rightarrow \varphi), \\ \exists x \in a\, \varphi &\quad \text{steht für} \quad \exists x(x \in a \wedge \varphi). \end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir nur Formeln der engeren ZF-Sprache, also ohne Klassenterme (die sich ja notfalls eliminieren lassen). Diese Formeln werden nach A. LEVY 1965 gemäß ihrer Komplexität klassifiziert:

Definition

$$\begin{aligned} \varphi \text{ ist } \Delta_0\text{-Formel:} &\quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \quad \text{enthält höchstens beschränkte Quantoren} \\ \varphi \text{ ist } \Sigma_1\text{-Formel:} &\quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_m\, \psi \quad \text{für eine } \Delta_0\text{-Formel } \psi \\ \varphi \text{ ist } \Pi_1\text{-Formel:} &\quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_m\, \psi \quad \text{für eine } \Delta_0\text{-Formel } \psi \end{aligned}$$

Allgemeiner gilt (mit $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$):

$$\begin{aligned} \Sigma_{n+1}\text{-Formeln sind von der Form} &\quad \exists x_1 \ldots \exists x_m\, \psi \quad \text{für eine } \Pi_n\text{-Formel } \psi, \\ \Pi_{n+1}\text{-Formeln sind von der Form} &\quad \forall x_1 \ldots \forall x_m\, \psi \quad \text{für eine } \Sigma_n\text{-Formel } \psi. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung werden wir auch endliche Variablenfolgen mit überstrichenen Variablen bezeichnen:

$$\begin{array}{rll} \exists\overline{x} & \text{steht für} & \exists x_1 \dots \exists x_m, \\ \overline{x} \in a & \text{steht für} & x_1 \in a \wedge \dots \wedge x_m \in a, \\ \exists\overline{x} \in a & \text{steht für} & \exists x_1 \in a \dots \exists x_m \in a, \end{array}$$

und entsprechend für den $\forall$-Quantor.

Die obige Klassifizierung gilt nur für *pränexe* Formeln (in welchen alle - zumindest die unbeschränkten - Quantoren am Anfang der Formel stehen), aber man kann leicht jede mengentheoretische Formel zu einer logisch äquivalenten pränexen Formel umformen. Daher werden wir Formeln, die logisch äquivalent sind, bei dieser Klassifizierung nicht unterscheiden (eine Σ_3-Formel ist damit dann auch eine Π_{17}-Formel). Gelegentlich zieht man aber zur Umformung auch mengentheoretische Axiome heran; ist T eine Theorie, also bestimmt durch ihre Axiome, so sei auch

Σ_n^{T} die Menge aller Formeln, die in T äquivalent sind zu einer Σ_n-Formel,
Π_n^{T} die Menge aller Formeln, die in T äquivalent sind zu einer Π_n-Formel,

und $\Delta_n^{\mathsf{T}} := \Sigma_n^{\mathsf{T}} \cap \Pi_n^{\mathsf{T}}$, d. h. eine Δ_n^{T}- Formel ist in v äquivalent sowohl zu einer Σ_n- wie auch zu einer Π_n-Formel.

Bemerkungen und Beispiele

1. Unter Voraussetzung des Paarmengenaxioms können mehrere gleichartige Quantoren zusammengezogen werden:

   $$\exists x \exists y\, \varphi \leftrightarrow \exists z \exists x \in z \exists y \in z\, \varphi$$

   und ähnlich für $\forall$-Quantoren. Somit kann man Σ_1-Formeln auch charakterisieren als Formeln, die mit nur einem $\exists$-Quantor beginnen und dann nur noch beschränkte Quantoren enthalten.

2. Wegen

   $$\exists x \in \bigcup a \dots \leftrightarrow \exists y \in a \exists x \in a \dots$$

   können auch $\exists x \in \bigcup a, \exists x \in \bigcup\bigcup a, \forall x \in \bigcup a \dots$ als beschränkte Quantoren aufgefaßt werden, *nicht* aber $\exists x \in \mathcal{P}(a)$!

3. Die wichtigsten elementaren mengentheoretischen Begriffe (BOOLEsche Algebra, Relationen- und Funktionenkalkül, Ordinalzahltheorie) sind Δ_0- oder zumindest Δ_0^{Paar}-Formeln:

$$a = b,\ a = \emptyset,\ a \subseteq b,\ a = b \cap c,\ a = b \cup c,\ a = \bigcap b,\ a = \bigcup b,$$
$$a = \{b, c\},\ a = (b, c),\ Rel(r),\ a = D(f),\ b = W(f),$$
$$Fkt(f),\ f : a \to b,\ c = a \times b, <\ \textit{lineare Ordnung auf}\ a, \ldots$$
$$Ord(a), Lim(a), Nf(a), a \in \omega \ldots$$

4. Dagegen führen die Potenzmengenoperation sowie kardinale Begriffe meistens zu komplizierteren Formeln:

Σ_1-Formeln sind:	$\exists x(x = \omega),\ a \sim b,\ a\ \textit{ist abzählbar},$
Π_1-Formeln sind:	$a = \mathcal{P}(b), Card(a), <\ \textit{Wohlordnung auf}\ a.$

$\exists x(x = \omega)$ ist natürlich in ZF beweisbar, aber die übrigen Formeln lassen sich selbst in ZFC nicht in Δ_0-Formeln umformen!

14.2 Relativierung

Die Formel φ^a entsteht aus φ, indem man jeden Quantor Qx in der Formel φ durch den beschränkten Quantor $Qx \in a$ ersetzt. (Dabei ist darauf zu achten, daß gegebenenfalls definierte Begriffe bzw. Abkürzungen durch die ursprünglichen Ausdrücke der formalen ZF-Sprache zu ersetzen sind!) Wir lesen

$$\varphi^a \quad \text{als:} \quad \varphi\ \textbf{relativiert}\ \text{nach}\ a.$$

Liest man φ als eine Aussage über den Bereich aller Mengen, so ist φ^a die entsprechende Aussage über die Elemente von a. Die Bedeutung der Δ_0-Formeln liegt darin, daß sie für transitive Mengen a in beiden Fällen dasselbe besagen (*absolut* sind):

Satz

(i) (**Absolutheit** von Δ_0-Formeln): *Ist $\varphi(\overline{a})$ eine Δ_0-Formel, so gilt:*

$$trans(a) \wedge \overline{a} \in a \to [\varphi(\overline{a}) \leftrightarrow \varphi^a(\overline{a})],$$

(ii) (**Aufwärts-Absolutheit** von Σ_1-Formeln): *Ist* $\varphi(\overline{a})$ *eine* Σ_1*-Formel, so gilt:*

$$trans(a) \wedge \overline{a} \in a \to [\varphi^a(\overline{a}) \to \varphi(\overline{a})],$$

(iii) (**Abwärts-Absolutheit** von Π_1-Formeln): *Ist* $\varphi(\overline{a})$ *eine* Π_1*-Formel, so gilt:*

$$trans(a) \wedge \overline{a} \in a \to [\varphi(\overline{a}) \to \varphi^a(\overline{a})],$$

(iv) (**Absolutheit** von Δ_1-Formeln): *Ist* $\varphi(\overline{a})$ *eine* Δ_1*-Formel, so gilt:*

$$trans(a) \wedge \overline{a} \in a \to [\varphi(\overline{a}) \leftrightarrow \varphi^a(\overline{a})].$$

14.3 Die Theorie KP von Kripke-Platek

Diese Theorie wurde von S.A. KRIPKE und R.A. PLATEK entwickelt als mengentheoretische Grundlage für eine verallgemeinerte Rekursionstheorie und besitzt folgende Axiome:

Extensionalitätsaxiom	(Ext)	$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \to a = b$
Paarmengenaxiom	(Paar)	$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x = a \vee x = b)$
Summenaxiom	(Sum)	$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists x \in a\, z \in x)$
Δ_0-**Aussonderung**	(Δ_0-AusS)	$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$
Δ_0-**Collection**	(Δ_0-CollS)	$\forall x \exists y\, \varphi(x,y) \to \exists z \forall x \in a \exists y \in z\, \varphi(x,y)$
Fundierungsschema	(FundS)	$\exists x \varphi(x) \to \exists x(\varphi(x) \wedge \forall y \in x \neg\varphi(y))$

Dabei soll in den Δ_0-Schemata die Formel φ jeweils eine beliebige Δ_0-Formel sein (im Fundierungsschema dagegen eine beliebige Formel).

Lemma

Folgende Mengen existieren in KP und sind (wegen Ext) eindeutig bestimmt:

$$\emptyset,\, a \cap b,\, a \cup b,\, \bigcup a,\, \{a,b\},\, (a,b),\, a \times b.$$

Beweis: Interessant (und nicht-trivial) ist nur die Existenz von $a \times b$:

Es sei $x \in a$. Dann gilt $\forall y \in b\, \exists w\; w = (x,y)$, also existiert nach Δ_0-CollS ein u mit

$$\forall y \in b\, \exists w \in u\; w = (x,y),$$

d. h. wir haben gezeigt

$$\forall x \in a \exists u \forall y \in b \exists w \in u\, w = (x,y).$$

Somit existiert wiederum nach Δ_0-CollS ein c mit

$$\forall x \in a \exists u \in c\, \forall y \in b \exists w \in u\, w = (x,y).$$

Setzen wir nun $d := \bigcup c$, so erhalten wir:

$$\forall x \in a \forall y \in b\ (x,y) \in d$$

und somit $a \times b \subseteq d$. Nun brauchen wir nur noch das Δ_0-AusS anzuwenden. $\square$

Flexibler als der Begriff der Σ_1-Formel ist der Begriff der Σ-*Formel*:

Definition

Die Klasse der Σ-*Formeln* ist die kleinste Klasse aller Formeln, welche die Δ_0-Formeln enthält und abgeschlossen ist unter $\vee, \wedge, \forall x \in a, \exists x \in a$ sowie unter $\exists$. Π-*Formeln* sind ähnlich definiert, $\Delta^{\mathsf{T}} := \Sigma^{\mathsf{T}} \cap \Pi^{\mathsf{T}}$.

Somit ist jede Σ_1-Formel auch eine Σ-Formel, aber z. B. ist für eine Δ_0-Formel φ

$$\forall x \in a\, \exists y\, \forall u \in y\, \varphi$$

eine Σ-Formel, aber keine Σ_1-Formel. Da man im Δ_0-AusS offenbar "$\to$" durch "$\leftrightarrow$" ersetzen kann, ist in KP jede Σ-Formel äquivalent zu einer Σ_1-Formel.

Bemerkungen

Mengen, die durch eine Δ- (bzw. Σ-Formel) definierbar sind, entsprechen den *rekursiven* (bzw. *rekursiv-aufzählbaren*) Mengen natürlicher Zahlen. Tatsächlich ist die Theorie KP der zulässigen Mengen entwickelt worden, um eine geeignete (mengentheoretische) Verallgemeinerung dieser Begriffe von den Zahlen auf größere Bereiche zu erhalten.

In KP läßt sich das Δ_0-AusS verallgemeinern zum Δ-AusS, das Δ_0-CollS zum Δ-CollS, und es gilt ein Ersetzungsaxiom sowie ein Rekursionssatz für Σ-Funktionen. Zu diesen Funktionen, die - wie die rekursiven Funktionen der Zahlentheorie - sehr gute Abschlußeigenschaften besitzen, gehören insbesondere also die arithmetischen Operationen auf den Ordinalzahlen. Man kann daher KP auch als eine "effektive" Mengenlehre auffassen. Transitive Mengen A, die (mit der gewöhnlichen $\in$-Beziehung) ein Modell von KP bilden, heißen *zulässige Mengen (admissible sets)*; die kleinste zulässige Menge ist $HF = V_\omega$.

14.4 Partielle Reflexionsprinzipien

Wir gehen aus von der folgenden **Basistheorie** S_0 mit den Axiomen

Extensionalitätsaxiom	(Ext)	$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \to a = b$
Δ_0-Aussonderung	(Δ_0-AusS)	$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow x \in a \land \varphi(x))$ (φ Δ_0-Formel)
Fundierungsaxiom	(Fund)	$a \neq \emptyset \to \exists x\, x \cap a = \emptyset$

Hinzunehmen werden wir die folgenden **partiellen Reflexionsprinzipien**

$\mathsf{PR}_{\mathsf{trans}}$ $\quad \varphi(\overline{a}) \to \exists u\,[trans(u) \land \overline{a} \in u \land \varphi^u(\overline{a})]$ bzw.
$\mathsf{PR}_{\mathsf{strans}}$ $\quad \varphi(\overline{a}) \to \exists u\,[strans(u) \land \overline{a} \in u \land \varphi^u(\overline{a})]$,

wobei

$$strans(a) :\leftrightarrow trans(a) \land \forall y(y \subseteq x \in a \to y \in a) \qquad \textbf{stark transitiv}.$$

Diese Axiome besagen, daß jede Eigenschaft, die im Bereich *aller Mengen* gilt, auch im Bereich einer geeigneten Menge gilt. Es seien

$$\mathsf{T}_1 := \mathsf{S}_0 + \mathsf{PR}_{\mathsf{trans}}, \qquad \mathsf{T}_2 := \mathsf{S}_0 + \mathsf{PR}_{\mathsf{strans}}$$

die so entstehenden Theorien.

Satz

(i) In T_1 sind die Axiome $\mathsf{Null}, \mathsf{Paar}, \mathsf{Sum}, \mathsf{Un}, \mathsf{FundS}$ beweisbar,

(ii) in T_2 gilt zusätzlich das Potenzmengenaxiom Pot.

Beweis: Das *Nullmengenaxiom* folgt aus dem Δ_0-AusS, für das *Paarmengenaxiom* wähle in $\mathsf{PR}_{\mathsf{trans}}$ die Formel

$$\varphi(a,b) :\leftrightarrow a = a \land b = b,$$

woraus die Existenz einer Menge u mit $a, b \in u$ folgt. $\{a,b\}$ ist dann also eine Menge nach dem Δ_0-AusS. Ebenso liefert $\mathsf{PR}_{\mathsf{trans}}$ für jede Menge a eine transitive Menge u mit $a \in u$, also auch $\bigcup a \subseteq u$, und wir brauchen nur noch Δ_0-AusS anzuwenden, um das *Summenaxiom* zu erhalten.

Somit ist beweisbar:

$$\exists u(u=\emptyset) \,\land\, \forall x \exists y\,(y=x\cup\{x\}).$$

Eine Anwendung von $\mathsf{PR}_{\mathsf{trans}}$ ergibt die Existenz einer transitiven Menge u mit

$$\begin{aligned}&[\exists x(x=\emptyset) \,\land\, \forall x \exists y\,(y=x\cup\{x\})]^u, \text{ also}\\ &\emptyset\in u \,\land\, \forall x\in u\,\exists y\in u\,(x\cup\{x\}\in u),\end{aligned}$$

da $x=\emptyset$ und $x\cup\{x\}$ Δ_0-Formeln sind.

Zum Beweis des *Fundierungsschemas* nehmen wir an, daß

$$\varphi(a) \,\land\, \forall x\,(\varphi(x)\to\exists y\in x\,\varphi(y)).$$

Das Reflexionsprinzip liefert dann die Existenz einer transitiven Menge u (mit den Parametern von φ als Elementen von u und)

$$\begin{aligned}&a\in u \,\land\, \varphi^u(a) \,\land\, (\forall x\,(\varphi(x)\to\exists y\in x\,\varphi(y))^u, \text{ also}\\ &a\in u \,\land\, \varphi^u(a) \,\land\, \forall x\in u\,(\varphi^u(x)\to\exists y\in x\,\varphi^u(y)).\end{aligned}$$

Setzen wir $c:=\{x\in u \mid \varphi^u(x)\}$, so ist dieses eine *Menge* nach Δ_0-AusS, welche dem Fundierungsaxiom widerspricht.

Potenzmengenaxiom: Falls für jede Menge a eine stark transitive Menge u existiert mit $a\in u$, so haben wir die Abschätzung $\mathcal{P}(a)\subseteq u$. $\square$

Somit ist die Theorie T_1 eine Erweiterung von KP, und zwar eine echte Erweiterung, da das Unendlichkeitsaxiom in KP nicht beweisbar ist.

Kapitel 15

Vollständige Reflexion

15.1 Vollständige Reflexionsprinzipien

Um auch das volle FRAENKELsche Ersetzungsaxiom zu erhalten, verstärken wir die Schemata der partiellen Reflexion zu entsprechenden **vollständigen Reflexionsprinzipien** (*complete reflection*):

$$\begin{array}{ll} \mathsf{CR}_{\mathsf{trans}} & \exists u\,[trans(u) \wedge \overline{a} \in u \wedge \forall \overline{x} \in u\,(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi^u(\overline{x}))] \quad \text{bzw.} \\ \mathsf{CR}_{\mathsf{strans}} & \exists u\,[strans(u) \wedge \overline{a} \in u \wedge \forall \overline{x} \in u\,(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi^u(\overline{x}))]. \end{array}$$

Es seien

$$\mathsf{T}_3 := \mathsf{S}_0 + \mathsf{CR}_{\mathsf{trans}}, \qquad \mathsf{T}_4 := \mathsf{S}_0 + \mathsf{CR}_{\mathsf{strans}}$$

die so entstehenden Theorien, die offenbar T_1 bzw. T_2 erweitern; während in T_2 das Potenzmengenaxiom gilt, läßt sich in T_3 das Ersetzungsaxiom beweisen (aber nicht umgekehrt), während T_4 sich als eine neue Axiomatisierung von ZF herausstellt:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{T}_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathsf{T}_2 \vdash \mathsf{Pot} \arrow[dr] & & \mathsf{T}_3 \vdash \mathsf{ErsS} \arrow[dl] \\ & \mathsf{T}_4 = \mathsf{ZF} & \end{tikzcd}$$

Satz

In T_3 *läßt sich* CR_{trans} *verstärken zur simultanen Anwendung auf endlich-viele Formeln (und ebenso* CR_{strans} *in* T_4*):*

$$\exists u\,[trans(u) \wedge \overline{a} \in u \wedge \forall \overline{x} \in u \bigwedge_{i<m} (\varphi_i(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi_i^u(\overline{x}))]$$

(wobei wir der Einfachheit annehmen, daß alle Formeln φ_i *dieselben freie Variablenfolge* $\overline{x}$ *enthalten).*

Beweis: Wir benutzen (nach ZERMELO) die Ziffern

$$0 = \emptyset,\ 0^{(n+1)} = \{0^{(n)}\},$$

um die Formeln $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$ durch eine Formel mit einer zusätzlichen freien Variablen zu kodieren:

$$\varphi(y, \overline{x}) := \bigvee_{i<m} (y = 0^{(i)} \wedge \varphi_i(\overline{x})).$$

Eine Anwendung des Reflexionsprinzips auf diese Formel und die Folge $(0^{(m)}, \overline{a})$ ergibt dann die Behauptung. □

Satz

I*n* T_3 *gilt das Ersetzungsaxiom, in* T_4 *gelten somit alle Axiome von* ZF.

Beweis: Gegeben sei eine Formel $\varphi(x, y, \overline{a})$, die eine Funktion definiere (wir lassen $\overline{a}$ weg):

$$\forall x, y, z\,(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z)$$

und eine Menge a. Dann existiert also nach obigem Satz eine transitive Reflexionsmenge u mit $a, \overline{a} \in u$ und

$$\begin{aligned} \forall x, y \in u\,(\varphi(x, y) &\leftrightarrow \varphi^u(x, y)) \\ \forall x \in u\,(\exists y\,\varphi(x, y) &\leftrightarrow \exists y \in u\,\varphi^u(x, y)), \end{aligned}$$

insbesondere wegen $a \subseteq u$

$$\begin{aligned} \forall x \in a\,(\exists y\,\varphi(x, y) &\leftrightarrow \exists y \in u\,\varphi(x, y)), \text{ also ist} \\ \{y \mid \exists x \in a\,\varphi^u(x, y)\} &= \{y \mid \exists x \in a\,\varphi(x, y)\}. \end{aligned}$$

Auf der linken Seite steht nach dem Δ_0-AusS eine Menge, und die rechte Seite stellt das Bild von a unter der Funktion dar, die durch $\varphi(x, y, \overline{a})$ definiert wird. □

Bemerkungen

1. Die vollständigen Reflexionsprinzipien lassen sich etwas vereinfachen, indem man $\overline{a} \in u$ durch die Bedingung $a \in u$ ersetzt; allerdings ist es dann ziemlich aufwendig, das Paarmengenaxiom abzuleiten: Man benutzt dazu die Verallgemeinerung auf endlich-viele Formeln (deswegen wurden dort die Zahlen nach ZERMELO benutzt, welche man mit dem Einermengenaxiom allein darstellen kann), zeigt etwas aufwendiger das Ersetzungsaxiom und erhält dann erst das Paarmengenaxiom mittels Existenz einer einzigen 2-elementigen Menge, auf welche sich alle 2-elementigen Paare abbilden lassen.

2. Besonders einfach läßt sich mit den Reflexionsprinzipien die Existenz der transitiven Hülle sowie (im Falle der vollständigen Reflexion) die Existenz von Mengen beweisen, die unter einer gegebenen Funktion abgeschlossen sind (und damit auch z. B. die Existenz von Fixpunkten).

3. Die Theorien $\mathsf{T}_1 - \mathsf{T}_4$ sind nicht endlich-axiomatisierbar. Denn sonst könnte man sie durch einen einzigen Satz $\sigma = \bigwedge_{i=1,\ldots,n} \sigma_i$ axiomatisieren. Die Anwendung des Reflexionsprinzips auf diesen Satz ergäbe aber die Existenz eines (transitiven) Modells, was dem 2. GÖDELschen Unvollständigkeitssatz widerspricht. (Im Falle von T_4 kann man auch direkter zu einem Widerspruch gelangen.)

15.2 Reflexion über Klassen

Vollständige Reflexion über Mengen läßt sich in partielle Reflexion leicht einbauen, wenn man (nach P. BERNAYS) eine Sprache mit Klassen benutzt: Wir erlauben jetzt auch mengentheoretische Formeln mit Klassen $A, B \ldots$ (als freie Klassenvariable oder auch nur wie früher als Metavariable für Klassenterme) und formulieren hierfür die folgenden Axiomenschemata:

$$\begin{array}{ll} \mathsf{PRC}_{\mathsf{trans}} & \varphi(\overline{a}, A) \to \exists u\,[trans(u) \wedge \overline{a} \in u \wedge \varphi^u(\overline{a}, A \cap u)] \quad \text{bzw.} \\ \mathsf{PRC}_{\mathsf{strans}} & \varphi(\overline{a}, A) \to \exists u\,[strans(u) \wedge \overline{a} \in u \wedge \varphi^u(\overline{a}, A \cap u)]. \end{array}$$

Satz

$$\mathsf{S}_0 + \mathsf{PRC}_{\mathsf{trans}} \vdash \mathsf{CR}_{\mathsf{trans}}$$

(und ebenso mit $strans$ statt $trans$).

Beweis: $\varphi(\overline{a})$ sei eine Formel (ohne Klassenterme) wie in $\mathsf{CR}_{\mathsf{trans}}$. Da wir das Paarmengenaxiom wie früher erhalten, können wir die zugehörige Klasse der n-Tupel

$$A = \{(\overline{x}) \mid \varphi(\overline{x})\}$$

bilden und das Reflexionsprinzip auf die Formel

$$\forall x, y \exists z\, (z = (x,y)) \wedge \exists x\, (x = (\overline{a})) \wedge \forall \overline{x}\, (\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow (\overline{x}) \in A)$$

anwenden. Dann erhalten wir eine transitive Menge u, die unter Paarmengenbildung abgeschlossen ist, mit $\overline{a} \in u$ und

$$\begin{array}{ll} \forall \overline{x} \in u & (\varphi^u(\overline{x}) \leftrightarrow (\overline{x}) \in A \cap u), \quad \text{also} \\ \forall \overline{x} \in u & \quad (\varphi^u(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi^u(\overline{x})). \end{array}$$

□

Das Ersetzungsaxiom erhält man ebenso leicht:

Satz

$$\mathsf{S}_0 + \mathsf{PRC}_{\mathsf{trans}} \vdash \mathsf{ErsS}$$

Beweis: Es sei $Fkt(F) \wedge a = D(F)$. Dann gilt also

$$\forall x \in a \exists y\, (x,y) \in F.$$

Anwendung der Reflexion auf diese Formel $\varphi(a,F)$ ergibt die Existenz einer Menge u mit $a \subseteq u$ und

$$\forall x \in a \exists y \in u\, (x,y) \in F \cap u,$$

und somit $W(F) \subseteq u$. Nun ist also $W(F)$ eine Menge nach dem Aussonderungsschema (welches aufgrund des vorhergehenden Satzes gilt bzw. nach derselben Methode bewiesen werden kann. □

Eine interessante Eigenschaft der Reflexionsprinzipien ist ihre "Selbstverstärkung": Hat man eine Aussage σ bewiesen, so gilt sie in bereits einer transitiven

Menge u, welche also in Bezug auf die Eigenschaft σ ähnlich wie V ist. Die Tatsache, daß (beliebig große) Reflexionsmengen für σ existieren, ist eine neue Eigenschaft σ_1 des Universums V, die man wiederum in sehr vielen Mengen spiegeln kann ...

P. BERNAYS hat gezeigt[1], daß partielle Reflexionsprinzipien für Formeln mit gebundenen Klassenvariablen sehr starke Folgerungen erlauben. Insbesondere lassen sie sich so verstärken, daß die Existenz sehr vieler Reflexionsmengen der Form V_α mit unerreichbarem α gefordert wird.

15.3 Hierarchiesätze in ZF

Wir wollen nun umgekehrt in der Theorie ZF ein Reflexionsprinzip in der Form

$$\exists \alpha \, [a \in V_\alpha \wedge \forall \bar{x} \in V_\alpha \, (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi^{V_\alpha}(\bar{x}))]$$

beweisen. Tatsächlich gilt dies Ergebnis allgemeinen für viele Hierarchien:

Definition

Eine Folge von Mengen $(M_\alpha | \alpha \in On)$ heißt **kumulative und stetige Hierarchie** gdw.

(H1)	$\forall \alpha \, Mg(M_\alpha)$,	
(H2)	$\forall \alpha, \beta (\alpha < \beta \rightarrow M_\alpha \subseteq M_\beta)$	kumulativ,
(H3)	$\forall \lambda (Lim(\lambda) \rightarrow M_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} M_\xi)$	stetig.

In diesem Fall setzen wir

$$M := \bigcup_{\alpha \in On} M_\alpha.$$

Beispiele:

Der wichtigste Fall ist natürlich $M_\alpha = V_\alpha$ mit $M = V$. Es gibt aber auch andere interessante Beispiele in Zusammenhang mit *inneren* ZF-*Modellen*. Beachte, daß die Hierarchien auch stückweise konstant sein können!

[1] **Bernays, P.:** *Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre* in: Essays on the Foundations of Mathematics (Fraenkel-Festschrift), Amsterdam 1962, 3-49, Neufassung als: *On the problem of schemata of infinity in axiomatic set theory.* in: Sets and Classes (Bernays-Festschrift, ed. G.H. Müller), Amsterdam 1976, 121-172

15.3.1 Hauptsatz über kumulative und stetige Hierarchien

$(M_\alpha|\alpha \in On)$ sei eine kumulative und stetige Hierarchie von Mengen mit $M = \bigcup_{\alpha\in On} M_\alpha$. Dann gibt es zu jeder ZF*-Formel (im engeren Sinne) $\varphi(\overline{a})$ mit den angegebenen freien Variablen eine Normalfunktion F mit*

$$F(\alpha) = \alpha \rightarrow \forall \overline{x} \in M_\alpha\ (\varphi^{M_\alpha}(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi^M(\overline{x})).$$

Beweis durch Induktion über den Formelaufbau von φ. Dabei können wir uns auf den Fall $\varphi = \exists y\ \psi$ beschränken. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also eine Normalfunktion G mit

$$G(\alpha) = \alpha \rightarrow \forall \overline{x}, y \in M_\alpha\ (\psi^{M_\alpha}(\overline{x}, y) \leftrightarrow \psi^M(\overline{x}, y)).$$

Wir definieren eine Funktion H durch

$$H(\alpha) = \mu\beta(\alpha < \beta\ \wedge \forall \overline{x} \in M_\alpha\ (\exists y \in M\ \psi^M(\overline{x}, y) \rightarrow \exists y \in M_\beta\ \psi^M(\overline{x}, y))$$

und weiterhin durch transfinite Rekursion eine Normalfunktion F mit

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \\ F(\alpha+1) &= H(F(\alpha)), \\ F(\lambda) &= \bigcup_{\xi<\lambda} F(\xi) \quad \text{für } Lim(\lambda). \end{aligned}$$

Durch Komposition von F mit G erhalten wir wieder eine Normalfunktion, deren Fixpunkte auch gemeinsame Fixpunkte von F und G sind und die somit die gewünschte Eigenschaft für φ hat. □

Als Korollar erhalten wir den

15.3.2 Satz von Scott-Scarpellini

Ist $(M_\alpha|\alpha \in On)$ eine kumulative und stetige Hierarchie von Mengen und $M = \bigcup_{\alpha\in On} M_\alpha$, so gilt:

(i) $\forall\beta\exists\alpha[\beta < \alpha\ \wedge \forall \overline{x} \in M_\alpha\ (\varphi^{M_\alpha}(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi^M(\overline{x}))]$, *speziell:*

(ii) $\forall\beta\exists\alpha[\beta < \alpha\ \wedge \forall \overline{x} \in V_\alpha\ (\varphi^{V_\alpha}(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}))]$.

Insbesondere sind die Reflexionsprinzipien $\mathsf{CR}_{\mathsf{strans}}$ und $\mathsf{PRC}_{\mathsf{strans}}$ in ZF beweisbar. Wie aus dem Beweis ersichtlich (oder mit der früheren Methode der Kodierung endlich-vieler Formeln durch eine einzige) lassen sich die Reflexionsprinzipien auf den Fall der simultanen Reflexion für endlich-viele Formeln verstärken. Kann man aus ihnen auch ein Reflexionsprinzip für alle Formeln (simultan) erhalten, so daß man eine Ordinalzahl α erhält, die

$$\forall \bar{x} \in M_\alpha \; (\varphi^{M_\alpha}(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi^M(\bar{x}))$$

für alle Formeln φ erfüllt? In ZF ist dieses nicht mehr beweisbar (außer ZF ist widerspruchsvoll), aber wenn ZF widerspruchsfrei ist, so auch die Erweiterung zu einer Theorie mit einer zusätzlichen Konstanten α_0, dem Axiom $Ord(\alpha_0)$ und dem Schema

$$\forall \bar{x} \in V_{\alpha_0} \; (\varphi^{V_{\alpha_0}}(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x})),$$

wobei φ eine beliebige ZF-Formel (ohne die Konstante α_0) ist. (Denn ein Beweis eines Widerspruches würde nur endlich-viele Fälle des obigen Schemas benutzen, die aber dann in ZF bereits beweisbar sind.) Im Falle einer *Menge M* haben wir aber einen Ersatz in der Form eines Satzes von LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI, den wir hier nur in einer einfachen Form benötigen:

15.3.3 Satz von Löwenheim-Skolem

Es sei $b \subseteq a$. Dann existiert ein b_0 mit $b \subseteq b_0 \subseteq a$, so daß für alle Formeln φ gilt:

$$\forall \bar{x} \in b_0 \; (\varphi^{b_0}(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi^a(\bar{x}))$$

wofür man auch $(b_0, \in) \preceq (a, \in)$ schreibt. Außerdem kann für unendliches b die Menge b_0 so gewählt werden, daß $|b_0| = |b|$ ist.

Beweis: Wir benötigen das Auswahlaxiom oder (für die spätere Anwendung ausreichend) eine Wohlordnung von a. Damit kann man Funktionen f für jede Formel der Form $\exists y \psi(y, \bar{x})$ definieren, so daß für alle $\bar{x} \in a$

$$f(\bar{x}) = y \text{ für ein } y \in a \text{ mit } \psi^a(y, \bar{x}),$$

falls ein solches existiert (ein beliebiges Element von a sonst). b_0 ist dann der Abschluß von b unter diesen (abzählbar-vielen) Funktionen. □

Teil VI

Definierbare Mengen

Kapitel 16

Innere Modelle

16.1 Definierbarkeit

Alle konkreten Beispiele von Mengen sind definierbar: Die leere Menge $\emptyset$, die Menge der natürlichen Zahlen ω, die Teilmenge der Primzahlen, die Menge aller stetigen reellen Funktionen, die Zahlen $\sqrt{2}$, e, π die Kardinalzahlen $\aleph_1, \aleph_\omega$, die kleinste unerreichbare Zahl (sofern sie existiert), usw. Wir wollen eine Menge **definierbar** nennen gdw sie die einzige Menge ist, die eine Formel $\varphi(v)$ erfüllt:

$$\varphi(a) \wedge \exists! x\, \varphi(x),$$

und eine Klasse A ist **definierbar** gdw es eine Formel $\varphi(v)$ gibt mit

$$A = \{x \mid \varphi(x)\}.$$

(Eine Menge a ist dann auch als Klasse definierbar.)

Kann man den Begriff der *definierbaren* Menge definieren und damit etwa die Menge der definierbaren Mengen definieren? Da es nur abzählbar-viele Formeln gibt, kann es auch nur abzählbar-viele definierbare Mengen geben, insbesondere nur abzählbar-viele Ordinalzahlen, und da die Klasse der Ordinalzahlen nicht abzählbar ist, muß es also eine kleinste nicht-definierbare Ordinalzahl geben - die wir aber gerade definiert haben! Diesen Widerspruch kann man positiv wenden:

Metatheorem

Jede definierbare Klasse mit definierbarer Wohlordnung ist enthalten in jeder definierbaren Klasse, die alle definierbaren Mengen enthält.

Es läßt sich nun zeigen[1], daß tatsächlich eine Klasse *OD* existiert mit

(i) *OD ist eine definierbare Klasse mit einer definierbaren Wohlordnung* und

(ii) *OD ist eine definierbare Klasse, welche alle definierbaren Mengen enthält*

und dadurch ist sie dann eindeutig bestimmt als

- *OD = die größte definierbare Klasse mit definierbarer Wohlordnung* und
- *OD = die kleinste definierbare Klasse, welche alle definierbaren Mengen enthält.*

Da *On* eine definierbare Klasse mit definierbarer Wohlordnung ist, muß *OD* alle Ordinalzahlen enthalten und damit auch alle V_α sowie alle damit definierbaren Mengen. Das Problem besteht darin, eine mengentheoretische Definition von *OD* zu finden. Während der allgemeine Definierbarkeitsbegriff nicht definierbar sein kann (wegen des oben aufgezeigten Widerspruchs), werden wir jedoch zeigen, daß man den Begriff relativ zu einer Menge formalisieren kann. Insbesondere kann man die Menge der in V_α definierbaren Elemente definieren; wir bezeichnen sie mit

$$Df(V_\alpha) = \{x \in V_\alpha \mid \text{“}x \text{ ist in } V_\alpha \text{ definierbar”}\}$$

und erhalten damit die Klasse der **ordinalzahl-definierbaren** Mengen

$$OD := \{x \mid \exists \alpha\, x \in Df(V_\alpha)\}.$$

Man kann nun zeigen, daß *OD* die gewünschten Eigenschaften besitzt. Außerdem gilt:

Metatheorem

Die Theorie $\mathsf{ZF} + \mathsf{V} = \mathsf{OD}$ *ist die schwächste Erweiterung von* ZF *zu einer Theorie mit der Auswahleigenschaft:*

jede nicht-leere definierbare Klasse besitzt ein definierbares Element.

Elemente von definierbaren Mengen brauchen nicht definierbar zu sein ($\mathbb{R}$ ist eine definierbare Menge, hat aber überabzählbar-viele Elemente). Man geht daher über zu der Klasse der **erblich-ordinalzahl-definierbaren** Mengen

$$HOD := \{x \mid TC(\{x\}) \subseteq OD\}.$$

[1] Myhill-Scott: *Ordinal definability.* Proc. Symposia in Pure Math., AMS XIII,1 (1971), pp. 271-278

Es ist dann

$$HOD = \{x \mid x \in OD \wedge TC(x) \subseteq OD\} = \{x \mid x \in OD \wedge x \subseteq HOD\}.$$

Ferner gilt:

- $trans(HOD) \wedge HOD \subseteq OD$,
- $OD = HOD \leftrightarrow V = HOD \leftrightarrow V = OD$.

Außerdem läßt sich zeigen, daß HOD ein Modell von $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC}$ ist; somit ist diese Theorie widerspruchsfrei, sofern ZF widerspruchsfrei ist. Wir werden im folgenden jedoch für diese Ergebnisse das GÖDELsche Modell L der konstruktiblen Mengen benutzen.

16.2 Relative Konsistenzbeweise

Die Widerspruchsfreiheit einer Theorie T weist man gewöhnlich nach, indem man einen Grundbereich für die Objekte der Theorie und darauf erklärte Relationen und Funktionen angibt, so daß die Axiome der Theorie T gültig sind, also ein *Modell* der Theorie aufzeigt. (Man denke etwa an die algebraische Theorie der Gruppen oder Körper, oder an die (nicht-)Euklidische Geometrie). Im Falle einer mengentheoretischen Theorie T fällt nun auf, daß man ein Modell für eine solche Theorie über Mengen selbst in einem mengentheoretischen Rahmen, also mit gewissen mengentheoretischen Voraussetzungen angeben muß. Somit können wir nur *relative Konsistenzbeweise* etwa der Form

Ist die Theorie ZF *widerspruchsfrei, so auch die erweiterte Theorie* $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC}$

führen. Tatsächlich besagt der *2.* GÖDEL*sche Unvollständigkeitssatz*, daß man die *absolute* Widerspruchsfreiheit (*Konsistenz*) einer genügend ausdrucksstarken Theorie (wie der Zahlentheorie, aber auch der ZF-Mengenlehre) nicht überzeugend nachweisen kann.

Eine weitere Besonderheit einiger relativen Konsistenzbeweise liegt darin, daß man hierfür nicht Mengen, sondern echte Klassen benutzt. Insbesondere für den Nachweis der oben erwähnten relativen Konsistenz werden wir Klassen von *definierbaren* Mengen einführen, so daß die zusätzlich gewünschten Eigenschaften (Auswahlaxiom, Kontinuumshypothese) gültig sind, wenn man den Bereich aller Mengen auf diese Klassen einschränkt, die Elementbeziehung aber unverändert läßt. Die **Gültigkeit** einer mengentheoretischen Aussage σ bei Einschränkung auf den Bereich M läßt sich dann einfach durch die Relativierung nach M ausdrücken:

$$\sigma^M,$$

welches wie im Falle einer Menge so erklärt ist, daß man alle Quantoren der Form $\exists x$ bzw. $\forall y$ in σ durch die relativierten Quantoren $\exists x \in M$ bzw. $\forall y \in M$ ersetzt.

Aus der mathematischen Logik werden wir die Bezeichnungsweise

$\mathsf{T} \vdash \varphi$ $\qquad$ φ ist **beweisbar in** (bzw. **folgt aus**) T

übernehmen, ohne sie hier genauer zu präzisieren. Die **Widerspruchsfreiheit** einer Theorie T bedeutet dann, daß $\mathsf{T} \vdash \sigma$ und $\mathsf{T} \vdash \neg\sigma$ für keine Aussage σ zugleich gelten, und dies ist (wie in der *Mathematischen Logik* gezeigt wird) gleichbedeutend damit, daß T ein Modell besitzt.

Eine Klasse M heißt eine **Interpretation** von S in T gdw. man in T beweisen kann, daß M ein Modell von S ist:

$$\mathsf{T} \vdash \sigma^M \qquad \text{für alle Axiome } \sigma \text{ von } \mathsf{S}$$

(und außerdem nachweisen kann, daß M nicht-leer ist: $\mathsf{T} \vdash M \neq \emptyset$).

16.2.1 Satz über Interpretationen

S *und* T *seien Theorien in der mengentheoretischen Sprache, M eine Interpretation von* S *in* T. *Dann gilt:*

Ist T *widerspruchsfrei, so auch* S .

Beweis: Wäre S widerspruchsvoll, so gäbe es einen Beweis einer Aussage der Form $\sigma \wedge \neg\sigma$ aus den Axiomen von S. Da ein Beweis endlich ist, können auch nur endlich-viele Axiome von S, etwa $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ benutzt worden sein, so daß also

$$\vdash \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \rightarrow \sigma \wedge \neg\sigma$$

nur mit logischen Argumenten beweisbar wäre. Logische Folgerungen gelten jedoch in allen (nicht-leeren) Bereichen, insbesondere, wenn sie nach M relativiert werden:

$$\vdash (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)^M \rightarrow (\sigma \wedge \neg\sigma)^M.$$

Da nach Voraussetzung aber M eine Interpretation von S in T ist, gelten die Voraussetzungen in T, also

$$\mathsf{T} \vdash (\sigma \wedge \neg\sigma)^M.$$

und damit haben wir einen Widerspruch in der Theorie T (der Form $\sigma^M \wedge \neg\sigma^M$).
□

Beispiele

1. ZF^0 sei die Theorie ZF, aber ohne das Fundierungsaxiom. In ZF^0 müssen wir den Ordinalzahlbegriff mit dem Zusatz *fund(a)* definieren, dann gelten die früheren Ergebnisse über transfinite Induktion und Rekursion in ZF^0. Bildet man die Klasse $N = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$, so ist N eine Interpretation von ZF in ZF^0. Also gilt: *Ist* ZF^0 *widerspruchsfrei, so auch* ZF.

2. Mit ähnlichen Methoden kann man (nach FRAENKEL-MOSTOWSKI-SPEKKER) auch die Unabhängigkeit des Fundierungsaxioms beweisen. Dazu benutzt man allerdings *Nicht-Standard-Interpretationen*, indem man für eine Bijektion $F : V \leftrightarrow V$ eine neue Elementbeziehung

$$x \in_F y :\leftrightarrow x \in F(y)$$

definiert. Das entsprechende *Permutationsmodell* $(V, \in_F)$ ist nun eine Interpretation von ZF^0 in ZF^0 (statt der Relativierung einer Formel φ bildet man jetzt die Formel φ_F, indem man überall $\in$ durch $\in_F$ ersetzt). Für geeignetes F erhält man dann eine Interpretation von $\mathsf{ZF}^0 + \neg\mathsf{Fund}$ in ZF^0, also auch die Aussage: *Ist* ZF^0 *widerspruchsfrei, so auch* $\mathsf{ZF}^0 + \neg\mathsf{Fund}$.

3. Es sei $V_\omega = HF$ die Menge der Mengen von endlichem Rang (*erblich-endliche Mengen*). In ZF kann man dann beweisen, daß alle Axiome von ZF - bis auf das Unendlichkeitsaxiom Un - relativiert nach HF gelten, während Un in HF nicht gilt. Somit ist HF eine Interpretation von $(\mathsf{ZF} - \mathsf{Un}) + \neg\mathsf{Un}$ in ZF. Insbesondere ist das Unendlichkeitsaxiom aus den übrigen Axiomen von ZF nicht beweisbar, falls ZF widerspruchsfrei ist.

4. Das wichtigste Beispiel einer Interpretation ist die Klasse L der *konstruktiblen* Mengen, welche eine Interpretation von $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC} + \mathsf{GCH}$ in ZF ergibt.

16.3 Gödelisierung

Eine Menge b ist *in a definierbar*, wenn sie von der Form

$$b = \{z \in a \mid \varphi^a(z, a_0, \ldots, a_n)\}$$

ist, wobei φ eine mengentheoretische Formel ist und endlich-viele Elemente $a_0, \ldots, a_n \in a$ als *Parameter* auftreten dürfen.

Um die Menge aller definierbaren Teilmengen bilden zu können, müssen wir diesen Begriff in der mengentheoretischen Sprache aufschreiben; insbesondere müssen wir die Forderung "für eine mengentheoretische Formel φ" durch eine mengentheoretische Existenzformel ausdrücken. Dazu benutzen wir eine von GÖDEL (zunächst für die Zahlentheorie eingeführte) Kodierung der Formeln einer formalen Sprache, die jeder Formel φ (welche hier nun allein als formale Zeichenreihe gesehen wird) eine natürliche Zahl (*Gödelnummer*) oder - in unserem Zusammenhang einfacher - eine geeignete Menge als **Code** $\ulcorner\varphi\urcorner$ zuordnet:

16.3.1 Kodierung der mengentheoretischen Formeln

Die formalen Variable (für Mengen) legen wir jetzt genauer fest als v_n für natürliche Zahlen n (wobei wir uns hier der Einfachheit auf eine Sorte von Variablen beschränken und nicht zwischen freien und gebundenen Variablen unterscheiden) und setzen etwa

$$\ulcorner v_n \urcorner = (1,n).$$

Es ist zweckmäßig, die formale mengentheoretische Sprache zu erweitern, indem man auch jeder Menge x eine formale Konstante x^o zuordnet, für welche wir als Code wählen

$$\ulcorner x^o \urcorner = (2,x).$$

Damit werden wir die Möglichkeit haben, bei einer vorgegebenen Struktur $(a,\in)$ Aussagen über die Elemente von a durch Formeln wiederzugeben, die die entsprechenden Konstanten x^o für $x \in a$ benutzen. Wenn x^o in $(a,\in)$ durch x selbst interpretiert werden soll, sprechen wir von einer **kanonischen Interpretation**.

Dem rekursiven Aufbau der Formeln entsprechen die folgenden Festlegungen:

$$\begin{aligned}
\ulcorner x = y \urcorner &= (3,(\ulcorner x\urcorner,\ulcorner y\urcorner))\\
\ulcorner x \in y \urcorner &= (4,(\ulcorner x\urcorner,\ulcorner y\urcorner))\\
\ulcorner \neg\varphi \urcorner &= (5,\ulcorner \varphi\urcorner)\\
\ulcorner (\varphi \vee \psi) \urcorner &= (6,(\ulcorner \varphi\urcorner,\ulcorner \psi\urcorner))\\
\ulcorner \exists v_n \varphi \urcorner &= (7,(n,\ulcorner \varphi\urcorner))
\end{aligned}$$

Definierbarkeit syntaktischer Begriffe

Verschiedene Aussagen über Formeln, etwa "v ist eine Variable", können wir nun als mengentheoretische Formel über die entsprechenden Codes ausdrücken:

$$Vbl(a) :\leftrightarrow \exists y \in a\, \exists x \in y\, (a = (1,x) \wedge x \in \omega),$$

wobei man auch die Teilformel $x \in \omega$ durch eine geeignete Δ_0-Formel ersetzen kann, welche ausdrückt, daß x eine natürliche Zahl ist. Da rekursive Begriffsbildungen bereits in der Theorie KP bzw. $\mathsf{KP}_\infty = \mathsf{KP} + \mathsf{Un}$ durchgeführt werden können, erhalten wir in dieser Theorie Δ-Formeln, welche ausdrücken:

$Fml^n(e)$: *e ist Code einer Formel φ, welche als freie Variable höchstens $v_0, \ldots, v_{n-1}$ enthält, ebenso:*

$Fml^n_a(e)$: *e ist Code einer Formel φ, welche als freie Variable höchstens $v_0, \ldots, v_{n-1}$ enthält, außerdem aber Konstanten a^o_i mit $a_i \in a$.*

16.3.2 Definierbarkeit des Wahrheitsbegriffes

Ersetzen wir eine Formel φ durch ihren Code $\ulcorner \varphi \urcorner$, so müssen wir die nach a relativierte Formel durch eine entsprechende Aussage über die Gültigkeit der Formel in $(a, \in)$ mittels ihres Codes ausdrücken, also einen formalisierten Wahrheitsbegriff benutzen: Entsprechend der rekursiven Definition des Wahrheitsbegriffes kann man eine eine mengentheoretische Formel $Sat(a, e)$ finden, welche in der Theorie KP_∞ durch Δ-Formeln definierbar ist und ausdrückt:

$Sat(a, e)$: *e ist Code einer Formel $\varphi(a^o_0, \ldots, a^o_n)$, die keine freie Variable enthält, und φ ist wahr in $(a, \in)$ unter der kanonischen Interpretation.*

Für $Sat(a, e)$ werden wir auch schreiben $(a, \in) \models e$. Für jede einzelne Formel stimmt dann die formale Definition der Gültigkeit mit der Relativierung überein:

Satz über die Relativierung

$\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ sei eine mengentheoretische Formel mit den angegebenen freien Variablen, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in a$. Dann gilt in KP_∞:

$$\varphi^a(a_0, \ldots, a_{n-1}) \leftrightarrow Sat(a, \ulcorner \varphi(a^o_0, \ldots, a^o_{n-1}) \urcorner).$$

Beweis durch einfache Induktion über den Formelaufbau, wobei im Falle einer atomaren Formel beide Seiten dasselbe aussagen (wegen unserer Festlegung auf die kanonische Interpretation der Konstanten), und sich in den Induktionsfällen beide Seiten gegenüber den entsprechenden Fällen für ihre Teilformeln gleich verhalten. $\square$

16.3.3 Definierbarkeit

Nunmehr können wir auch den informalen Definierbarkeitsbegriff formal ausdrücken:

$$Def(a) := \{x \subseteq a \mid \exists e\,(Fml^1_a(e) \wedge x = \{z \in a \mid (a,\in) \models e(z)\})\},$$

wobei $e(z)$ so definiert ist, daß (inhaltlich) für eine Formel $\varphi(v_0)$ mit Code e gilt: $e(z)$ ist der Code der Formel $\varphi(z^o)$, wobei $\varphi(z^o)$ aus φ entsteht, indem die Konstante z^o für die Variable v_o eingesetzt wird:

$$\ulcorner\varphi(v_0)\urcorner(z) = \ulcorner\varphi(z^o)\urcorner$$

Satz über die Δ-Definierbarkeit von Def

In der Theorie KP_∞ *ist für jedes a auch* $Def(a)$ *eine Menge. Außerdem gilt:*
Die Abbildung bzw. Relation

$$\begin{aligned} a \mapsto Def(a) &\quad ist\ \Sigma - definierbar, \\ b = Def(a) &\quad ist\ \Delta - definierbar. \end{aligned}$$

Beweis: Wegen $Def(a) \subseteq \mathcal{P}(a)$ kann man in ZF das Potenzmengenaxiom benutzen, um auch $Def(a)$ als Menge zu erhalten. Da wir jedoch später auch die Komplexität dieser Operation kennen müssen, arbeiten wir mit den Hilfsmitteln von KP_∞. Darin kann man zuerst nachweisen, daß

$$Fml^1_a := \{e \mid Fml^1_a(e)\}$$

eine Menge ist (hier benötigen wir das Unendlichkeitsaxiom!), und dann hierauf eine Σ-Funktion f definieren kann mit

$$f : Fml^1_a \twoheadrightarrow Def(a)\ mit\ f(e) = \{z \in a \mid (a,\in) \models e(z)\}.$$

Der Graph einer Σ-Funktion, definiert auf einem Definitionsbereich, welcher eine Δ-definierbare Menge ist, ist aber stets eine Δ-Relation (wegen $f(x) \neq y \leftrightarrow \exists z(f(x) = z \wedge y \neq z)$ für $x \in D(f)$). □

16.3.4 Bemerkungen und Beispiele

1. Für jede mengentheoretische Formel $\varphi(v_0,\dots,v_n)$ und beliebige Elemente $a_1,\dots,a_n \in a$ ist

$$\{z \in a \mid \varphi^a(z,a_1,\dots,a_n\} \in Def(a),$$

und dieses ist die wichtigste Eigenschaft des Definierbarkeitsbegriffes (außer seiner Δ-Definierbarkeit in KP_∞). Insbesondere:

2. $\emptyset, a \in \mathit{Def}(a)$,
3. $a_1, \dots, a_n \in a \to \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathit{Def}(a)$,
4. $c, d \in \mathit{Def}(a) \to c \cup d, c \cap d, c - d \in \mathit{Def}(a)$,
5. $\mathit{trans}(a) \to a \subseteq \mathit{Def}(a) \wedge \mathit{trans}(\mathit{Def}(a))$.

16.4 Charakterisierung Innerer ZF-Modelle

Definition:

Eine Klasse M heißt

ZF-Modell	gdw	σ^M für alle ZF-Axiome σ gilt,
transitives ZF-Modell	gdw	zusätzlich gilt: $\mathit{trans}(M)$, und
inneres ZF-Modell	gdw	$\mathit{trans}(M) \wedge On \subseteq (M) \wedge \sigma^M$ für alle ZF-Axiome σ gilt.

Transitive Modelle nennt man auch *Standardmodelle*. Innere Modelle sind wegen $On \subseteq M$ stets echte Klassen. (“Innere” bezieht sich darauf, daß M ein Klassenterm, also in ZF durch eine Formel definierbar ist. Die Gültigkeit in obiger Definition bezieht sich in der Regel auf die Theorie ZF, genauer wird dies im Begriff der Interpretation einer Theorie T in einer Theorie S festgelegt, s. 16.2.)

Zunächst wollen wir zusammenstellen, was die Gültigkeit der ZF-Axiome in M (im Sinne der Relativierung) bedeutet. Dabei setzen wir die Axiome von ZF voraus, obwohl man (zumindest in den einfachsten Fällen) für Gültigkeit von σ^M nur das Axiom σ selbst vorauszusetzen braucht:

Satz

M sei transitiv, $M \neq \emptyset$.

(i) Ext^M, Null^M, FundS^M *gelten stets.*

(ii) *Das Paarmengenaxiom gilt in M gdw M abgeschlossen ist unter der Paarmengenbildung:*

$$\mathsf{Paar}^M \leftrightarrow \forall x, y \in M\ \{x, y\} \in M,$$

(iii) *Das Summenaxiom gilt in M gdw M abgeschlossen ist unter der Vereinigungsmenge:*

$$\mathsf{Sum}^M \leftrightarrow \forall x \in M \cup x \in M,$$

(iv) *Das Potenzmengenaxiom gilt in M gdw M abgeschlossen ist unter der relativen Potenzmenge:*

$$\mathsf{Pot}^M \leftrightarrow \forall x \in M\ \mathcal{P}(x) \cap M \in M,$$

(v) *Ordinalzahlen sind absolut bzgl. M:*

$$\forall x \in M\,(Ord(x)^M \leftrightarrow Ord(x)),$$

(vi) *Das Unendlichkeitsaxiom gilt in M gdw M die Menge der natürlichen Zahlen enthält:*

$$\mathsf{Un}^M \leftrightarrow \omega \in M.$$

(vii) AusS_φ *sei das Aussonderungsaxiom für die Formel* φ*. Dann gilt:*

$$\mathsf{AusS}_\varphi^M \leftrightarrow \forall x_0 \in M \forall x_1 \ldots x_n \in M\ \{x \in x_0 \mid \varphi^M(x, x_1, \ldots, x_n)\} \in M.$$

(viii) *Für eine Formel* φ *sei* $F := \{x, y \mid \varphi(x, y, \overline{x})\}$ *und* ErsS_φ *das Ersetzungsaxiom für die durch* φ *definierte Funktion. Ferner sei M abgeschlossen unter Paarmengen (also* Paar^M*). Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\mathsf{ErsS}_\varphi^M \leftrightarrow \forall \overline{x} \in M\ [&\forall x, y, z \in M(\varphi^M(x, y, \overline{x}) \wedge \varphi^M(x, z, \overline{x}) \to y = z)\\ &\to \forall u \in M\, \exists z \in M(\forall y \in M(y \in z \leftrightarrow \exists x \in u\ \varphi^M(x, y, \overline{x})))],\end{aligned}$$

d. h. für $F^M := \{x, y \mid x, y \in M \wedge \varphi^M(x, y, \overline{x})\}$ *gilt :*

$$\mathsf{ErsS}_\varphi^M \leftrightarrow \forall \overline{x} \in M\ [(F^M : M \to M) \to \forall u \in M\, F^M[u] \in M].$$

□

Wie oben benutzen wir allgemein die **Relativierung einer Klasse** in der Form

$$\{x \mid \varphi(x)\}^M := \{x \in M \mid \varphi^M(x)\}.$$

Die Transitivität haben wir bereits in den Reflexionsprinzipien verstärkt:

$$strans(M) :\leftrightarrow \forall x \in M\ \forall y(y \in x \vee y \subseteq x \to y \in M) \quad M \text{ ist } \textbf{stark transitiv}$$

Beispiel: $strans(V_\alpha)$

Satz

M sei transitives ZF-*Modell. Dann gilt:*

(i) $On^M = On \cap M$,

(ii) $\forall x \in M\ \mathcal{P}(x)^M = \mathcal{P}(x) \cap M$,

(iii) $\forall \alpha \in On \cap M\ V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$,

(iv) $\forall \alpha \in On \cap M\ (Card(\alpha) \to Card^M(\alpha))$,

v) *Gilt außerdem $strans(M)$, so* $\forall \alpha \in On \cap M\ V_\alpha^M = V_\alpha$ *und damit:*

$$M = \begin{cases} V, & \text{falls } On \subseteq M \textit{ und} \\ V_\alpha & für\ \alpha = On \cap M \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Allklasse V ist somit das einzige stark transitive innere ZF-Modell!

16.4.1 Hauptsatz über innere ZF-Modelle

M ist ein inneres ZF-*Modell gdw es eine Folge $(M_\alpha | \alpha \in On)$ von Mengen gibt mit folgenden Eigenschaften (für alle α, β, λ):*

(I1) $trans(M_\alpha)$,

(I2) $\alpha < \beta \to M_\alpha \subseteq M_\beta$,

(I3) $Lim(\lambda) \to M_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} M_\xi$,

(I4) $Def(M_\alpha) \subseteq M_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{P}(M_\alpha)$, *und schließlich*

(I5) $M := \bigcup_{\xi \in On} M_\xi$.

Beweis: Ist M ein inneres ZF-Modell, so setzen wir $M_\alpha = V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$ und erhalten damit eine Folge mit den Eigenschaften (I1)-(I5).

Ist umgekehrt eine Folge M_α mit den Eigenschaften (I1)-(I5) vorgegeben, so ist M transitiv und damit bereits Modell der Axiome Ext, Null, FundS. Nach dem Ergebnis des Hierarchiesatzes 15.3.1 gilt auch das vollständige Reflexionsprinzip CR_{trans} in M (wobei wir $M_\alpha \in M$ nach (I5) benutzen). Außerdem ist wegen (I5) M abgeschlossen unter Paarmengenbildung und erfüllt das Δ_0-Aussonderungsaxiom. Somit bleibt nur der Abschluß von M unter der relativen Potenzmenge zu zeigen:

Sei $a \in M$, etwa $a \in M_\alpha$ für ein α. Dann ist $\mathcal{P}(a)^M \subseteq M$, und da es eine Menge ist, muß es ein $\beta \geq \alpha$ geben, so daß $\mathcal{P}(a)^M \subseteq M_\beta$. dann ist aber nach (I5) $\mathcal{P}(a)^M \in M_{\beta+1}$. □

Um ein inneres ZF-Modell zu erhalten, sind wir nur im Limesfall festgelegt. Für den Nachfolgerfall gibt es zwei Extremfälle:

(i) $M_{\alpha+1} = Def(M_\alpha)$ bzw.

(ii) $M_{\alpha+1} = \mathcal{P}(M_\alpha)$.

Legen wir $M_0 = \emptyset$ fest, so ergibt (i) die Klasse $M = L$ der konstruktiblen Mengen und somit das kleinste innere ZF-Modell, während (ii) zur VON NEUMANNsche Hierarchie mit $M = V$ als dem größten ZF-Modell führt. Dazwischen liegen möglicherweise weitere Modelle, die man außerdem noch durch die Festlegung

$$M_0 = TC(a)$$

für eine vorgegebene Menge a abwandeln kann.

Kapitel 17

Konstruktible Mengen

17.1 Die Hierarchie der konstruktiblen Mengen

GÖDEL hat 1938 die Hierarchie der **konstruktiblen Mengen** eingeführt:

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset, \\ L_{\alpha+1} &= Def(L_\alpha), \\ L_\lambda &= \bigcup_{\xi<\lambda} L_\xi \quad \text{für Limeszahlen } \lambda, \\ L &:= \bigcup_{\alpha\in On} L_\alpha. \end{aligned}$$

Setzen wir alle Axiome von ZF voraus, so erhalten wir aus dem Hauptsatz 16.4.1 über Innere Modelle:

Satz

L ist inneres ZF*-Modell.* □

Lemma

(i) $trans(L_\alpha)$, also auch $trans(L)$,

(ii) $\alpha \leq \beta \rightarrow L_\alpha \subseteq L_\beta$,

(iii) $L_\alpha \subseteq V_\alpha$,

(iv) $\alpha < \beta \rightarrow \alpha,\ L_\alpha \in L_\beta$,

(v) $L \cap \alpha = L_\alpha \cap On = \alpha$,

(vi) $\alpha \leq \omega \to L_\alpha = V_\alpha$,

(vii) $\alpha \geq \omega \to |L_\alpha| = |\alpha|$.

Beweis: (i) - (iii) beweist man durch Induktion über α, was sich dann leicht auf den Nachfolgerfall reduzieren läßt, für den man die Eigenschaften des Definierbarkeitsbegriffes aus 16.3.4 benutzt.

Auch für (iv) braucht man auch nur $\alpha, L_\alpha \in L_{\alpha+1}$ zu zeigen, letzteres gilt wieder nach 16.3.4. Benutzt man als Induktionsvoraussetzung

$$\forall \gamma < \alpha\ \gamma \in L_{\gamma+1},$$

so gilt $\alpha \subseteq L_\alpha$ nach (ii) und wegen (iii) $\alpha = L_\alpha \cap On$. Somit

$$\alpha = \{x \in L_\alpha \mid Ord^{L_\alpha}(x)\} \in L_{\alpha+1},$$

womit wir zugleich auch (v) bewiesen haben. Da für jedes endliche α auch V_α endlich ist, so gilt (vi).

Wegen (v) gilt $|\alpha| \leq |L_\alpha|$, also braucht man für (vii) nur $|L_\alpha| \leq |\alpha|$ zu zeigen, und wegen (vi) können wir $\alpha \geq \omega$ annehmen. Sei also $|L_\alpha| \leq |\alpha|$ für ein unendliches α. Da es nur abzählbar-viele Formeln für definierbare Mengen gibt und nach Voraussetzung auch nur $\leq |L_\alpha| \leq |\alpha|$-viele Parameter, so ist auch $|Def(L_\alpha)| = |L_{\alpha+1}| \leq |\alpha| = |\alpha+1|$. Der Limesfall des Induktionsbeweises ist wiederum trivial. □

17.2 Absolutheit von L

Die rekursive Definition und der Nachweis der wichtigsten Eigenschaften der Hierarchie der konstruktiblen Mengen (ohne (vi)) ist bereits in KP_∞ und damit sogar in einer endlichen Teiltheorie von KP_∞ möglich:

Satz

Es gibt eine Theorie T*, die aus endlich-vielen Axiomen von* KP_∞ *besteht und die in allen Modellen der Form* L_λ *mit* $Lim(\lambda) \wedge \lambda > \omega$ *gelten, so daß:*

(i) *Die Prädikate bzw. die Aussage*

$$\begin{array}{rl} b = Def(a),\ a = L_\alpha,\ a \in L_\alpha & \text{sind } \Delta_1^{\mathsf{T}} - definierbar, \\ a \in L & \text{ist } \Sigma_1^{\mathsf{T}} - definierbar, \\ V = L & \text{ist } \Pi_2^{\mathsf{T}} - definierbar. \end{array}$$

(ii) (Absolutheit) *Ist M transitives Modell von* T *(oder sogar von* ZF*), so gilt:*

$$\begin{array}{ll} L_\alpha^M = L_\alpha & \text{für alle } \alpha \in On, \text{ insbesondere:} \\ L^M = L, & \text{falls } M \text{ echte Klasse ist, also } On \subseteq M, \\ L^M = L_\alpha, & \text{falls } M \text{ Menge ist, also } \alpha = On \cap M \text{ für ein } \alpha. \end{array}$$

(iii) (Minimalität, ZF vorausgesetzt) *L ist das kleinste innere* ZF*-Modell.*

(iv) $L^L = L$, *somit gilt* $(V = L)^L$ und damit:

Ist ZF *widerspruchsfrei, so auch* $\mathsf{ZF} + \mathsf{V} = \mathsf{L}$.

(v) *Ist M transitives Modell von* $\mathsf{T} + \mathsf{V} = \mathsf{L}$, *so gilt:*

$$M = \begin{cases} L, & \text{falls } M \text{ echte Klasse ist, also } On \subseteq M, \\ L_\alpha, & \text{falls } M \text{ Menge ist, also } \alpha = On \cap M \text{ für ein } \alpha. \end{cases}$$

Aus (iv) folgt, daß natürlich auch alle Folgerungen aus der Annahme $V = L$ widerspruchsfrei sind relativ zu ZF.

17.3 Eine definierbare Wohlordnung von L

Die Klasse L der konstruktiblen Mengen besitzt eine einfache definierbare Wohlordnung, und zwar läßt sich aus einer Wohlordnung einer Menge a

- eine Wohlordnung der endlichen Folgen von Elementen aus a definieren und
- mit einer Wohlordnung aller (abzählbar-vielen) mengentheoretischen Formeln

erhält man daraus dann eine Wohlordnung der definierbaren Teilmengen von a:

Satz

Es gibt eine Δ^{KP}*-Relation* $<_L$ *und eine* Σ^{KP}*-Funktion* F*, die beide bezüglich* L *absolut sind, derart daß in* KP *gilt:*

$$V = L \;\rightarrow <_L \text{ ist Wohlordnung von } L,\; F : On \leftrightarrow L.$$

Insbesondere gilt AC^L *und somit:*

$$\textit{Ist } \mathsf{ZF} \textit{ widerspruchsfrei, so auch } \mathsf{ZF} + \mathsf{AC}.$$

□

Bemerkungen

Offensichtlich ist

$$L \subseteq HOD \subseteq V.$$

Falls $V = L$, so natürlich auch $V = HOD$, aber möglich ist auch: $L \subset HOD = V$, $L \subset HOD \subset V$, $L = HOD \subset V$.

17.4 Das Kondensationslemma

Bevor wir zeigen, daß aus $V = L$ auch die allgemeine Kontinuumshypothese GCH folgt, benötigen wir noch einige Hilfsmittel. Zunächst greifen wir auf unsere früheren Ergebnisse über Wohlordnungen (6.1) zurück. Wie dort bemerkt, lassen sie sich weitgehend auf *fundierte* Relationen übertragen:

Eine Relation R auf einer Klasse A heißt **fundiert** gdw

(F1)	$\forall z(\emptyset \neq z \subseteq A \rightarrow \exists x \in z\, \forall y \in z\, \neg yRx)$	**Minimalitätsbedingung**
(F2)	$\forall y \in A \quad Mg(\{x \mid xRy\})$	**Mengenbedingung**

Offenbar muß eine fundierte Relation irreflexiv sein, dagegen ist eine Wohlordnung zusätzlich transitiv und connex. Die Transitivität kann man durch Erweiterung erreichen (ähnlich wie man die $\in$-Beziehung $x \in y$ zu einer transitiven Relation $x \in TC(y)$ erweitern kann):

$$aR^*b :\leftrightarrow \exists n < \omega\, \exists f(f : n+1 \rightarrow V \wedge f(0) = a \wedge \forall i < n f(i)Rf(i+1) \wedge f(n) = b).$$

R^* heißt die **Vorfahrenrelation** zu R; es gilt nämlich aR^*b gdw es eine endliche R-Kette von a nach b gibt.

Satz

R sei eine fundierte Relation auf A. Dann ist R^* eine transitive Erweiterung von R, die ebenfalls fundiert ist. □

Mit Hilfe von R^* kann man nun wie früher zeigen, daß für fundierte Relationen R das Prinzip (F1) sich verallgemeinern läßt zum Minimumsprinzip für nicht-leere Teilklassen von A, einem entsprechenden Induktionsprinzip sowie einem Rekursionssatz. Um auch ein Gegenstück zum früheren Kontraktionslemma 6.5 zu erhalten, benötigen wir noch den Begriff der *extensionalen* Relation:

$$R\ \textbf{extensional} :\leftrightarrow \forall x,y\in A[\forall z\in A(zRx\leftrightarrow zRy)\rightarrow x=y].$$

Daß R extensional ist, bedeutet also gerade, daß das Extensionalitätsaxiom für die Relation R auf A gilt. Dagegen ist die Fundiertheit von R eine echt stärkere Bedingung als die Gültigkeit des Fundierungsaxioms für die Struktur (A,R), denn es könnte durchaus sein, daß es in A keine unendlich-absteigende R-Folge gibt, dafür aber außerhalb von A. Andererseits ist die $\in$-Relation fundiert aufgrund des Fundierungsaxioms und bleibt fundiert, wenn man sie auf eine Klasse A einschränkt. Somit ist die $\in$-Beziehung auf einer transitiven Klasse A ein Beispiel einer fundierten und extensionalen Relation und zudem im wesentlichen das einzige:

Isomorphiesatz von Mostowski

R sei eine fundierte und extensionale Relation auf A. Dann existiert genau eine Abbildung F und eine transitive Klasse B, so daß:

$$F \textit{ ist ein Isomorphismus: } (A,R)\cong(B,\in),\ d.h.$$
$$F: A\longleftrightarrow B \quad \textit{mit}$$
$$aRb\leftrightarrow F(a)\in F(b) \quad \textit{für alle} \quad a,b\in A.$$

Beweis: Falls ein solches F mit transitivem $B=W(F)$ existiert, muß wie früher gelten:

$$(*) \quad \forall x\in A\ F(x)=\{F(y)\mid yRx\},$$

und damit haben wir die Eindeutigkeit. Zum Beweis der Existenz definieren wir F durch (*) mittels R-Rekursion und setzen $B:=W(F)$. Offenbar gilt dann $trans(B)$ und

$$F: A\twoheadrightarrow B\ \wedge\ \forall x,y\in A(xRy\rightarrow F(x)\in F(y)).$$

Als nächstes zeigen wir die Injektivität von F, indem wir für jedes $a \in A$ durch R-Induktion zeigen:

$$\forall x \in A(F(a) = F(x) \rightarrow a = x).$$

Sei also nach Induktionsvoraussetzung

$$\forall z(zRa \rightarrow \forall x \in A(F(z) = F(x) \rightarrow z = x)).$$

Aus $F(a) = F(b)$ folgt dann:

$$\begin{array}{lll} cRa & \rightarrow & F(c) \in F(a) = F(b) \\ & \rightarrow & F(c) = F(x) \quad \text{für ein } xRb \\ & \rightarrow & c = x \quad \text{nach Ind.vor., da } cRa \\ & \rightarrow & cRb. \end{array}$$

Ganz analog erhalten wir $cRb \rightarrow cRa$, also die gewünschte Aussage $a = b$ wegen der Extensionalität von R. Schließlich ergibt sich hieraus wie früher:

$$\begin{array}{lll} F(a) \in F(b) & \rightarrow & F(a) = F(c) \text{ für ein } cRb \\ & \rightarrow & a = c \text{ wegen der Injektivität von F} \\ & \rightarrow & aRb. \end{array}$$

□

Wählen wir als Aussage σ die endlich-vielen Axiome der Theorie $\mathsf{T} + \mathsf{V} = \mathsf{L}$ von 17.2, so erhalten wir mittels des Isomorphiesatzes von MOSTOWSKI das

Kondensationslemma

Es gibt eine Aussage σ, die in allen Modellen der Form $(L_\lambda, \in)$ mit $Lim(\lambda), \lambda > \omega$ gilt, so daß für jedes Modell $(a, \in)$ von σ ein α existiert mit

$$(a, \in) \cong (L_\alpha, \in).$$

Ist außerdem $c \subseteq a \wedge trans(c)$, so läßt der Isomorphismus die Elemente von c invariant, d. h. ist die Identität auf c. □

17.5 Das Cohensche Minimalmodell

Wenn ZF widerspruchsfrei ist (was wir hoffen), so besitzt es ein Modell, also existiert eine *Menge* M und eine darauf erklärte 2-stellige Relation $\in^M$, so daß $(M, \in^M)$ ein Modell von ZF ist, d. h. alle ZF-Axiome sind wahr, wenn Mengen als Elemente von M und die $\in$-Beziehung durch die Relation $\in^M$ interpretiert werden. Interessanter wäre es sicher, wenn es ein Standardmodell, also ein Modell der Form $(a, \in)$, für eine Menge a gäbe. Diese Forderung können wir mit Hilfe des formalisierten Wahrheitsbegriffes sogar als Axiom

$$\mathsf{SM} \quad \exists x\, SMod(x, \mathsf{ZF}) \qquad \text{(Existenz eines Standardmodells)}$$

aufschreiben, wenn wir die Menge $\ulcorner \mathsf{ZF} \urcorner$ definieren als Menge der Codes der Axiome von ZF und $SMod(a) :\leftrightarrow \forall e \in \ulcorner \mathsf{ZF} \urcorner\, Sat(a, e)$. Setzen wir nun (außer den ZF-Axiomen) das Axiom SM voraus, so gibt es auch ein Standardmodell von $\mathsf{ZF} * \mathsf{V} = \mathsf{L}$ und nach dem Kondensationslemma sogar ein transitives derartiges Modell von der Form L_α. Das kleinste derartige Standardmodell von ZF heißt das COHEN*sche Minimalmodell*, es ist von der Form L_{α_0}, wobei nach dem Satz 15.3.3 von LÖWENHEIM-SKOLEM die Ordinalzahl α_0 abzählbar sein muß. In diesem Modell kann es dann offenbar kein Minimalmodell geben, also gilt das Axiom SM hierin nicht, so daß $\mathsf{ZF} + \mathsf{V} = \mathsf{L} + \neg \mathsf{SM}$ widerspruchsfrei ist. COHEN hat es außerdem dazu benutzt zu zeigen, daß man die Methode der Inneren ZF-Modelle *nicht* verwenden kann, um die Unabhängigkeit des Axioms $\mathsf{V} = \mathsf{L}$ (und seiner Folgerungen) zu beweisen.

17.6 GCH in L

Es sei $a \subseteq \kappa$ für ein unendliches κ und außerdem $a \in L$. Dann ist sicher $a \in L_\alpha$ für ein α. Wir wollen zeigen, daß ein solches α unabhängig von a gewählt werden kann, und zwar mit der Abschätzung $\alpha \leq \kappa^+$:

Satz

$$a \subseteq \kappa \wedge a \in L \rightarrow a \in L_{\kappa^+}.$$

Beweis: Sei also $a \in L \wedge a \subseteq \kappa$ für eine unendliche Kardinalzahl κ. Dann gibt es eine Limeszahl $\lambda > \kappa$ mit $a \in L_\lambda$. Mit Hilfe des Satzes 15.3.3 von LÖWENHEIM-

SKOLEM erhalten wir eine Menge $b \subseteq L_\lambda$ mit $\kappa \cup \{a\} \subseteq b \wedge |b| = \kappa$, so daß b dieselben Formeln erfüllt wie L_λ. Nach dem Kondensationslemma ist $(b, \in) \cong (L_\beta, \in)$ für ein β, wobei der Isomorphismus die transitive Menge $\kappa \cup \{a\}$ invariant läßt. Insbesondere muß $\kappa \cup \{a\} \subseteq L_\beta$ sein, und wegen $|\beta| = |L_\beta| = |b| = \kappa$ erhalten wir $L_\beta \subseteq L_{\kappa^+}$. □

Die konstruktiblen Teilmengen von ω sind also bereits Elemente von L_{ω_1}, allgemeiner erhalten wir wegen $|L_{\kappa^+}| = \kappa^+$ für unendliche Kardinalzahlen κ als

Folgerung

$$\mathsf{V} = \mathsf{L} \rightarrow \mathsf{GCH}, \textit{ insbesondere}:$$

$$\textit{Ist } \mathsf{ZF} \textit{ widerspruchsfrei, so auch } \mathsf{ZF} + \mathsf{AC} + \mathsf{GCH}.$$

17.7 Relative Konstruktibilität

Der Begriff der Konstruktibilität läßt sich relativieren auf eine vorgegebene Menge a: Setzt man

$$\begin{aligned}
L_0[a] &= TC(\{a\}),\\
L_{\alpha+1}[a] &= Def(L_\alpha[a]),\\
L_\lambda[a] &= \bigcup_{\xi<\lambda} L_\xi[a] \text{ für Limeszahlen } \lambda,\\
L[a] &:= \bigcup_{\alpha\in=On} L_\alpha[a],
\end{aligned}$$

so erhält man das kleinste innere ZF-Modell M mit $a \in M$. Abgewandelt kann man auch eine Klasse $L(a)$ definieren, so daß $L(a)$ das kleinste innere ZF-Modell M ist mit $a \cap M \in M$. (In der Literatur findet man meistens beide Bezeichnungen vertauscht!) Dabei gilt:

- $V = L(a) \rightarrow \mathsf{AC}$, während in $L[a]$ das Auswahlaxiom nicht zu gelten braucht. (Interessant ist hier vor allem der Fall $a = \mathbb{R}$.)
- $V = L[a] \rightarrow \forall\alpha(|TC(a)| \leq \aleph_\alpha \rightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$, speziell:
- $V = L[a] \wedge a \subseteq \omega \rightarrow \mathsf{GCH}$.

Auch die COHENschen Modelle, mit denen die Unabhängigkeit etwa von *CH* gezeigt wurde, sind Modelle relativer Konstruktibilität, aber *Mengen*, und zwar gehen sie von einem *abzählbaren* Modell von $ZF + AC$ (wie etwa dem Minimalmodell) aus und erweitern es für eine geeignete ("generische") Menge $G \subseteq M$ zu einem Modell der Form $M[G]$, wobei $G \in M[G]$, aber M und $M[G]$ dieselben Ordinalzahlen besitzen. G enthält dabei die notwendige Information, um z. B. zu *erzwingen*, daß in $M[G] : 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ gilt (*forcing*-Methode).

Teil VII

Große Zahlen und nichtunterscheidbare Mengen

Kapitel 18

Große Kardinalzahlen

Wann ist eine Kardinalzahl κ “groß”? Ist dann nicht $\kappa+1$ noch “größer”?

18.1 Große endliche Zahlen

Dieses Problem stellt sich natürlich schon bei den natürlichen Zahlen. Lange Zeit war eine Zahl von SKEWES die größte in einem sinnvollen Beweis benutzte Zahl [1], abgelöst wurde sie kürzlich durch *Grahams Zahl*[2] (nach RONALD L. GRAHAM): sie ist eine obere Grenze für ein Problem der *Ramsey*-Theorie:

> In einem n-dimensionalen Hyperwürfel seien alle Punkte (Knoten) je paarweise durch eine Kante verbunden, so daß ein vollständiger Graph auf 2^n Knoten entsteht. Diese Kanten werden nun mit jeweils einer von zwei Farben eingefärbt. Es ergibt sich die Frage, wie groß n sein muß, damit es immer mindestens einen gleichfarbigen vollständigen Untergraphen gibt, der aus 4 Knoten besteht, die in einer Ebene liegen. Anders ausgedrückt: Ab welcher Dimension tritt notgedrungen die genannte Form von Ordnung auf? Das Problem wurde noch nicht gelöst. Graham und Rothschild (1971) haben gezeigt, daß n mindestens 6 ist, EXOO (2003) zeigte, daß $n \geq 11$. **Grahams Zahl** ist andererseits eine obere Grenze für dieses Problem, d. h. $n < G_{64}$.

[1] http://mathworld.wolfram.com/SkewesNumber.html

[2] im folgenden zitiert nach `http://de.wikipedia.org/wiki/Grahams_Zahl`

Grahams Zahl ist so groß, daß sie am besten mit Knuths Pfeil-Schreibweise ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned}
m \uparrow n &= \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n-mal} \\
m \uparrow\uparrow n &= \underbrace{m \uparrow m \uparrow \ldots \uparrow m}_{n-mal} \\
m \uparrow\uparrow\uparrow n &= \underbrace{m \uparrow\uparrow m \uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow m}_{n-mal} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, daß der Potenzoperator nicht assoziativ ist. Der klammerfrei notierte Ausdruck ist deshalb mehrdeutig; in diesem Fall ist er von rechts zu klammern, d. h. beispielsweise ist $m \uparrow m \uparrow m = m \uparrow (m \uparrow m)$ zu lesen. Diese Abarbeitungsreihenfolge ist auch gerade diejenige, bei der die größten Endergebnisse hervorgebracht werden. Ausgestattet mit dieser Notation kann man eine Folge bilden, die durch die folgenden Regeln rekursiv definiert ist:

$$\begin{aligned}
G_0 &= 4 \\
G_{n+1} &= 3\underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{G_n-mal}3
\end{aligned}$$

Grahams Zahl ist nun definiert als $G = G_{64}$. Zur besseren Veranschaulichung, wie extrem groß die Grahams Zahl ist, werden hier die Ergebnisse der ersten Schritte angegeben:

$$\begin{aligned}
3 \uparrow 3 &= 27 \\
3 \uparrow\uparrow 3 &= 7.625.597.484.987
\end{aligned}$$

Bereits G_1 läßt sich nicht mehr vernünftig in der üblichen Exponentialdarstellung ausdrücken. Trotzdem kann man die letzten Stellen von Grahams Zahl mit elementarer Zahlentheorie bestimmen: die letzten 10 Stellen sind 2464195387.

18.2 Große unendliche Zahlen

Gegenüber den natürlichen Zahlen ist ω als erste unendliche Zahl natürlich "sehr groß". Als neuen Ansatz könnte man versuchen:

κ ist groß $\iff$ κ hat hinsichtlich kleinerer Zahlen ähnliche Eigenschaften wie ω gegenüber den natürlichen Zahlen.

So gelangt man schnell zur Forderung, daß eine "große" Zahl eine Limeszahl, regulär, sogar unerreichbar sein soll und weitere Eigenschaften erfüllen soll, die wir später einführen werden (die RAMSEY-Eigenschaft, meßbar ...).

Ein weiterer Ansatz geht von der Überlegung aus, daß *On* die größte Ordinal- (und Kardinal-) Zahl wäre, wenn es nur eine *Menge* wäre:

$$\kappa \text{ ist groß} \iff \kappa \text{ hat ähnliche Eigenschaften wie } On.$$

Mit geeignet gewählten Eigenschaften gelangt man schnell zu den unerreichbaren Kardinalzahlen oder - je nach Präzisierung - zu Widersprüchen! Mit Hilfe des partiellen Reflexionsprinzips erhalten für jede Aussage σ der ZF-Sprache:

$$\sigma^{On} \to \forall \alpha \exists \kappa (\alpha < \kappa \wedge \sigma^{\kappa}).$$

Aus dem Beweis des Hierarchiesatzes 15.3.1 ergibt sich, daß es sogar *sehr viele* δ gibt, die eine Eigenschaft σ aller Ordinalzahlen reflektieren, und zwar so viele, daß *jede* Normalfunktion einen Fixpunkt besitzt, welcher die Eigenschaft σ reflektiert.

Definition

$$\begin{array}{rcl}
\textbf{Limespunkte von } A:\ A' & := & \{\alpha > 0 \mid \alpha = \cup(A \cap \alpha)\}, \\
A \subseteq On \textbf{ unbeschränkt}: & \leftrightarrow & \bigcup A = On, \\
A \subseteq On \textbf{ abgeschlossen}: & \leftrightarrow & \forall x \subseteq A (x \neq \emptyset \to \bigcup x \in A), \\
A \subseteq On \textbf{ club}: & \leftrightarrow & A \text{ abgeschlossen und unbeschränkt.}
\end{array}$$

(*club* steht als Abkürzung für *closed unbounded*). Offensichtlich gilt:

Lemma

Es sei $A \subseteq On$.

(i) A' *ist stets abgeschlossen; falls A unbeschränkt ist, so ist* A' *club.*

(ii) $Nft(F) \to W(F)$ *club, und umgekehrt:*

(iii) *Ist A club, so A=W(F) für eine Normalfunktion F (nämlich die monotone Aufzählung von A).* □

Somit gilt:

$$A\ club \leftrightarrow \exists F\ (Nft(F) \wedge A = W(F)),$$

was allerdings eine Aussage in der Mengenlehre *2. Stufe* ist, ebenso wie die Definition:

$$A\ \textit{stationär:} \leftrightarrow \forall F\ (Nft(F) \rightarrow A \cap W(F) \neq \emptyset),$$

die wir aber immerhin noch als Schema auffassen können, wie etwa etwa in der folgenden Verstärkung des partiellen Reflexionsprinzips:

$$\sigma^{On} \wedge Nft(F) \rightarrow \exists \kappa (F(\kappa) = \kappa \wedge \sigma^{\kappa}),$$

welches ausdrückt, daß jede Eigenschaft σ, die für die Klasse aller Ordinalzahlen gilt, sogar für eine stationäre Klasse von Ordinalzahlen gilt. Die entsprechend relativierten Begriffe können wir im Rahmen von ZF definieren:

Definition

$$\begin{aligned}
a\ \textbf{unbeschränkt in}\ \kappa: &\leftrightarrow\ a \subseteq \kappa \wedge \bigcup a = \kappa,\\
a\ \textbf{abgeschlossen in}\ \kappa: &\leftrightarrow\ \forall x \subseteq \kappa (x \subseteq a \wedge x \neq \emptyset \rightarrow \bigcup x \in \kappa \cup \{\kappa\}),\\
a\ \textbf{club in}\ \kappa: &\leftrightarrow\ a \text{ abgeschlossen und unbeschränkt in } \kappa,\\
a\ \textbf{stationär in}\ \kappa: &\leftrightarrow\ \forall x\ (x \text{ club in } \kappa \rightarrow x \cap a \neq \emptyset).
\end{aligned}$$

(Statt *unbeschränkt* haben wir früher *confinal* gesagt.) Der Durchschnitt von zwei club-Mengen kann leer sein: $\{\aleph_{2n} \mid n < \omega\}$ und $\{\aleph_{2n+1} \mid n < \omega\}$ sind beide club in $\aleph_\omega$, haben aber leeren Durchschnitt. Dagegen gilt:

Lemma

Es sei κ eine Kardinalzahl mit $cf(\kappa) > \omega$. Dann ist der Durchschnitt von zwei Mengen, welche club in κ sind, wieder club in κ.

Beweis: Sind a, b abgeschlossen in κ, so auch $a \cap b$, während der Durchschnitt unbeschränkter Mengen nicht wieder unbeschränkt, sondern sogar sogar leer sein kann. Es seien also nun a, b club in κ. Um die Unbeschränktheit von $a \cap b$ zu zeigen, sei $\alpha < \kappa$. Dann wählt man eine aufsteigende Folge $(\gamma_n | n < \omega)$ mit $\gamma_n < \kappa$ und

$$\alpha < \gamma_0\ \wedge\ \gamma_{2n} \in a\ \wedge\ \gamma_{2n+1} \in b,$$

was wegen der Unbeschränktheit der Mengen a, b möglich ist. Wegen $cf(\kappa) > \omega$ ist das Supremum γ dieser Folge $< \kappa$ und zugleich $\gamma \in a$ wegen $\gamma = \bigcup_{n<\omega} \gamma_{2n}$ und der Abgeschlossenheit von a, ebenso $\gamma \in b$ wegen $\gamma = \bigcup_{n<\omega} \gamma_{2n+1}$ und der Abgeschlossenheit von b. (Auf ähnliche Weise zeigt man, daß der Durchschnitt von $< cf(\kappa)$-vielen club Teilmengen von κ wieder eine club Teilmengen von κ ist.) □

Vergleicht man verschiedene Begriffe einer "großen Kardinalzahl", so zeigt sich, daß meistens der stärkere Begriff gleich wesentlich stärker ist:

Ist die kleinste κ-Zahl größer als die kleinste λ-Zahl,
so gibt es unterhalb jeder λ-Zahl λ-viele κ-Zahlen.

Damit erhalten wir einen weiteren Ansatz:

κ ist groß $\iff$ es gibt unterhalb κ "sehr viele" kleinere Zahlen.

Um zu erklären erklären, was "sehr viele" Zahlen sind, benutzt man in vielen Gebieten der Mathematik den Begriff des *Ideals* bzw. des *Filters*, um die wichtigsten Eigenschaften "kleiner" bzw. "großer" Mengen festzulegen:

18.3 Ideale und Filter

Es sei $a \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Menge $F \subseteq \mathcal{P}(a)$ heißt (echter) **Filter auf** a gdw

(F1) $\emptyset \notin F \wedge a \in F$,

(F2) $x \in F \ \wedge \ x \subseteq y \subseteq a \rightarrow y \in F$,

(F3) $x, y \in F \rightarrow x \cap y \in F$.

Für einen **Ultrafilter** gilt zusätzlich

(F4) $\forall x \subseteq a \, (x \in F \vee a - x \in F)$.

Eine Menge $I \subseteq \mathcal{P}(a)$ heißt **Ideal auf** a gdw

(I1) $\emptyset \in I \wedge a \notin I$,

(I2) $x \in I \ \wedge \ y \subseteq x \subseteq a \rightarrow y \in I$,

(I3) $x, y \in I \rightarrow x \cup y \in I$.

Ist F ein Filter (bzw. Ultrafilter), so ist die Menge $\{a - x \mid x \in F\}$ ein Ideal, das *duale Ideal,* und umgekehrt.

Beispiele und Bemerkungen

1. Der einfachste Filter auf $a \neq \emptyset$ ist die Menge $\{a\}$, $\{\emptyset\}$ ist das einfachste Ideal.

2. Für jedes $\emptyset \neq x \subseteq a$ ist $< x >:= \{z \subseteq a \mid x \subseteq z\}$ ein Filter, der von x **erzeugte Hauptfilter**. Dieser ist ein Ultrafilter genau dann, wenn x nur ein Element besitzt. Interessanter sind Ultrafilter, die keine Hauptfilter sind, sie werden auch **freie** Ultrafilter genannt (während die Hauptultrafilter durch ein Element *fixiert* sind).

3. Hat $a = \{x, y\}$ zwei Elemente $x \neq y$, so gibt es auf a die Filter $\{a\}, \{\{x\}, a\}$ und $\{\{y\}, a\}$; die letzten beiden sind Hauptultrafilter, $\{a\}$ ist zwar Hauptfilter, aber kein Ultrafilter. Allgemeiner ist auf einer endlichen Menge a jeder Filter ein Hauptfilter (erzeugt vom Durchschnitt der endlich-vielen Elemente des Filters).

4. Auf einer unendlichen Menge a ist

   $$\begin{array}{rl} \{x \subseteq a \mid x\ endlich\} & \text{ein Ideal mit} \\ \{x \subseteq a \mid x\ co\text{-}endlich\ (d.h.\ a - x\ endlich)\} & \text{als dualem Filter} \end{array}$$

   auf a, der kein Hauptfilter (und auch kein Ultrafilter) ist und welcher im Falle $a = \mathbb{N}$ FRÉCHET-*Filter* genannt wird. Ultrafilter, die den obigen Filter erweitern, können keine endlichen Mengen als Elemente enthalten und sind somit freie Ultrafilter.

5. Auf der Menge der reellen Zahlen ist die Menge

   $$\{x \subseteq \mathbb{R} \mid x \text{ hat Lebesgue-Maß } 0\}$$

   ein Ideal, welches kein Hauptideal ist.

6. Es sei κ eine Kardinalzahl mit $cf(\kappa) > \omega$. Dann ist

   $$\{x \subseteq \kappa \mid \exists y \subseteq \kappa (y\ club\ \wedge y \subseteq x)\}$$

   ein Filter, der *club-Filter* auf κ. Das duale Ideal besteht aus den Teilmengen von κ, welche nicht stationär in κ sind.

7. Für eine unendliche Kardinalzahl κ ist

$$\{x \subseteq \kappa \mid |x| < \kappa\}$$

ein Ideal auf κ, der zugehörige duale Filter heißt auch *Kardinalzahlfilter* auf κ.

8. Unter den Anwendungen des Auswahlaxioms haben wir früher bereits das BOOLEsche Primideal-Theorem BPI erwähnt, welches besagt, daß jeder Filter zu einem Ultrafilter erweitert werden kann. Soweit nicht anders vermerkt, sind die Filter in den obigen Beispielen keine Ultrafilter, besitzen aber Erweiterungen zu freien Ultrafiltern.

Für eine Kardinalzahl κ ist ein Filter F κ-*vollständig* gdw er unter Durchschnitten von weniger als κ-vielen Elementen abgeschlossen ist:

$$\alpha < \kappa \wedge \forall \xi < \alpha \, x_\xi \in F \to \bigcap_{\xi < \alpha} x_\xi \in F.$$

Jeder Filter ist somit $\aleph_0$-vollständig; $\aleph_1$-vollständige Filter (die also unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen sind) nennt man auch σ-*vollständig*, ähnlich für Ideale. Die LEBESGUE-meßbaren Mengen vom Maß 0 bilden eine σ-vollständiges Ideal, der club-Filter sowie der Kardinalzahlfilter auf einer regulären Kardinalzahl κ sind κ-vollständig (allgemeiner ist der club-Filter auf einer Kardinalzahl κ stets $cf(\kappa)$-vollständig). Der club-Filter besitzt zudem eine weitere Abgeschlossenheitsbedingung: Ein Filter F auf κ ist unter **diagonalem Durchschnitt** abgeschlossen gdw

$$\forall \xi < \kappa \, a_\xi \in F \to \Delta_{\xi < \kappa} a_\xi := \{\alpha < \kappa \mid \forall \xi < \alpha \; \alpha \in a_\xi\} \in F.$$

Ist $\kappa > \omega$ regulär, so ist der club-Filter auf κ unter diagonalem Durchschnitt abgeschlossen. Diese Eigenschaft führt zum

Satz von Fodor

Es sei $\kappa > \omega$ regulär, $s \subseteq \kappa$ stationär in κ und $f : s \to \kappa$ mit $\forall \alpha \in s \; f(\alpha) < \alpha$. Dann existiert eine stationäre Teilmenge $t \subseteq s$, so daß f auf t konstant ist.

Dieses Ergebnis gilt übrigens auch für Funktionen auf stationären Teilklassen von *On* und erklärt die Bezeichnung “stationär”.

Beweis: Angenommen, für alle $\xi < \kappa$ wären die Mengen

$$a_\xi := \{\alpha \in s \mid f(\alpha) = \xi\}$$

nicht stationär. Dann gäbe es für alle $\xi < \kappa$ club Mengen c_ξ mit $c_\xi \cap a_\xi = \emptyset$. Der diagonale Durchschnitt $\Delta_{\xi<\kappa} c_\xi$ ist dann club, trifft also die stationäre Menge s in einem α, wo einerseits f definiert ist, andererseits $\forall \xi < \alpha\ f(\alpha) \neq \xi$ ist, was aber der Vorraussetzung $f(\alpha) < \alpha$ widerspricht! □

18.4 Mahlosche Zahlen

In seinen Arbeiten von 1911-13 untersuchte PAUL MAHLO[3] Prinzipien zur Erzeugung großer Kardinalzahlen. Große Kardinalzahlen sollten zumindest regulär sein, wir gehen daher aus von der Klasse der (unendlichen) regulären Kardinalzahlen

$$Reg := \{\kappa \geq \omega \mid \kappa \text{ } regul\ddot{a}r\}.$$

Diese Klasse ist unbeschränkt, aber nicht abgeschlossen ($\aleph_\omega$ ist Supremum von regulären Kardinalzahlen, aber selbst nicht regulär). Ist die Klasse der regulären Zahlen stationär? In ZF ist diese Aussage nicht beweisbar, andererseits gilt offenbar für für jede Teilmenge $a \subseteq \kappa$ einer regulären Kardinalzahl κ:

$$a \text{ } unbeschr\ddot{a}nkt \leftrightarrow |a| = \kappa.$$

Ist $C = \{c_\xi \mid \xi \in On\}$ die monotone Aufzählung einer club Klasse C, so sind die regulären Limespunkte von C genau die *Fixpunkte* der Aufzählung (also κ mit $\kappa = c_\kappa$). Ist andererseits A eine unbeschränkte Klasse von Ordinalzahlen, so ist A' club und ein Fixpunkt dieser Klasse ist ein Limespunkt von A. Daß die Klasse Reg stationär ist, besagt also gerade, daß für jede unbeschränkte Klasse $A \subseteq On$ die Klasse

$$F(A) := A' \cap Reg = \{\kappa \mid reg(\kappa) \wedge A \cap \kappa \text{ } unbeschr\ddot{a}nkt \text{ } in \text{ } \kappa\}$$

nicht-leer ist. Als Schema in ZF ausgedrückt, ist dies gerade das

[3] *Über lineare transfinite Mengen; Zur Theorie und Anwendung der ρ_0-Zahlen.* Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse 63, 187-225, ibid. 64, 108-112, ibid. 65; 268-282

MAHLOsche Fixpunktprinzip

Jede unbeschränkte Klasse besitzt einen regulären Limespunkt (und damit beliebig große):

$$\begin{aligned} A \textit{ unbeschränkt} &\rightarrow F(A) \neq \emptyset \\ &\rightarrow F(A) \textit{ unbeschränkt}. \end{aligned}$$

Angewandt auf die unbeschränkte Klasse der regulären Zahlen liefert es die Existenz der schwach-unerreichbaren Zahlen (als 1-schwach-unerreichbaren Zahlen) sowie allgemeiner unbeschränkt vieler *schwach-unerreichbaren Zahlen vom endlichen Grad n*:

$$\begin{aligned} wIn(0): &= \{\kappa \mid reg(\kappa)\} = Reg \\ wIn(1): &= \{\kappa \mid reg(\kappa) \wedge Reg \cap \kappa \textit{ unbeschränkt in } \kappa\} \\ wIn(2): &= \{\kappa \mid reg(\kappa) \wedge sIn(1) \cap \kappa \textit{ unbeschränkt in } \kappa\} \\ wIn(3): &= \{\kappa \mid reg(\kappa) \wedge sIn(2) \cap \kappa \textit{ unbeschränkt in } \kappa\} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Um auch die ω-schwach-unerreichbaren Zahlen zu erhalten (oder allgemein über die Limes-Iteration herauszugelangen), muß man es verstärken. Stattdessen gehen wir gleich zu dem stärkeren (und besser anwendbaren)

MAHLOschen Prinzip

über, welches über das Fixpunktprinzip hinausführt und das man als ein Beispiel für die Reflexion der Eigenschaft 2. Stufe *stationär* auffassen kann: Setzt man

$$ST(A) := \{\kappa \mid reg(\kappa) \wedge A \cap \kappa \textit{ stationär in } \kappa\},$$

so besagt das MAHLOsche Prinzip:

$$A \textit{ stationär} \rightarrow ST(A) \textit{ stationär}.$$

Beginnt man mit der Klasse *On* aller Ordinalzahlen, die offensichtlich stationär ist, so ergibt eine erste Anwendung des MAHLOschen Prinzips, daß $ST(On)$ stationär ist. Diese Klasse besteht aus den regulären Kardinalzahlen κ (= MAHLOsche Zahlen vom Grad 0), so daß die kleineren regulären Zahlen eine stationäre Teilmenge von κ bilden (= MAHLOsche Zahlen vom Grad 1). Durch wiederholte Anwendung des MAHLOschen Prinzips erhält man dann die Existenz stationär-vieler *(schwach) Mahloscher Zahlen* vom endlichen Grad n:

$$\begin{aligned}
Ma(0) :&= \{\kappa \mid reg(\kappa)\} = Reg \\
Ma(1) :&= \{\kappa \mid reg(\kappa) \wedge Reg \cap \kappa \; stationär \; in \; \kappa\} \\
Ma(2) :&= \{\kappa \mid reg(\kappa) \wedge Ma(1) \cap \kappa \; stationär \; in \; \kappa\} \\
Ma(3) :&= \{\kappa \mid reg(\kappa) \wedge Ma(2) \cap \kappa \; stationär \; in \; \kappa\} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Ersetzt man im MAHLOschen Prinzip die Eigenschaft *regulär* durch *(stark) unerreichbar*, so erhält man die Existenz der **Mahloschen Zahlen** als unerreichbare Kardinalzahlen (während die obigen Zahlen nur schwach unerreichbar sind). Verstärkungen des obigen Prinzips erlauben es, den Prozeß fortzuführen und auch noch zu diagonalisieren:

MAHLOsche Zahlen κ vom Grad κ =
hyper-MAHLOsche Zahlen vom Grad 0,
hyper-hyper-MAHLOsche Zahlen,
hyper-hyper... hyper-MAHLOsche Zahlen,
κ-hyper-MAHLOsche Zahlen,
...

Es zeigt sich ein weiterer Ansatz, zu großen Kardinalzahlen zu kommen, indem man von den regulären Zahlen ausgeht und diese Klasse immer weiter "verdünnt": "kleine" Zahlen werden nach und nach ausgesondert, so daß schließlich nur die "großen" Zahlen in "großen" Abständen übrigbleiben.

18.5 Meßbare Zahlen

Wir haben bereits gesehen, das als Folge des Auswahlaxioms Mengen existieren, die nicht LEBESGUE-meßbar sind, wobei der Satz von VITALI zeigte, daß BANACH verallgemeinerte das Problem, indem er die Translationsinvarianz wegließ und triviale Fälle durch die Forderung ersetzte, daß $m(\{x\}) = 0$ ist für alle reellen Zahlen x. Nach BANACH-KURATOWSKI 1929 gibt es aber auch hierfür keine Lösung, wenn man die Kontinuumshypothese annimmt. Benutzt man die Translationinvarianz, so kann man das Maßproblem auf Mengen $A \subseteq [0,1]$ beschränken, das Einheitsintervall durch eine beliebige Menge I ersetzen und das Maß dort auf 1 normieren. Damit stellt sich die Frage, ob es eine nicht-leere Menge M gibt mit einer Maßabbildung

$$m : \mathcal{P}(M) \to \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\},$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

(M1) $m(M) = 1$ *normiert*

(M2) $\forall x \in M \; m(\{x\}) = 0$ *nicht-trivial*

(M3) ist $(A_i \mid i < \omega)$ eine abzählbare Folge von Mengen $\subseteq M$, so ist $m(\bigcup_{i<\omega} A_i) = \sum_{i<\omega} m(A_i)$, *$\sigma$-additiv*

Hier kommt es nun auf die Struktur auf der Menge M überhaupt nicht mehr an, so daß man M durch eine Kardinalzahl κ ersetzen kann. Eine Funktion m auf $\mathcal{P}(\kappa)$, welche obere Bedingungen erfüllt, heißt **Maß** auf κ. Eine natürliche Verstärkung von (M3) ist die κ-**Additivität**:

Ist $\gamma < \kappa$ und $(A_\xi \mid \xi < \lambda)$ eine Folge disjunkter Teilmengen von κ, so ist

$$m(\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi) = \sum_{\xi<\gamma} m(A_\xi).$$

(Dabei ist unter der transfiniten Summe das Supremum aller Summen von endlichen Teilmengen zu verstehen; ω_1-additiv ist also σ-additiv.) BANACH zeigte nun den

Satz

Ist κ die kleinste Kardinalzahl, welche ein Maß besitzt, so ist jedes Maß auf κ bereits κ-additiv.

Beweis: Angenommen, m wäre ein Maß auf κ, welches nicht κ-additiv ist. dann gibt es also für ein $\gamma < \kappa$ eine Folge $(A_\xi \mid \xi < \gamma)$ disjunkter Teilmengen von κ, so daß $m(\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi) \neq \sum_{\xi<\gamma} m(A_\xi)$. Da ein Maß stets σ-additiv ist, muß $\gamma > \omega$ sein, und man kann leicht zeigen, daß es nur abzählbar-viele A_ξ geben kann mit $m(A_\xi) > 0$. Läßt man diese weg, so kann man wegen der σ-Additivität annehmen, daß stets $m(A_\xi) = 0$, während $\sum_{\xi<\gamma} m(A_\xi) = r > 0$. Dann erhält man aber mittels

$$\overline{m}(X) = \frac{m(\bigcup_{\xi \in X} A_\xi)}{r}$$

ein Maß über $\gamma < \kappa$ im Widerspruch zur Minimalität von κ. $\square$

Bemerkungen und Definitionen

1. Ist m ein Maß auf κ, so ist

   - $I_m := \{x \subseteq \kappa \mid m(x) = 0\}$ ein ω_1-vollständiges Ideal auf κ, welches kein Hauptideal ist,
   - $F_m := \{x \subseteq \kappa \mid m(x) = 1\}$ ein ω_1-vollständiger Filter auf κ, welcher kein Hauptfilter ist.

2. Ein 2-**wertiges Maß** ist ein Maß, welches nur die Werte 0 und 1 annimmt. In diesem Fall ist der entsprechende Filter F_m ein Ultrafilter (und I_m ein Primideal).

   Ist umgekehrt U ein ω_1-vollständiger Filter auf κ, welcher kein Hauptfilter ist, und definiert man eine Abbildung $m : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0,1\}$ durch

   $$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

   so erhält man ein 2-wertiges Maß m auf κ.

3. Ein Filter, welcher kein Hauptfilter ist, heißt **freier** Filter.

4. κ sei eine überabzählbare Kardinalzahl. Dann heißt

   $$\begin{aligned} \kappa \textbf{ reell-wertig meßbar} &: \leftrightarrow \quad \exists m(m\ \kappa\text{-additives Maß auf } \kappa) \\ \kappa \textbf{ meßbar} &: \leftrightarrow \quad \exists m(m\ \kappa\text{-additives 2-wertiges Maß auf } \kappa) \\ &\leftrightarrow \quad \exists U(U\ \kappa\text{-vollständiger freier Ultrafilter auf } \kappa) \end{aligned}$$

Da man (mit Hilfe des Auswahlaxioms) den FRÉCHET-Filter der co-endlichen Mengen von natürlichen Zahlen zu einem Ultrafilter auf ω erweitern kann, der dann kein Hauptfilter sein kann, erfüllt auch ω die Bedingung, die an eine meßbare Kardinalzahl gestellt werden kann, wird aber i. a. nicht dazugerechnet, da die überabzählbaren meßbaren Zahlen zu den großen Kardinalzahlen gehören, deren Existenz man in ZFC nicht beweisen kann. Tatsächlich gilt:

- jede reell-wertig meßbare Kardinalzahl κ ist schwach unerreichbar,
- jede meßbare Kardinalzahl κ ist (stark) unerreichbar (aber nicht umgekehrt),

- ist κ reell-wertig meßbar, so ist κ meßbar oder $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$
  (ist also κ reell-wertig meßbar, aber nicht meßbar, so muß $2^{\aleph_0}$ sehr groß sein).

Die kleinste unerreichbare Zahl ist noch nicht meßbar, tatsächlich liegen unter einer unerreichbaren Zahl κ κ-viele kleinere unerreichbare Zahlen, und während die Existenz einer unerreichbaren Zahl noch mit der Annahme $V = L$ verträglich ist, widerspricht die Existenz einer meßbaren Zahl diesem Axiom, hat dafür aber weitere Konsequenzen für die projektive Hierarchie:

Satz

In der Theorie $\mathsf{ZFC} + \mathsf{MC}$: *"es existiert eine meßbare Kardinalzahl" ist beweisbar:*

- $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-Mengen haben die Perfekte-Mengen-Eigenschaft (P) und erfüllen damit auch die Kontinuumshypothese,*

- $\mathbf{\Sigma}^1_2$*- und* $\mathbf{\Pi}^1_2$*-Mengen haben die* BAIRE*-Eigenschaft und sind* LEBESGUE*-meßbar.*

Ist κ eine RAMSEY-Zahl, also $\kappa \rightarrow \kappa^2_2$, so gilt das MAHLOsche Prinzip für V_κ (also unterhalb von κ): κ ist eine MAHLOsche Zahl vom Grad κ, es gibt unterhalb von κ unbeschränkt-viele MAHLOsche Zahlen α vom Grad $\alpha, \ldots$

Kapitel 19

Homogene Mengen

19.1 Das Schubfachprinzip

besagt in seiner einfachsten Form:

Verteilt man n Elemente in m < n-viele Schubladen, so muß eine der Schubladen mindestens 2 Elemente enthalten.

Die Verallgemeinerung auf unendliche Mengen lautet:

Ist eine unendliche Menge a zerlegt in endlich-viele Mengen, so muß wenigstens eine dieser Mengen unendlich sein:

$$a = a_0 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} a_k \textit{ unendlich } \rightarrow \exists i \leq k \, (a_i \textit{ unendlich}) \, .$$

Noch etwas allgemeiner erhalten wir das

Das Schubfachprinzip für reguläre Kardinalzahlen

$$reg(\kappa) \wedge \lambda < \kappa \wedge \kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} a_\xi \rightarrow \exists x \subseteq \kappa \, \exists \xi < \lambda \, (|x| = \kappa \wedge x \subseteq a_\xi)$$

Zur weiteren Verallgemeinerung setzen wir

$[a]^n := \{x \subseteq a \mid |x| = n\}$ Menge der n-elementigen Teilmengen von a.

Satz von Ramsey (1930)

$$a \textit{ unendlich} \wedge [a]^n = a_0 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} a_k \rightarrow \exists x \subseteq a \, \exists i \leq k \, ([x]^n \subseteq a_i \wedge x \textit{ unendlich}).$$

Eine Zerlegung $[a]^n = a_0 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} a_k$ in $k+1$ Teile kann man auch als eine Abbildung $f : [a]^n \to \{0, \ldots, k\}$ auffassen. Daher stellen die folgenden *Pfeilrelationen* eine Verallgemeinerung dar, wobei $n < \omega$ und α eine Kardinalzahl sei:

$$\kappa \longrightarrow (\alpha)^n_\gamma :\leftrightarrow \forall f (f : [\kappa]^n \to \gamma \\ \to \exists x \subseteq \kappa \, (|x| = \alpha \wedge \forall u, v \in [x]^n \, f(u) = f(v))),$$

d. h. jede Zerlegung der n-elementigen Teilmengen von κ besitzt eine Teilmenge $x \subseteq \kappa$ von der Mächtigkeit α, so daß f auf den n-elementigen Teilmengen von x konstant ist (d. h. daß alle n-elementigen Teilmengen von x in derselben Teilmenge liegen). Eine derartige Menge x nennt man auch **homogen** (oder **nicht-unterscheidbar**) für f. Beachte, daß die obige Relation erhalten bleibt, wenn man die Zahlen auf der linken Seite vom Pfeil vergrößert bzw. die Werte auf der rechten Seite verkleinert. Im wichtigsten Fall $\gamma = 2$ läßt man den unteren Index häufig weg.

Der Satz von RAMSEY besagt mit dieser Bezeichnungsweise:

$$\omega \longrightarrow (\omega)^n_m \quad \text{für alle } n, m < \omega$$

Zur Verallgemeinerung dieses Satzes definieren wir die **Beth**-Funktion durch

$$\beth_0(\alpha) = \alpha, \beth_{\beta+1} = 2^{\beth_\beta(\alpha)}, \beth_\lambda(\alpha) = \bigcup_{\xi<\lambda} \beth_\xi(\alpha) \text{ für } Lim(\lambda).$$

Damit gilt nach ERDÖS-RADO für alle $n, m < \omega$, α unendliche Kardinalzahl:

$$\beth_n(\alpha)^+ \longrightarrow (\alpha^+)^{n+1}_m,$$

wobei dies Ergebnis optimal ist in dem Sinne, daß man $\beth_n(\alpha)^+$ nicht durch $\beth_n(\alpha)$ ersetzen kann.

Übungsaufgabe: Es gilt $2^\kappa \not\longrightarrow (3)^2_\kappa$.

Von besonderen Interesse sind die RAMSEYschen Zahlen $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ für $\kappa > \omega$; diese Zahlen sind (stark) unerreichbar, die Menge $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ unerreichbar}\}$ der kleineren unerreichbaren Zahlen ist stationär in κ, ebenso die Menge der kleineren MAHLOschen Zahlen vom Grad $< \kappa$, usw. Zugleich haben diese Zahlen weitere interessante Charakterisierungen (*schwach kompakt, Baum-Eigenschaft, Π^1_1-unbeschreibbar*)[1].

[1] s. z. B. DRAKE, F.R. *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals* Amsterdam 1974, Ch. 10, § 2

19.2 L kann sehr klein sein

Eine Verallgemeinerung der Relation $\kappa \longrightarrow (\alpha)^n_\gamma$ mit ω statt n führt zum Widerspruch mit dem Auswahlaxiom, ist aber möglich im Rahmen des Axioms der Determiniertheit[2]. Dagegen ist ohne Verletzung des Auswahlaxioms vermutlich noch folgende Verallgemeinerung möglich:

Definition

$$[X]^{<\omega} := \bigcup_{n<\omega} [X]^n \quad \text{Menge der endlichen Teilmengen von } X$$

Ist $f : [X]^{<\omega} \to \lambda$, so heißt

$$Y \subseteq X \text{ **homogen** für } f :\leftrightarrow \forall n < \omega \, \forall x, y \in [X]^n \, f(x) = f(y),$$

und die gewünschte Verstärkung ist die *infinitäre Pfeilrelation*

$$\kappa \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}_\lambda :\leftrightarrow \forall f (f : [X]^{<\omega} \to \lambda \ \to \exists y \subseteq \kappa (o.t.(y) = \alpha \wedge y \ \textit{homogen für} \, f)).$$

Für $\omega \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}_2$ gibt es ein einfaches Gegenbeispiel; ist $\kappa(\alpha)$ das kleinste κ mit $\kappa \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}_2$, so ist dieses für $\alpha = \omega$ bereits sehr groß (wenn es überhaupt existiert), insbesondere unerreichbar und erheblich größer als die erste Zahl $\kappa > \omega$ mit der RAMSEY-Eigenschaft $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$. Die ERDÖS-Zahlen $\kappa(\alpha)$ lassen sich besonders gut mit modelltheoretischen Methoden untersuchen:

Ist $\mathcal{M}$ eine Struktur auf der Menge M (hier insbesondere etwa $\mathcal{M} = (M, \in)$) und $X \subseteq M$ durch eine Relation $<$ geordnet, so heißt $(X, <)$ eine Menge **nicht-unterscheidbarer** (n.u.) Elemente für $\mathcal{M}$ gdw für alle Formeln $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ und alle aufsteigenden Folgen $x_1 < \ldots < x_n, y_1 < \ldots < y_n$ von Elementen von X gilt:

$$\mathcal{M} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \iff \mathcal{M} \models \varphi[y_1, \ldots, y_n].$$

Nach einem Satz von EHRENFEUCHT-MOSTOWSKI besitzt jede Theorie T, die unendliche Modelle besitzt, zu jeder unendlichen geordneten Menge $(X, <)$ ein Modell, welches X als Menge n.u. Elemente enthält. J. SILVER benutzte die Partitionszahlen, um zu jeder Struktur eine Menge von n.u. Elementen zu erhalten:

[2] s. KLEINBERG, E.M. *Infinitary combinatorics and the axiom of determinateness.* Springer LNM 612 (1977) oder
KANAMORI, A. *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings.* Springer 2003

Satz von Silver

Für unendliche Limeszahlen α sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$

(ii) *jede Struktur $\mathcal{M}$ (zu einer abzählbaren Sprache) mit $\kappa \subseteq M$ enthält eine Teilmenge $X \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp α, welche n.u. für $\mathcal{M}$ ist.*

Anwendung auf L

Falls $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$ für ein abzählbares α gilt, so gilt dies auch in L, für überabzählbares α konnte SILVER jedoch zeigen, daß dann L "sehr klein" sein muß:

Falls $\kappa \longrightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$, so gilt: Es gibt eine Klasse $X \subseteq On$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *X ist club in On,*
2. *X enthält alle überzählbaren Kardinalzahlen: $\aleph_\alpha \in X$ für alle $\alpha > 0$,*
3. *L wird von X in folgendem Sinne erzeugt: jedes $x \in L$ ist in L definierbar mit Hilfe endlich-vieler Elemente von X als Parameter,*
4. *$(X, \in)$ ist eine Klasse von n.u. Elementen für $(L, \in)$,*
5. *jede in L ohne Parameter definierbare Menge ist (in V) abzählbar.*

Insbesondere sind also die folgenden in L definierten Mengen, die in L selbst überabzählbar sind, (in V) abzählbar:

- die Menge der reellen Zahlen in L,
- $\mathcal{P}(\omega)^L$, die erste überabzählbare Kardinalzahl ω_1^L von L,
- die kleinste in L unerreichbare Zahl, ...

Dagegen sind die (wirklichen) überabzählbaren Kardinalzahlen - wie überhaupt wegen der Nicht-Unterscheidbarkeit alle Elemente von X - in L unerreichbare Kardinalzahlen! Ferner sind alle L_κ für überabzählbare Kardinalzahlen κ elementare Submodelle von L, besitzen also dieselben Eigenschaften wie L, und somit wird eine Wahrheitsdefinition für die Klasse L definierbar. Damit kann man die obigen Ergebnisse mittels einer Menge natürlicher Zahlen kodieren, die man $O^\#$ nennt.

Kapitel 20

Literatur

Zur Einführung und zum Gebrauch neben der Vorlesung

CAMERON, P. J. *Sets, Logic and Categories.* Springer 1999
DEISER, O. *Einführung in die Mengenlehre.* Springer 2004
DEVLIN, K. *The Joy of Sets.* Springer 1993
EBBINGHAUS, D. *Einführung in die Mengenlehre.* Spectrum 2003
FRIEDRICHSDORF, U.-PRESTEL, A. *Mengenlehre für den Mathematiker.* vieweg 1985
KLAUA, D. *Mengenlehre* de Gruyter 1979
KRIVINE, J.L. *Théorie axiomatique des ensembles.* Presse Univ. Paris 1969
MOSCHOVAKIS, Y. *Notes on Set Theory.* Springer 1994
LÉVY, A. Basic *Set Theory.* Springer 1979
RUBIN, J.E. *Set Theory for the Mathematician.* Holden-Day 1967

Ergänzende und weiterführende Literatur

JECH, TH. *Set Theory.* Springer 2003
MENDELSON, E. *Introduction to Math. Logic.* Chapman & Hall 1997
RAUTENBERG, W. *Einführung in die Mathematische Logik.* vieweg 2002
SHOENFIELD, J.R. *Mathematical Logic.* Addison-Wesley 1967

Monographien mit besonderen Schwerpunkten

DEVLIN, K. *Aspects of Constructibility.* Springer 1984

DRAKE, F.R. *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals* North Holland 1974

FELGNER, ULRICH *Models of ZF-set theory.* Springer 1971

JECH, TH. *The Axiom of Choice.* Springer 1993

KANAMORI, A. *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings.* Springer 2003

KECHRIS, ALEXANDER S. *Classical descriptive set theory.* Springer 1995

KUNEN, K. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* North Holland 1983

MOSCHOVAKIS, YIANNIS N. *Descriptive set theory.* North Holland 1980

WAGON, S. *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge 1986

Von historischem und allgemeinem Interesse

BOLZANO, B. *Paradoxien des Unendlichen.* Leipzig 1851 (Meiner 1955)

CANTOR, G. *Gesammelte Abhandlungen.* Springer 1980

DAUBEN, J.W. *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton 1990

FELGNER, U. (Herausgeber) *Mengenlehre.* Wiss. Buchgesellschaft 1979

FRAENKEL, A. *Einleitung in die Mengenlehre.* Springer 1919

FRAENKEL, A.- BAR HILLEL, Y. - LÉVY, A. *Foundations of Set Theory.* North Holland 1973

GÖDEL, K. *Collected Works.* Oxford 1986-2003

HALLETT, M. *Cantorian set theory and limitation of size.* Oxford Univ. Press 1984

HAUSDORFF, F. *Gesammelte Werke Band II. Grundzüge der Mengenlehre.* Springer 2002

LAVINE, S. *Understanding the Infinite.* Harvard 1998

MESCHKOWSKI, H. *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors* vieweg 1967

MESCHKOWSKI, H. *Hundert Jahre Mengenlehre* dtv 1973

MOORE, G.H. *Zermelo's Axiom of Choice.* Springer 1982

PURKERT, E. - ILGAUDS, H.J. *Georg Cantor 1845-1918.* Birckhäuser 1987

QUINE, WILLARD V. *Set Theory and its Logic.* Harvard 1969

Alternative Axiomensysteme

BERNAYS, P. *Axiomatic set theory.* North Holland 1968
CHUAQUI, R. *Axiomatic Set theory. Impredicative Theory of Classes.* North Holland 1981
FORSTER, T. E. *Set theory with a universal set.* Oxford Univ. Press 1992
POTTER, M.D. *Sets. An Introduction.* Oxford Univ. Press 1990
QUINE, WILLARD V. *Mengenlehre und ihre Logik.* vieweg 1973
SCHMIDT, J. *Mengenlehre I.* BI 1966
VOPENKA, P. - HAJEK, P. *The Theory of Semisets.* North Holland 1972

Bibliographie

G.H. MÜLLER und V. LENSKI ed. *Ω-Bibliography of Mathematical Logic.* Vol. I-VI. Springer 1987, fortgesetzt im internet unter:
http://www-logic.uni-kl.de/BIBL/index.html
Weitere links auch über http://www.math.uni-heidelberg.de/logic/wwwlinks.html

Skripten im Internet

über die links
http://www.math.uni-heidelberg.de/logic/skripten.html
http://www.uni-bonn.de/logic/world.html
Biographien: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/BiogIndex.html