Skriptum zur Vorlesung
Deskriptive Mengenlehre

Klaus Gloede
Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
mit einem Beitrag von
Jan Reimann
Institut für Informatik der Universität Heidelberg

Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skriptum ist gedacht für die Hörer meiner Vorlesung im Sommersemester 2006; es soll weder ein Lehrbuch noch den Besuch der Vorlesung ersetzen, sondern das Mitschreiben erleichtern und zum Nachschlagen der wichtigsten Definitionen und Ergebnisse dienen. Daher wurde der Text vor den jeweiligen Vorlesungsstunden zur Verfügung gestellt, und zum Schluß des Semesters habe ich dann einige Teile (insbesondere in den Kapiteln 4 und 6) umgearbeitet. Jan Reimann danke ich dafür, dass er das Kapitel über Spiele und Determiniertheit geschrieben hat.

Rückmeldungen seitens der Hörer gibt es meistens erst dann, wenn das Skript zur Vorbereitung einer Prüfung benutzt wird. Ich würde mich jedoch freuen, wenn ich bereits früher Kritik, Verbesserungsvorschläge oder auch nur Hinweise auf Schreibfehler erhielte; jegliche derartige Anregung wäre mir ein Anstoß, dieses Skriptum gründlich zu überarbeiten, wie es eigentlich nötig wäre.

Heidelberg, im Juli 2006

Kapitel 1

Einführung

Die Entwicklung des allgemeinen Mengenbegriffes durch G. CANTOR und des abstrakten Funktionsbegriffes (vor allem durch L. DIRICHLET, B. RIEMANN und K. WEIERSTRASS)[1] wurde um 1900 abgelöst durch Arbeiten der französischen Mathematiker E. BOREL, R. BAIRE und H. LEBESGUE, die bemüht waren, den Maßbegriff für Mengen reeller Zahlen zu klären und Eigenschaften spezieller Funktionen einer reellen Variablen zu untersuchen, die etwa durch analytische Ausdrücke, unendliche Reihen, usw. gegeben sind.

Ansätze für die sich hieraus entwickelnde *Deskriptive Mengenlehre* finden sich aber auch schon bei CANTOR; seine Untersuchungen über die Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Fourier-Entwicklung hatten ihn zur Einführung der transfiniten Ordinalzahlen und zugleich mit DEDEKIND zur Präzisierung des Begriffes der reellen Zahl geführt. In einem Brief an DEDEKIND stellte er die Frage, ob die reellen Zahlen abzählbar seien - die ganzen Zahlen sind offensichtlich abzählbar, aber auch die rationalen und - wie CANTOR erstmals ausdrücklich feststellte - auch die reellen algebraischen Zahlen. Am 7.12.1873 teilte CANTOR in einem weiteren Brief an DEDEKIND eine Methode mit, mittels welcher er zeigen konnte, daß die reellen Zahlen *nicht* abzählbar sind (und daß es somit in jedem Intervall transzendente reelle Zahlen geben müsse). Veröffentlicht wurde dieses Ergebnis (in vereinfachter Form) in

G. CANTOR: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelles Journ. Math. 77, 258-262 (1874)

und beruhte auf dem Nachweis, daß

[1] Lebensdaten sowie einen kurzen Abriß der Biographie von Mathematikern findet man z. B. unter http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/BiogIndex.html

(*) *jede abzählbare Menge in jedem (nicht-leeren offenen) Intervall mindestens eine Zahl ausläßt.*

Zum Beweis von (*) sei M eine abzählbare Menge und (a,b) ein beliebiges Intervall reeller Zahlen mit $a < b$. Falls $M \cap (a,b)$ höchstens eine Zahl enthält, so sind wir fertig. Anderenfalls gibt es in $M \cap (a,b)$ mindestens zwei Zahlen, also

$$a < a_0 < b_0 < b,$$

wobei man als $a_0, b_0 \in M$ die ersten (in der vorgegebenen Aufzählung von M) wähle. Danach wähle man ebenso die ersten Elemente $a_1, b_1 \in M$ mit

$$a < a_0 < a_1 < b_1 < b_0 < b,$$

usw.

Für die dadurch gebildete Intervallschachtelung existieren

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{und} \quad b_\infty = \lim_{n\to\infty} b_n \;\text{ mit}$$
$$a < a_0 < a_1 < \ldots < a_\infty \leq b_\infty < \ldots b_1 < b_0 < b.$$

Falls $a_\infty = b_\infty$ (z. B. wenn - wie CANTOR bemerkte - M eine Aufzählung aller reellen algebraischen Zahlen ist), so kann diese Zahl nicht in M sein (kein Element von M kann in allen Intervallen (a_n, b_n) liegen, während aber a_∞ in allen diesen Intervallen liegt); falls aber $a_\infty < b_\infty$, so enthält das entsprechende Intervall keine weiteren Elemente von M. $\square$

Die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen beweist man heute meistens mit CANTORS 2. Diagonalverfahren (das 1. Diagonalverfahren liefert die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen), das von CANTOR vermutlich aber erst 1891 in seiner Arbeit

G. CANTOR: *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.* Jahresbericht Deutsche Math. Ver. 1, 75-78 (1890/91)

veröffentlicht wurde, und erst in seinen Beiträgen von 1895 erscheint die Bemerkung, daß $2^{\aleph_0}$ die Mächtigkeit der reellen Zahlen ist. Die ältere Beweismethode von (*) wurde in

G. CANTOR: *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, 6.*
Math. Ann. 23 (1884), 453-488

wieder aufgenommen, um zu zeigen, daß

abzählbare Mengen nicht perfekt sind.

Dabei heißt eine Menge P von reellen Zahlen *perfekt* gdw sie alle ihre Häufungspunkte besitzt und auch umgekehrt jeder Punkt in P Häufungspunkt von P ist:

$$P \quad \textbf{perfekt}: \leftrightarrow P \text{ abgeschlossen} \wedge \forall x \in P \, \forall \varepsilon > 0 \, |U_\varepsilon(x) \cap P| \geq 2.$$

(Da offenbar die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ perfekt ist, so ergibt sich hiermit ein neuer Beweis, daß diese Menge überabzählbar ist. Außerdem hat eine nicht-leere perfekte Menge offensichtlich die Mächtigkeit der reellen Zahlen $2^{\aleph_0}$.)

In einem weiteren Brief vom 5.1.1874 an DEDEKIND warf CANTOR die Frage auf, ob es möglicherweise eine bijektive Abbildung zwischen einer Fläche und einer Linie reeller Zahlen gäbe, was er überraschenderweise 1878 positiv beantworten konnte: der n-dimensionale Raum über den reellen Zahlen hat dieselbe Mächtigkeit wie das (eindimensionale) reelle Kontinuum! Weiterhin stellt sich die Frage, ob es eine Menge reeller Zahlen gibt, die einerseits überabzählbar und andererseits kleiner als die Mächtigkeit aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist: das *Kontinuumsproblem*. Dieses Problem wurde von D. HILBERT auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris an die erste Stelle unter den wichtigsten offenen Problemen gesetzt. Trotz angestrengter Bemühungen verschiedener Mathematiker gelang es nur die folgenden positiven Ergebnisse zu erhalten:

(a) *offene Teilmengen sind leer oder von Mächtigkeit des Kontinuums,*

(b) *perfekte Mengen sind leer oder von Mächtigkeit des Kontinuums,*

und da nach einem Satz von CANTOR-BENDIXSON (1883) abgeschlossene Mengen sich zerlegen lassen in eine perfekte Teilmenge und einen abzählbaren Rest, so gilt auch:

(c) *abgeschlossene Mengen sind abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.*

Diese Ergebnisse wurde von YOUNG 1906 auf G_δ-Mengen und von HAUSDORFF 1914 auf $G_{\delta\sigma\delta}$- und $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$-Mengen erweitert; 1916 von ALEXANDROV und (unabhängig) HAUSDORFF auf die BOREL-Mengen verallgemeinert und 1917 von SOUSLIN und LUSIN auf die analytischen Mengen übertragen, indem für diese die *Perfekte-Mengen-Eigenschaft* nachgewiesen wurde:

> *jede* BOREL*-Menge (allgemeiner: jede analytische Menge), die überabzählbar ist, enthält eine nicht-leere perfekte Menge und ist somit von der Mächtigkeit des Kontinuums.*

Diese Methode läßt sich jedoch nicht auf alle Mengen reeller Zahlen übertragen, da BERNSTEIN 1908 bereits bewiesen hatte, daß (unter der Annahme des Auswahlaxioms) eine überabzählbare Menge existiert, die keine perfekte Teilmenge besitzt. Auch alle anderen Versuche, das Kontinuumsproblem für weitere Mengen (also in höheren Stufen der projektiven Hierarchie) zu lösen, mißlangen; eine wesentlich neue Situation entstand erst, als K. GÖDEL 1938 und P.J. COHEN 1963 zeigten, daß die Kontinuumshypothese unabhängig von den üblichen Axiomen der Mengenlehre ist und daß das Ergebnis von SOUSLIN und LUSIN tatsächlich optimal ist (ebenfalls wieder bezogen auf die üblichen Axiome). Mit Hilfe des GÖDELschen Modells der *konstruktiblen* Mengen, in welchem das Auswahlaxiom und die (allgemeine) Kontinuumshypothese gelten, konnten auch einige weitere offenen Fragen der Deskriptiven Mengenlehre beantwortet werden.

Für die Untersuchung von Eigenschaften von Mengen reeller Zahlen - das Hauptthema der Deskriptive Mengenlehre - stützt man sich auf folgende Prinzipien:

- Klassifiziere definierbare Mengen durch geeignete *Hierarchien* (offen, abgeschlossen, G_δ, ..., BOREL, analytisch, ...) und versuche Eigenschaften von Mengen reeller Zahlen, die sich nicht allgemein beweisen lassen, wenigstens für Mengen möglichst hoher Stufe in diesen Hierarchien nachzuweisen,

- ziehe *Zusatzaxiome* heran (Konstruktibilitätsaxiom, Existenz großer Kardinalzahlen, Axiom der Determiniertheit); damit lassen sich oft die obigen Ergebnisse auf weitere Mengen reeller Zahlen übertragen.

Die Mengen reeller Zahlen der oben erwähnten Hierarchien wurden anfangs topologisch (und mengentheoretisch) klassifiziert, bis man einen Zusammenhang mit der Klassifizierung von Formeln, welche die jeweiligen Mengen definieren, nach ihrer "logischen" Komplexität erkannte. Dadurch kann man nun Methoden der Mathematischen Logik heranziehen und entsprechende Hierarchien auch auf anderen Strukturen (wie etwa den natürlichen Zahlen) untersuchen. Somit besteht eine enge Wechselbeziehung der *Deskriptiven Mengenlehre* nicht nur zur *Topologie*, sondern auch zur *Rekursionstheorie* und *Komplexitätstheorie* von Mengen bzw. Funktionen natürlicher Zahlen (s. auch die Literaturangaben).

Wir benutzen die üblichen

logischen und mengentheoretischen Bezeichnungen:

$\neg$	*nicht*
$\vee$	*oder*
$\wedge$	*und*
$\longrightarrow$	*wenn . . . , dann*
$\longleftrightarrow$	*genau dann . . . , wenn,* (im Englischen: iff)
$\exists$	*existiert*
$\exists!$	*es existiert genau ein*
$\forall$	*für alle*
$a \in A$	*a ist Element von A*
$\emptyset$	*leere Menge*
$\{a\}$	*Einermenge von a*
$\{a,b\}$	(*ungeordnetes*) *Paar von a und b*
$a \cup b$	*Vereinigung von a und b*
$a \cap b$	*Durchschnitt von a und b*
$a - b$	*Komplement von b relativ zu a*
$-a$	*Komplement von a*
$\subseteq$	*Teilmenge*
$\subset$	*echte Teilmenge*
$\mathbb{R}$	*Menge der reellen Zahlen*

Kapitel 2

Die Baireschen Funktionen

Einige wichtige Begriffe, die im weiteren Verlauf der Vorlesung eine grundlegende Rolle spielen werden, sollen hier am Beispiel der reellen Zahlen und der reellen Funktionen eingeführt werden. Dabei werden wir die reellen Zahlen in der üblichen Darstellung mit der gewöhnlichen Topologie benutzen - später werden wir weitere Möglichkeiten zulassen.

2.1 Topologische Grundbegriffe

Definition

Für $\delta, a \in \mathbb{R}, \delta > 0$, sei die (offene) **$\delta$-Umgebung** von a die Menge

$$U_\delta(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |a - x| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta).$$

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, $a \in \mathbb{R}$, so heißt

$$\begin{aligned} f \textbf{ stetig } \mathit{in}\ a : &\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in U_\delta(a)\ f(x) \in U_\varepsilon(f(a)), \\ f \textbf{ stetig} : &\leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ f \mathit{ stetig\ in }\ x. \end{aligned}$$

$C(f) := \{x \in \mathbb{R} \mid f \mathit{ stetig\ in }\ x\}$ Menge der **Stetigkeitspunkte** von f,
$U(f) := \{x \in \mathbb{R} \mid f \mathit{ unstetig\ in }\ x\}$ Menge der **Unstetigkeitspunkte** von f.

(stetig = continu = continuous)

Beispiele

1. Zu jeder vorgegebenen endlichen Menge M von reellen Zahlen kann man leicht eine reelle Funktion angeben, für die $U(f) = M$ ist (z. B. eine Treppenfunktion), ebenso können aber auch unendliche Mengen (wie etwa $\mathbb{Z}$) als Menge der Unstetigkeitspunkte auftreten.

2. Die Unstetigkeitsstellen einer Funktion können sich auch häufen:
Sei f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ irrational,} \\ 1 & \text{falls } x = 0, \\ 1/q & \text{falls } x = p/q, p, q \text{ teilerfremd}, q > 0, p \neq 0. \end{cases}$$

Es ist hier $U(f) = \mathbb{Q}$, $C(f) = Irr := \mathbb{R} - \mathbb{Q}$: da f an rationalen Stellen einen Wert > 0 annimmt, andererseits aber beliebig nahe zu jeder rationalen Zahl eine irrationale Zahl liegt, an welcher f den Wert 0 annimmt, so ist f an rationalen Stellen unstetig. Umgekehrt ist f an irrationalen Stellen stetig:

Sei etwa $0 < a < 1, a \notin \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$. Wählt man eine natürliche Zahl $q > 0$ mit $1/q < \varepsilon$, so kann man ein $\delta > 0$ finden mit $U_\delta(a) \cap \{p/r \mid 0 < p < r < q\} = \emptyset$ (da die zweite Menge endlich ist), und für $x \in U_\delta(a)$ gilt dann $f(x) < \varepsilon$. Somit ist f in a stetig.

3. Die DIRICHLETsche Funktion d, definiert durch

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational,} \end{cases}$$

ist überall unstetig: $C(d) = \emptyset$, $U(d) = \mathbb{R}$.

Die Menge $U(f)$ der Unstetigkeitsstellen einer reellen Funktion f kann also sehr klein (etwa leer oder endlich), aber auch abzählbar-unendlich sein (wie $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder etwa eine Nullfolge) und sogar überabzählbar (möglicherweise $= \mathbb{R}$) sein, allerdings - wie sich herausstellen wird - nicht die Menge der Irrationalzahlen. Die Möglichkeiten für Stetigkeitsstellen werden also nicht allein durch die Kardinalität bestimmt. Tatsächlich lassen sie sich aber topologisch charakterisieren:

Definition

Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ sei

A **offen** $: \leftrightarrow \forall x \in A\ \exists \delta > 0\ U_\delta(x) \subseteq A$,

$$\begin{array}{rll} A^o := & \{x \in A \mid \exists \delta > 0\, U_\delta(x) \subseteq A\} & \textbf{offener Kern, Inneres} \text{ von } A, \\ A\ \textbf{abgeschlossen} : \leftrightarrow & \mathbb{R} - A \ \textit{offen}, & \\ A^- := & \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \delta > 0\, U_\delta(x) \cap A \neq \emptyset\} & \textbf{abgeschlossene Hülle} \text{ von } A. \end{array}$$

Bemerkungen:

1. A^o ist offen und die größte offene Teilmenge von A,
2. A^- ist abgeschlossen und die kleinste abgeschlossene Obermenge von A.
3. $\forall x(x \notin A^- \leftrightarrow \exists \delta > 0\, U_\delta(x) \cap A = \emptyset)$, somit insbesondere
4. $\mathbb{R} - A^o = (\mathbb{R} - A)^-$ und $\mathbb{R} - A^- = (\mathbb{R} - A)^o$.

2.2 G_δ-Mengen

A ist G_δ-**Menge**: $\leftrightarrow A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ für eine abzählbare Folge offener Mengen $(G_n | n \in \mathbb{N})$,

A ist F_σ-**Menge**: $\leftrightarrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ für eine abzählbare Folge abgeschlossener Mengen $(F_n | n \in \mathbb{N})$.

[Merke: G = Gebiet = offen; F = abgeschlossen = fermé; σ = abzählbare Vereinigung (Summe), δ = abzählbarer Durchschnitt!]

Beispiele:

- *Abgeschlossen* sind $\emptyset$ und $\mathbb{R}$, endliche Mengen, abgeschlossene Intervalle sowie endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen,
- *offen* sind $\emptyset$ und $\mathbb{R}$, co-endliche Mengen, offene Intervalle sowie endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen,
- *offen* und zugleich *abgeschlossen* sind nur $\emptyset$ und $\mathbb{R}$.
- G_δ- und zugleich F_σ-*Mengen* sind alle offenen und abgeschlossenen Mengen sowie die halboffenen Intervalle (jede reelle Zahl ist abzählbarer Limes von rationalen Zahlen),

- alle abzählbaren Mengen sind F_σ-*Mengen*, aber nicht immer abgeschlossen (wie die Nullfolge $\{1, 1/2, 1/3\ldots\}$, die erst nach Hinzunahme ihres Limes abgeschlossen ist). $\mathbb{Z}$ ist dagegen auch eine G_δ-Menge, aber nicht offen (nicht-leere offene Mengen sind stets überabzählbar),

- F_σ-, aber *keine* G_δ-Menge sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, während die irrationalen Zahlen eine G_δ-, aber keine F_σ-Menge bilden (s. 2.3.1).

Mengen, die weder G_δ- noch F_σ-Mengen sind, sind dagegen schwieriger anzugeben (mit einem Kardinalitäts- bzw. Diagonalargument).

2.2.1 Satz von Young

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, so ist
$C(f)$ eine G_δ-Menge und $U(f)$ eine F_σ-Menge.

Beweis: Man zeigt zunächst leicht, daß (*) $C(f) = \bigcap_{\varepsilon>0} C_\varepsilon$, wobei

$$C_\varepsilon := \{a \in \mathbb{R} \mid \exists\delta > 0\, \forall x, y \in U_\delta(a) |f(x) - f(y)| < \varepsilon\},$$

und daß jedes C_ε offen ist:

Sei $a \in C_\varepsilon$. Dann existiert ein $U_\delta(a)$ mit $\forall x, y \in U_\delta(a)\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Es ist dann auch $U_\delta(a) \subseteq C_\varepsilon$: Sei $b \in U_\delta(a)$. Wähle $\delta_0 > 0$ so klein, daß $U_{\delta_0}(b) \subseteq U_\delta(a)$. Dann ist offensichtlich $\forall x, y \in U_{\delta_0}(b)\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, also auch $b \in C_\varepsilon$.

Ferner ist für $\varepsilon' > \varepsilon > 0 : C_{\varepsilon'} \supseteq C_\varepsilon$, also kann man sich in der Darstellung (*) auf den *abzählbaren* Durchschnitt $C(f) = \bigcap_{n>0} C_{1/n}$ beschränken, und damit ist $C(f)$ eine G_δ-Menge. □

Der obige Satz läßt sich umkehren:

Satz

Ist C eine G_δ-Menge, so ist $C = C(f)$ für eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweis: [Es empfiehlt sich, einen Beweis zunächst für die einfachen Fälle $C = (a, b)$ bzw. $C = [a, b]$ zu führen!]

a) Zunächst sei C eine offene Menge, die wir G nennen wollen. Wir definieren eine Funktion f_G durch:

$$f_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in G \text{ oder } (x \text{ rational und } x \notin G^-), \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist dann $C(f_G) = G$: Offensichtlich ist f_G auf G stetig (da G offen). Sei umgekehrt $x \notin G$.

<u>1. Fall:</u> $x \notin G^-$. Dann existiert eine Umgebung $U_\delta(x)$ mit $U_\delta(x) \cap G = \emptyset$. Wählt man $y \in U_\delta(x)$ mit y rational bzw. irrational (beides ist möglich!), so ist $f_G(y) = 0$ bzw. 1, also kann f_G in x nicht stetig sein.

<u>2. Fall:</u> $x \in G^-$. Dann ist $f_G(x) = 1$, aber für jedes $y \in U_\delta(x) \cap G \neq \emptyset$ gilt $f_G(y) = 0$, d. h. f_G ist unstetig in x.

b) Es sei $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, alle G_n offen. Da der Durchschnitt von je endlichvielen offenen Mengen wieder offen ist, kann man OEdA annehmen, daß

$$\mathbb{R} = G_0 \supseteq G_1 \ldots \supseteq G_n \supseteq G_{n+1} \supseteq \ldots$$

Zu jedem offenen G_n wähle man wie in a) eine Funktion f_{G_n} mit $C(f_{G_n}) = G_n$ sowie eine Folge positiver reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n > \sum_{i>n} a_i \text{ für alle } n \geq 1$$

(z. B. $a_n = 1/n!$). Für jedes x konvergiert dann die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n f_{G_n}(x)$ gegen einen Wert $f(x)$, und zwar konvergiert die entsprechende Funktionenreihe gleichmäßig gegen die Funktion f (Majoranten-Kriterium). Wir zeigen nun:

$C(f) = C$:

$C(f) \supseteq C$: Alle f_{G_i} sind in $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ stetig, und wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist somit auch f in C stetig.

$C(f) \subseteq C$: Sei $x \notin C$, also $x \in G_n - G_{n+1}$ für ein n. Dann ist $x \in G_0, \ldots, G_n$ und somit

$$f_{G_0}(x) = \ldots = f_{G_n}(x) = 0, \quad \text{aber } x \notin G_{n+1}, G_{n+2}, \ldots$$

Wie unter a) unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

<u>1. Fall:</u> $U_\delta(x) \cap G_{n+1} = \emptyset$ für ein $\delta > 0$, insbesondere also $x \notin G^-_{n+1}, G^-_{n+2}, \ldots$ Da $x \in G_n$, G_n offen, so kann man $\delta > 0$ so klein wählen, daß noch $U_\delta(x) \subseteq G_n$.

Ist $y \in U_\delta(x), y$ irrational, so $f(y) \geq \sum_{i>n} a_i > 0$ (denn wegen $y \notin G_{n+1}$ ist $f_{G_i}(y) = 1$ für $i > n$),

ist $y \in U_\delta(x), y$ rational, so $f(y) = 0$ (denn wegen $y \notin G^-_{n+1}$ bzw. $y \in G_0, \ldots, G_n$ ist $f_{G_i}(y) = 0$), also ist f in y unstetig.

<u>2. Fall:</u> $x \in G^-_{n+1}$. Dann ist $f(x) \geq a_{n+1}$, aber für alle $y \in U_\delta(x) \cap G_{n+1} \neq \emptyset$: $f(y) = \sum_{i>n+1} a_i < a_{n+1}$ (da mit $y \in G_{n+1}$ auch $y \in G_j$ und damit $f_{G_j}(y) = 0$ für alle $j \leq n+1$), und somit ist f auch in diesem Fall in x unstetig. $\square$

Definition

$(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge reeller Funktionen, f eine reelle Funktion. Dann wird die **(punktweise) Konvergenz** wie folgt erklärt:

$$\begin{aligned} f = \lim_{i\to\infty} f_i :\quad &\leftrightarrow\quad \forall x \in \mathbb{R}\; f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x) \\ &\leftrightarrow\quad \forall x \in \mathbb{R}\; \forall \varepsilon > 0\, \exists m \forall n \geq m\; |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Der punktweise Limes von stetigen Funktionen braucht bekanntlich nicht wieder stetig zu sein, daher führt man den stärkeren Begriff der **gleichmäßigen Konvergenz** ein:

$$f_i \Rightarrow f :\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists m \forall n \geq m\; \forall x \in \mathbb{R}\, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

und wir definieren nach HAUSDORFF die **gleichmäßige Konvergenz in einem Punkt** $a \in \mathbb{R}$:

$$f_i \Rightarrow f \;\; \textbf{\textit{gleichmäßig in}}\; a :\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists m \exists \delta > 0\; \forall x \in U_\delta(a)\, |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt offenbar die gleichmäßige Konvergenz in jedem Punkt (aber nicht notwendig umgekehrt). Mit der Bedingung von HAUSDORFF können wir die Stetigkeit der Limesfunktion im Falle stetiger Funktionen charakterisieren:

2.2.2 Satz über die gleichmäßige Konvergenz

Es sei $f = \lim_{i\to\infty} f_i$. Dann ist die Menge der Punkte gleichmäßiger Konvergenz

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f_n \Rightarrow f \textit{ gleichmäßig in } x\} \quad \textit{eine } G_\delta\textit{-Menge.}$$

Sind alle f_n stetig in a, so gilt:

$$f \textit{ stetig in } a \leftrightarrow f_n \Rightarrow f \textit{ gleichmäßig in } a.$$

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$D_m(\varepsilon) := \{x \mid |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Es sei $G(\varepsilon) := \bigcup_m D_m(\varepsilon)^o$ und $K := \bigcap_{n>0} G(1/n)$, also ist K eine G_δ-Menge. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \in K \leftrightarrow \forall n > 0\, \exists m \exists \delta > 0 \forall y \in U_\delta(a)\, |f(y) - f_m(y)| < 1/n \\ \leftrightarrow f_n \Rightarrow f \;\text{ gleichmäßig in } a. \end{aligned}$$

Somit bleibt der Zusatz zu zeigen: Es seien alle f_n stetig in a. Beh.:

$$a \in K \leftrightarrow a \in C(f).$$

Sei zunächst $a \in C(f)$, $\varepsilon > 0$. Wir zeigen: $a \in G(\varepsilon)$:
Wegen $f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a)$ gibt es ein m mit $|f(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon/3$. Da f und f_m in a stetig sind, existiert eine Umgebung U von a mit

$$\forall x \in U\ |f(a) - f(x)| \leq \varepsilon/3 \ \text{ und } \forall x \in U\ |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/3,$$

also ist $a \in D_m(\varepsilon)^o \subseteq G(\varepsilon)$.

Sei nun umgekehrt $a \in K$. Zu zeigen: f ist stetig in a. Sei dazu $\varepsilon > 0$.

Wegen $a \in G(\varepsilon/3)$ gibt es ein m mit $a \in D_m(\varepsilon/3)^o$, also existiert eine Umgebung U von a mit

$$\forall x \in U\ |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/3,$$

und da f_m in a stetig ist, gibt es eine Umgebung V von a mit $V \subseteq U$ und

$$\forall x \in V\ |f_m(a) - f_m(x)| \leq \varepsilon/3.$$

Somit ergibt sich

$$\forall x \in V\ |f(a) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

d.h. f ist stetig in a. □

Die folgende Klassifikation von Funktionen, 1899 von R. BAIRE eingeführt, war der Ausgangspunkt der Theorie der reellen Funktionen (und der Deskriptiven Mengenlehre):

Definition der BAIREschen Funktionenklassen

$$\begin{aligned}
B_0 :\ &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ } stetig\}, \\
B_1 :\ &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f = \lim_{i\to\infty} f_i \text{ für eine Folge } (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ mit } f_i \text{ stetig}\} \\
&\quad \text{allgemein:} \\
B_{n+1} &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f = \lim_{i\to\infty} f_i \text{ für eine Folge } (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ mit } f_i \in B_n\}.
\end{aligned}$$

Bildet man die Vereinigung aller dieser Klassen, so ist diese noch nicht abgeschlossen unter der Bildung von (punktweisen) Limites, sondern man muß den obigen Prozeß weiter iterieren (was wir im Falle der BOREL-Mengen noch näher ausführen werden). Weniger konstruktiv kann man die Klasse der **BAIREschen Funktionen** definieren als die kleinste Klasse **B** von reellen Funktionen mit

(i) **B** enthält alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(ii) **B** ist abgeschlossen unter der Bildung von (punktweisen) Limites, d. h. ist $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in **B**, die punktweise gegen eine reelle Funktion f konvergieren, so ist auch $f \in \mathbf{B}$.

Beispiele

1. Die unstetige Funktion f mit $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ sonst, ist (punktweiser) Limes der stetigen Funktionen f_n mit

$$f_n(x) = \max(0, 1 - n|x|),$$

also in der ersten BAIREschen Klasse B_1.
2. Die DIRICHLETsche Funktion d ist in B_2, denn es ist

$$d(x) = \lim_m \lim_n (\cos m!\pi x)^{2n},$$

aber d ist nicht in B_1 (s. 2.3.2), und allgemeiner gilt sogar: $B_n \subset B_{n+1}$ für jedes n.

2.3 Bairesche Kategorie

Daß die Menge $U(f)$ der Unstetigkeitsstellen einer reellen Funktion f, welche punktweiser Limes von stetigen Funktionen ist, nicht beliebig "kompliziert" sein kann, sondern eine F_σ-Menge sein muß, wissen wir bereits aus dem Satz von YOUNG 2.2.1. Wir werden sehen, daß diese Menge auch nicht "all zu groß" sein kann. "Größe" im Sinne der Kardinalität führt hier allerdings nicht weiter; der passende Begriff ist in diesem Zusammenhang derjenige einer *mageren* Menge bzw. einer Menge *1. Kategorie* (BAIRE):

Definition

$$D \subseteq \mathbb{R} \text{ } \textbf{dicht} \text{ (in } \mathbb{R}) :\leftrightarrow D^- = \mathbb{R} \leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, U_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset,$$

d. h. jedes nicht-leere offene Intervall enthält einen Punkt aus D.

$$\begin{aligned}
N \subseteq \mathbb{R} \text{ } \textbf{nirgends-dicht} : &\leftrightarrow\ N^{-o} = \emptyset \\
\leftrightarrow \forall I (I \neq \emptyset \text{ offenes Intervall } &\rightarrow\ \exists x \in I\, \exists \delta > 0\, (U_\delta(x) \cap N = \emptyset) \\
\leftrightarrow \forall I (I \neq \emptyset \text{ offenes Intervall } &\rightarrow\ \exists J \subseteq I\, (J \neq \emptyset \text{ offenes Intervall } \wedge J \cap N = \emptyset) \\
&\leftrightarrow\ \exists D \subseteq \mathbb{R} - N (D \text{ offen und dicht}),
\end{aligned}$$

d. h. N enthält “sehr viele” Lücken.

$$\begin{aligned} M \subseteq \mathbb{R} \ \textbf{mager (von 1. Kategorie)}: \ \leftrightarrow \ & M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \text{ für eine abzählbare Folge} \\ & \text{nirgends-dichter Mengen } (D_n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ M \subseteq \mathbb{R} \ \textbf{von 2. Kategorie}: \ \leftrightarrow \ & M \text{ nicht mager.} \end{aligned}$$

Bemerkungen und Beispiele

1. Ist D nirgends-dicht, so auch der Abschluß D^- und jede Teilmenge von D.
2. Ist A offen oder abgeschlossen, so ist der Rand von $A, \partial A := A^- - A^o = A^- \cap (\mathbb{R} - A)^-$ nirgends-dicht.
3. Dicht in $\mathbb{R}$ (und damit *nicht* nirgends-dicht) sind: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
4. Nirgends-dicht (und damit *nicht* dicht) sind: $\emptyset$, alle endlichen Mengen reeller Zahlen, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ und die Folge $\{1/n \mid n = 1, 2, \ldots\}$.
5. Mager sind alle abzählbaren Mengen, insbesondere $\mathbb{Q}$. Es gibt aber auch überabzählbare magere (sogar nirgends-dichte) Mengen, z. B. das CANTORsche Diskontinuum.
   Das Intervall $(0, 1)$ ist weder dicht noch nirgends-dicht und auch nicht mager.

Wichtig für die Existenz von Mengen, die nicht mager sind, ist der

2.3.1 Kategoriesatz von Baire

(i) *Für jede magere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist das Komplement, $\mathbb{R} - M$, dicht in $\mathbb{R}$.*

(ii) *Keine offene Menge $G \neq \emptyset$ ist mager (insbesondere ist kein Intervall mit mehr als einem Punkt mager).*

(iii) *Ist $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Folge dichter offener Mengen, so ist auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ dicht.*

(iv) *Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Folge abgeschlossener Mengen mit $A_n^o = \emptyset$, so ist auch $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^o = \emptyset$.*

Beweis von (i): Es sei $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ für eine abzählbare Folge nirgends-dichter Mengen $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I \neq \emptyset$ ein beliebiges offenes Intervall. Wir wählen sukzessive offene Intervalle mit

$$\begin{aligned} I_0^- &\subseteq I - D_0,\ I_0 \neq \emptyset, \\ I_1^- &\subseteq I_0 - D_1,\ I_1 \neq \emptyset, \\ &\dots \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subseteq I - M, \text{ also } \emptyset \neq I \cap (\mathbb{R} - M),$$

d. h. $\mathbb{R} - M$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

(ii) - (iv) folgen leicht aus (i), sind aber tatsächlich äquivalent zu (i). (Für (iii) benutze: Ist D_n offen und dicht, so ist das Komplement $\mathbb{R} - D_n$ nirgends-dicht.) □

Aus diesem Satz folgt natürlich wieder, daß $\mathbb{R}$ nicht mager, insbesondere nicht abzählbar ist. (Tatsächlich ähnelt der Beweis dem Ergebnis von CANTOR, welches wir in der Einleitung erwähnt haben.) Da $\mathbb{Q}$ mager ist, kann also die Menge der Irrationalzahlen $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ nicht mager sein. Außerdem folgt:

$$U\ F_\sigma\text{-Menge} \rightarrow (U \text{ mager} \leftrightarrow \mathbb{R} - U \text{ dicht}).$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht ist, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ aber nicht mager, kann $Irr = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ keine F_σ- und damit $\mathbb{Q}$ auch keine G_δ-Menge sein.

2.3.2 Satz von Baire

I*st die Funktion $f \in B_1$, also $f = \lim_{i\to\infty} f_i$ punktweiser Limes von stetigen Funktionen f_i, so ist $U(f)$ eine magere F_σ-Menge und damit $C(f)$ eine dichte G_δ-Menge.*

Beweis: Da die Funktionen f_m und f_n nach Voraussetzung stetig sind, so auch die Funktion $f_m - f_n$ und damit sind für alle $\varepsilon > 0$ die Mengen

$$F_m(\varepsilon) := \{x \mid \forall n \geq m\, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon\}$$

abgeschlossen mit $\mathbb{R} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m(\varepsilon)$, da $f = \lim_{i\to\infty} f_i$. Mit der Bezeichnung von Satz 2.2.2 ist also

$$F_m(\varepsilon)^o \subseteq D_m(\varepsilon)^o, \text{ also auch } \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m(\varepsilon)^o \subseteq G(\varepsilon).$$

Als Rand einer abgeschlossenen Menge ist $F_m(\varepsilon) - F_m(\varepsilon)^o$ nirgends-dicht, mithin ist

$$\mathbb{R} - G_\varepsilon \subseteq \mathbb{R} - \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m(\varepsilon)^o \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (F_m(\varepsilon) - F_m(\varepsilon)^o)$$

mager und

$$U(f) = \mathbb{R} - K = \bigcup_{n>0} (\mathbb{R} - G(1/n))$$

als abzählbare Vereinigung magerer Mengen wiederum mager. □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht: es gibt reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $U(f)$ eine magere Menge ist, die aber nicht Limes von stetigen Funktionen sind[1]. Dagegen gilt z. B. nach HAUSDORFF:

$$f \in B_1 \leftrightarrow \forall F\,(F \textit{ abgeschlossen} \wedge F \neq \emptyset \to C(f \restriction F) \neq \emptyset).$$

2.3.3 Ideale, Filter und Mengenalgebren

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Teilmengen einer Menge A als "klein" festzulegen; der Begriff des *Ideals* legt die Mindestanforderungen hierfür fest. Vorher definieren wir

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\} \quad \text{die } \textbf{Potenzmenge} \text{ von } A.$$

Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Menge $I \subseteq \mathcal{P}(A)$ heißt **Ideal auf** A gdw

(I1) $\emptyset \in I$,

(I2) $X \in I \wedge Y \subseteq X \to Y \in I$,

(I3) $X, Y \in I \to X \cup Y \in I$.

Entsprechend heißt eine Menge $F \subseteq \mathcal{P}(A)$ **Filter auf** A gdw

(F1) $A \in F$,

(F2) $X \in F \wedge X \subseteq Y \subseteq A \to Y \in F$,

(F3) $X, Y \in F \to X \cap Y \in F$.

[1] s. OXTOBY p.38

Ist I ein Ideal auf A, so ist $F = \{A - X \mid X \in I\}$ ein Filter auf A, der zu I **duale** Filter.

Ein Ideal I heißt **σ-vollständig** (oder σ-Ideal) gdw es unter *abzählbaren* Vereinigungen abgeschlossen ist:

(I_σ) $\forall n \in \mathbb{N}\ X_n \in I \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \in I.$

Beispiele

1. Das einfachste Ideal auf $A \neq \emptyset$ ist $\{\emptyset\}$, die volle Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ wird oft nur als *uneigentliches* Ideal anerkannt. Alle anderen Ideale (also mit $A \notin I$) heißen **echte** Ideale. Analog gilt $\emptyset \notin F$ für einen echten Filter auf A.

2. Für jedes $Z \subseteq A$ ist
$$< Z > := \{X \subseteq A \mid X \subseteq Z\}$$
ein σ-Ideal, das von Z **erzeugte Hauptideal**,
$$[Z] := \{X \subseteq A \mid Z \subseteq X\}$$
ein σ-Filter, der von Z **erzeugte Hauptfilter**.

3. Auf einer unendlichen Menge A ist
$$\{X \subseteq A \mid X\ endlich\}$$
ein echtes Ideal, welches weder Hauptideal noch σ-vollständig ist. Von besonderer Bedeutung (z. B. für Konvergenzfragen) ist der duale Filter auf den natürlichen Zahlen
$$\{X \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} - X\ endlich\},$$
der FRÉCHET-Filter auf $\mathbb{N}$.

4. Auf der Menge der reellen Zahlen gibt es zusätzlich folgende echte Ideale:
$$\begin{aligned} \mathbf{A} : &= \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ abzählbar}\}, \\ \mathbf{N} : &= \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ hat Lebesgue-Maß } 0\}, \\ \mathbf{ND} : &= \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ nirgends-dicht}\}, \\ \mathbf{M} : &= \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ mager}\}, \end{aligned}$$
die keine Hauptideale sind. **A**, **N** und **M** sind σ-vollständig, nicht aber **ND**. Sowohl **N** als auch **M** erweitern das Ideal der abzählbaren Teilmengen.

Eine Menge kann im Sinne eines Ideals klein, im Sinne eines anderen Ideals aber möglicherweise als groß aufgefaßt werden:

- Das CANTORsche Diskontinuum ist eine Menge von der Mächtigkeit der reellen Zahlen (und damit überabzählbar), andererseits aber eine Nullmenge und nirgends-dicht (und damit mager).
- Es gibt eine Zerlegung

$$\mathbb{R} = A \cup B,\ A \cap B = \emptyset, \text{ mit } A \text{ mager, } B \text{ Nullmenge.}$$

Allgemeiner läßt sich jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ zerlegen in zwei Mengen, von denen eine klein im Sinne des LEBESGUE-Maßes, die andere klein im Sinne der BAIREschen Kategorie ist.

Statt der vollen Potenzmenge betrachtet man häufig Teilbereiche, die ebenfalls unter den Operationen Durchschnitt, Vereinigung und Komplement abgeschlossen sind: Eine **Mengenalgebra** (oder auch: ein **Mengenkörper**) auf einer Menge A ist eine Menge $\mathcal{K}$ von Teilmengen von A (also $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(A)$) mit folgenden Eigenschaften:

(K1) $\emptyset, A \in \mathcal{K}$,

(K2) $X \in \mathcal{K} \wedge Y \in \mathcal{K} \rightarrow X \cap Y \in \mathcal{K}$,

(K3) $X \in \mathcal{K} \wedge Y \in \mathcal{K} \rightarrow X \cup Y \in \mathcal{K}$,

(K4) $X \in \mathcal{K} \wedge Y \in \mathcal{K} \rightarrow X - Y \in \mathcal{K}$.

(Die Bed. (K1) - (K4) zusammen lassen sich offensichtlich vereinfachen.)

Eine σ- **Mengenalgebra** ist zusätzlich unter abzählbaren Vereinigungen (und damit natürlich auch unter abzählbaren Durchschnitten) abgeschlossen:

(K_σ) $\forall n \in \mathbb{N}\, X_n \in \mathcal{K} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \mathcal{K}$.

Den Begriff des *Ideals* kann man natürlich leicht auf den Fall einer Mengenalgebra (statt der vollen Potenzmenge) verallgemeinern.

Beispiele

1. Die kleinste Mengenalgebra auf A besteht nur aus $\{\emptyset, A\}$, die größte ist die volle Potenzmenge, beides sind σ-Mengenalgebren.

2. Die Menge $\{X \subseteq A \mid X \text{ endlich } \vee A - X \text{ endlich}\}$ ist eine Mengenalgebra, aber für unendliches A keine σ-Mengenalgebra.

3. Dagegen ist die Menge $\{X \subseteq A \mid X \text{ abzählbar } \vee A - X \text{ abzählbar}\}$ eine σ-Mengenalgebra.

4. Die Menge **LM** der LEBESGUE-meßbaren Mengen von reellen Zahlen ist eine σ-Mengenalgebra auf $\mathbb{R}$ mit den Nullmengen **N** als σ-Ideal.

5. Als weitere σ-Mengenalgebren auf $\mathbb{R}$ werden wir die Menge der BOREL-Mengen sowie die Mengen mit der BAIRE-Eigenschaft einführen:

Die Klasse der **BOREL-Mengen** von $\mathbb{R}$, $\mathbf{B}(\mathbb{R})$, ist die kleinste σ-Mengenalgebra von Mengen reeller Zahlen, welcher die offenen (und damit auch die abgeschlossenen) Mengen enthält. Zu den BOREL-Mengen gehören also auch die G_δ- und die F_σ-Mengen, welche aber nur die ersten Stufen der BOREL-Hierarchie darstellen, die wir später genauer behandeln werden.

Eine wichtige Operation in der Maßtheorie ist die **symmetrische Differenz** zweier Mengen:

$$A \Delta B := (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B),$$

sie besteht aus den Elementen, in denen sich A von B unterscheidet. Ihre wesentlichen Eigenschaften lassen sich leicht nachprüfen:

$$\begin{aligned}
A \Delta B &= B \Delta A \\
A \Delta (B \Delta C) &= (A \Delta B) \Delta C \\
A \cap (B \Delta C) &= (A \cap B) \Delta (A \cap C) \\
-(A \Delta B) &= -A \Delta B = A \Delta -B \\
A \Delta \emptyset &= A \\
A = B &\leftrightarrow A \Delta B = \emptyset \\
A \cap B = \emptyset &\rightarrow A \Delta B = A \cup B.
\end{aligned}$$

(Gelegentlich bezeichnet man eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$ als **Mengenring**, wenn $\mathcal{R}$ unter den Operationen Δ und $\cap$ abgeschlossen ist. R ist dann mit diesen Operationen ein kommutativer Ring im algebraischen Sinne, wenn man Δ als Addition und $\cap$ als Multiplikation interpretiert.)

Will man das Maß einer Menge bestimmen, so kann man Mengen vom Maß 0 vernachlässigen. Allgemeiner sieht man von den "kleinen" Mengen eines Ideals ab, wenn man zu den entsprechenden Restklassen übergeht: Es sei I ein Ideal des Mengenkörpers $\mathcal{K}$. Definiert man für $X, Y \in \mathcal{K}$:

$$A \sim_I B :\leftrightarrow A \Delta B \in I \leftrightarrow \exists M \in I \, (A \cup M = B \cup M),$$

so erhält man eine Äquivalenzrelation und eine Kongruenzrelation bezüglich der BOOLEschen Operationen $\cup, \cap, -$. Die Restklassen bilden bilden dann (mit den entsprechend definierten Operationen) einen Mengenkörper. Speziell im Falle des Ideals **M** der mageren Mengen definiert man Mengen, die sich von einer offenen Menge nur um eine magere Menge unterscheiden als

$A \subseteq \mathbb{R}$ hat die **Baire-Eigenschaft** $:\leftrightarrow A \sim_{\mathbf{M}} G$ für eine offene Menge G,
$\leftrightarrow A \Delta G = M$ für eine offene Menge G und eine magere Menge M,
$\leftrightarrow A = G \Delta M$ für eine offene Menge G und eine magere Menge M.

Bemerkungen

1. Die Klasse $BE(\mathbb{R})$ der Mengen mit der BAIRE-Eigenschaft bildet einen σ-Mengenkörper, der die offenen Mengen enthält und somit auch alle BOREL-Mengen. Insbesondere hat jede BOREL-Menge die BAIRE-Eigenschaft. Die Umkehrung gilt aber nicht: Es gibt Mengen mit der BAIRE-Eigenschaft, die nicht LEBESGUE-meßbar und damit auch keine BOREL-Mengen sind.

2. Es gibt Mengen reeller Zahlen ohne die BAIRE-Eigenschaft (dazu benötigt man das *Auswahlaxiom*), während andererseits aus dem *Axiom der Determiniertheit* folgt, daß alle Mengen reeller Zahlen die BAIRE-Eigenschaft besitzen.

3. Auch die LEBESGUE-meßbaren Zahlen bilden einen σ-Mengenkörper, der die BOREL-Mengen umfaßt. Ferner gilt:

A LEBESGUE-meßbar $\leftrightarrow$
$A = F \cup N$ für eine F_σ-Menge F und eine Nullmenge N,
A hat die BAIRE-Eigenschaft $\leftrightarrow$
$A = G \cup M$ für eine G_δ-Menge G und eine magere Menge M.

Die hierdurch angedeutete Dualität zwischen Maß und Kategorie (im Sinne von BAIRE) ist Hauptinhalt des Buches von OXTOBY: *Maß und Kategorie.* Springer 1971.

2.4 Baire-Funktionen und Borel-Mengen

Für eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir:

$$\begin{array}{rl} f \text{ ist in } a \textbf{ unterhalb stetig}: & \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(a)\ f(x) > f(a) - \varepsilon, \\ f \text{ ist in } a \textbf{ oberhalb stetig}: & \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(a)\ f(x) < f(a) + \varepsilon, \\ f \text{ ist } \textbf{unterhalb stetig}: & \leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ f \text{ ist in } x \text{ unterhalb stetig}, \\ f \text{ ist } \textbf{oberhalb stetig}: & \leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ f \text{ ist in } x \text{ oberhalb stetig}, \\ f \text{ ist } \textbf{halbstetig}: & \leftrightarrow f \text{ ist unterhalb stetig} \vee f \text{ ist oberhalb stetig.} \end{array}$$

Offensichtlich gilt:

$$f \text{ ist stetig in } a \ \leftrightarrow\ f \text{ ist unterhalb stetig in } a \ \wedge\ f \text{ ist oberhalb stetig in } a.$$

Mit den Abkürzungen

$$[f < y] := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < y\}$$

(und ähnlich für $[f \leq y]$, usw.) gilt der

Satz

(i) f ist unterhalb stetig $\leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ [f > y]$ offen,
f ist oberhalb stetig $\leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ [f \geq y]$ abgeschlossen,

(ii) f ist stetig $\leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ [f > y]$ offen und $\forall y \in \mathbb{R}\ [f \geq y]$ abgeschlossen,

(iii) f ist unterhalb stetig $\leftrightarrow f = \lim_{n\to\infty} f_n$ für eine aufsteigende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen (*aufsteigend*: $n \leq m \to \forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) \leq f_m(x)$),

(iv) f ist oberhalb stetig $\leftrightarrow f = \lim_{n\to\infty} f_n$ für eine absteigende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen. $\square$

Die Charakterisierung der stetigen Funktionen in (ii) läßt sich auf die höheren BAIRE-Klassen ausdehnen. Dazu definiert man:

M und **N** seien Mengen von Teilmengen von $\mathbb{R}$, d.h. $\mathbf{M}, \mathbf{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, z. B. **G** = offene Mengen, **F** = abgeschlossene Mengen.

$$f \text{ ist } (\mathbf{M},\mathbf{N})\textbf{-Funktion} :\leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ [f > y] \in \mathbf{M} \wedge \forall y \in \mathbb{R}\ [f \geq y] \in \mathbf{N}.$$

Somit sind die stetigen Funktionen gerade die $(\mathbf{G},\mathbf{F})$-Funktionen.

$$\mathbf{M}_\sigma := \{X \mid X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \text{ für eine abzählbare Folge } (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ mit } \forall i \in \mathbb{N}\, A_i \in \mathbf{M}\},$$
$$\mathbf{N}_\delta := \{X \mid X = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \text{ für eine abzählbare Folge } (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ mit } \forall i \in \mathbb{N}\, A_i \in \mathbf{N}\}.$$

Beispiele:

$$\mathbf{G}_\delta = G_\delta,\, \mathbf{F}_\sigma = F_\sigma,\, \mathbf{G}_{\delta\delta} = G_\delta,\, \mathbf{F}_{\sigma\sigma} = F_\sigma, \text{ während}$$
$$\mathbf{G}_{\delta\sigma},\, \mathbf{F}_{\sigma\delta},\, \mathbf{G}_{\delta\sigma\delta},\, \mathbf{F}_{\sigma\delta\sigma}, \dots$$

weitere Klassen von BOREL-Mengen ergeben.

Die Aussage (ii) des obigen Satzes läßt sich nun verallgemeinern:

$$f \in B_1 \quad \leftrightarrow \quad f \text{ ist } (F_\sigma, G_\delta)\text{-Funktion},$$
$$f \in B_2 \quad \leftrightarrow \quad f \text{ ist } (G_{\delta\sigma}, F_{\sigma\delta})\text{-Funktion}, etc.$$

Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sowohl ($G_{\delta\sigma}$ als auch $F_{\sigma\delta}$)-Mengen sind, folgt hieraus erneut, daß die DIRICHLET-Funktion $d \in B_2$ ist.

Zu den Funktionen in B_1 gehören außer den stetigen noch sehr viele weitere interessante Funktionen:

- die halbstetigen Funktionen,
- die Ableitungen f' stetiger Funktionen, und zwar wegen

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [f(x + 1/n) - f(x)],$$

- alle Funktionen mit höchstens abzählbar-vielen Unstetigkeitsstellen, insbesondere
- die monotonen Funktionen sowie
- die Funktionen, die an jeder Stelle einen rechts- und einen linksseitigen Limes besitzen.

Um die vollständige Hierarchie der BOREL-Mengen und der BAIRE-Funktionen zu beschreiben, benötigen wir den Begriff der abzählbaren *Ordinalzahl*.

Kapitel 3

Ordinal- und Kardinalzahlen

In seinen Untersuchungen über die Konvergenz von Fourierreihen führte CANTOR den Begriff der *Ableitung* A' einer Menge A von reellen Zahlen ein: A' besteht aus den Elementen von A, welche Häufungspunkte von Elementen von A sind. Man kann nun nach der Menge der Häufungspunkte dieser neuen Menge fragen und damit eine Menge A'' bilden, die Menge der Häufungspunkte der Häufungspunkte von A. Iteriert man diese Operation, so erhält man eine eine unendlich-absteigende Folge

$$A \supseteq A' \supseteq A'' \supseteq A''' \dots$$

deren "Limes" A^{∞}, d. h. in diesem Fall der Durchschnitt, möglicherweise wieder isolierte Punkte enthält, so daß man wieder die Menge ihrer Häufungspunkte bilden kann. Auf diese Weise fortgesetzt, führt der Zählprozeß über die natürlichen Zahlen hinaus ins Transfinite, und zwar mit ω statt ∞ als neuer "Zahl":

$$\begin{aligned} &0,1,2,3,\dots \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots \omega+\omega, \\ &\quad \omega+\omega+1, \omega+\omega+2, \dots \omega+\omega+\omega, \dots \omega\cdot\omega, \dots \end{aligned}$$

Einen derartigen Zählprozeß erhalten wir auch, wenn wir die natürlichen Zahlen umordnen und neu aufzählen, etwa erst die Potenzen von 2, dann die Potenzen von 3, dann die Potenzen von 5 …:

$$1,2,4,8,\dots 3,9,27,\dots 5,25,125,\dots$$

und dann bleibt immer noch ein unendlicher Rest von Zahlen wie 0, 6, 10, …
Offenbar gibt es verschiedene Möglichkeiten, ins Unendliche aufzuzählen, wie unterscheiden sich diese Möglichkeiten? Führen unterschiedliche Aufzählungen vielleicht zu Widersprüchen? Lassen sich überhaupt alle Mengen in irgendeiner

Weise aufzählen? Tatsächlich ergeben sich Widersprüche, wenn man allzu naiv versucht, Eigenschaften von endlichen auf unendliche Mengen zu übertragen; trotzdem kann man aber die Theorie der Wohlordnungen und der Ordinalzahlen einheitlich für endliche und unendliche Mengen begründen.

3.1 Ordnungen und Wohlordnungen

1. Eine (reflexive) **teilweise Ordnung** auf einer Menge A ist eine 2-stellige Relation $\leq$ auf A, so daß für alle $a,b,c \in A$:

   (a) $a \leq a$ **reflexiv**,
   (b) $a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a = b$ **antisymmetrisch**,
   (c) $a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$ **transitiv**.

2. Eine (reflexive) **lineare Ordnung** auf A ist eine teilweise Ordnung auf A, so daß für alle $a,b \in A$:

   (d) $a \leq b \vee b \leq a$ **vergleichbar (connex)**.

3. Eine (irreflexive) **teilweise Ordnung** auf einer Menge A ist eine 2-stellige Relation $<$ auf A, so daß für alle $a,b,c \in A$:

   (a') $a \not< a$ **irreflexiv**,
   (c') $a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$ **transitiv**.

4. Eine (irreflexive) **lineare Ordnung** auf A ist eine teilweise Ordnung auf A, so daß für alle $a,b \in A$:
   (d') $a < b \vee a = b \vee b < a$ **vergleichbar (connex)**.

Definiert man

$$a < b :\leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b,$$

so erhält man aus einer reflexiven (teilweisen) Ordnung $\leq$ eine irreflexive (teilweise) Ordnung $<$, und umgekehrt erhält man durch

$$a \leq b :\leftrightarrow a < b \vee a = b$$

aus einer irreflexiven (teilweisen) Ordnung $<$ wieder eine reflexive (teilweise) Ordnung $\leq$ (und bei wiederholter Operation die alte Ordnung zurück).

Eine teilweise Ordnung nennt man manchmal auch eine **partielle** (oder **Halb-**) Ordnung, eine lineare Ordnung auch einfach **Ordnung**. Die gewöhnlichen Ordnungen auf den natürlichen, den ganzen, den rationalen und den reellen Zahlen sind offenbar lineare Ordnungen; die Relation

$$f < g :\leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < g(x)$$

auf den reellen Funktionen ist dagegen nur eine teilweise Ordnung.

Die natürlichen Zahlen lassen sich der Größe nach aufzählen, aber für die anderen Zahlbereiche ist dies nicht möglich; selbst wenn man noch $-\infty$ als "kleinste Zahl" hinzunimmt, gibt es keine nächstgrößere (und bei dichten Ordnungen wie den rationalen Zahlen gibt es zu überhaupt keiner Zahl eine nächstgrößere). Um diese Bereiche in der Form $\{a_0, a_1, \dots a_n, a_{n+1} \dots\}$ aufzuzählen, müssen wir sie auf solche Weise neu ordnen, daß man mit

(i) einem kleinsten Element beginnen kann,
und wenn man in der Aufzählung zu einem Element gekommen ist,

(ii) weiß, mit welchem Element man fortfahren kann, und schließlich

(iii) auch den Aufzählungsprozeß fortsetzen kann, wenn man bereits eine unendliche Teilfolge von Elementen aufgezählt hat (aber noch nicht alles aufgezählt ist).

Diese Anforderungen kann man präzisieren und zugleich vereinheitlichen, indem man verlangt, daß jede nicht-leere Teilmenge (nämlich der Rest der noch nicht aufgezählten Elemente) ein kleinstes Element enthält (welches als "nächstes" aufzuzählen ist):

5. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge A ist eine (irreflexive) lineare Ordnung auf A, welche zusätzlich die **Minimalitätsbedingung**

$$\text{(Min)} \quad \forall z\, (\emptyset \neq z \subseteq A \rightarrow \exists x \in z\, \forall y \in z \;\; y \not< x)$$

erfüllt, welche wegen der Vergleichbarkeit (d') äquivalent ist zur **Existenz eines kleinsten Elementes**:

$$\text{(KL)} \quad \forall z\, (\emptyset \neq z \subseteq A \rightarrow \exists x \in z\, \forall y \in z \;\; x \leq y),$$

wobei wie oben $x \leq y :\leftrightarrow x < y \vee x = y$.

Beispiele

1. Jede lineare Ordnung auf einer endlichen Menge ist eine Wohlordnung, ebenso die gewöhnliche Ordnung auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

2. Dagegen sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erst wohlgeordnet, wenn wir sie (etwa) in folgende Ordnung bringen:

$$0,1,2,3,4,\ldots,-1,-2,-3,-4,\ldots \text{ oder kürzer:}$$
$$0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots$$

   Im ersten Fall werden wir von einer Ordnung vom Typ $\omega+\omega$, sprechen, im zweiten Fall vom Typ ω.

3. Auch die gewöhnliche Ordnung auf den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist keine Wohlordnung, diese Menge läßt sich aber abzählen und damit (wie jede abzählbare Menge) wohlordnen. Anders im Falle der reellen Zahlen: Hier ist die gewöhnliche Ordnung zwar auch keine Ordnung, aber $\mathbb{R}$ läßt sich nicht einmal abzählen; um eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$ zu erhalten, benötigt man das Auswahlaxiom (s. 3.3).

Die endlichen Ordinalzahlen (und zugleich auch die endlichen Kardinalzahlen) sind die *natürlichen Zahlen*. Diese werden wir so einführen, daß (wie auch später auf allen Ordinalzahlen) die $<$-Beziehung besonders einfach ist, nämlich die $\in$-Beziehung. Somit ist die kleinste Zahl ohne Elemente, und zu einer Zahl a erhält man die nächstgrößere Zahl a', indem man zu den kleineren diese Zahl selbst noch hinzunimmt:

$$0 := \emptyset,$$
$$a' := a+1 := a \cup \{a\} \qquad \textbf{Nachfolger} \text{ von } a.$$

Die ersten natürlichen Zahlen sind somit

$$0=\emptyset, 1=\{0\}=\{\emptyset\}, 2=\{0,1\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}, 3=\{0,1,2\},\ldots$$

und allgemein gilt $n=\{0,1,\ldots n-1\}$ für jede natürliche Zahl n. (Außerdem hat jede natürliche Zahl n hat genau n-viele Elemente, was sich als besonders geeignet als Wahl für die endlichen Kardinalzahlen erweisen wird.) Betrachten wir nun die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, so können wir ihre Elemente auch gerade als die kleineren Zahlen auffassen, $\mathbb{N}=\omega$ setzen und als kleinste (Ordinal-)Zahl ansehen, welche größer als alle natürlichen Zahlen ist (somit die erste unendliche Ordinalzahl). Die natürlichen Zahlen wie auch ω sind die ersten Beispiele transitiver Mengen:

Definition

$$\begin{array}{rcl} trans(A) :\leftrightarrow & \forall x \in A\, \forall y \in x\;\; y \in A & \quad \textbf{transitiv} \\ \leftrightarrow & \forall x \in a\;\; x \subseteq A & \end{array}$$

Achtung: $trans(A)$ bedeutet *nicht*, daß die $\in$-Beziehung auf A transitiv ist!

Eine transitive Menge enthält mit ihren Elementen auch deren Elemente, deren Elemente ..., sie ist also abgeschlossen unter der Element-Beziehung.

$\{\{\emptyset\}\}$ ist dagegen nicht transitiv, da diese Menge $\emptyset$ nicht als Element enthält.

3.2 Ordinalzahlen

wurden von CANTOR als Repräsentanten (isomorpher) Wohlordnungen eingeführt; heute definiert man sie nach VON NEUMANN als Mengen, die (wie speziell die natürlichen Zahlen) transitiv und durch die $\in$-Beziehung wohlgeordnet sind:

$$\begin{array}{lll} \in_a & := & \{x,y \mid x,y \in a \wedge x \in y\} \\ Ord(a) & :\leftrightarrow & trans(a) \wedge \in_a \text{ ist Wohlordnung auf } a \\ con(a) & :\leftrightarrow & \forall x,y \in a\, (x \in y \vee x = y \vee y \in x) \\ fund(a) & :\leftrightarrow & \forall x \subseteq a\, (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x\, \forall z \in x\;\; z \notin y) \end{array}$$

Elementbeziehung auf a, **Ordinalzahl**, **connex**, **fundiert**.

Eine Menge a ist fundiert, wenn jede nicht-leere Teilmenge $b \subseteq a$ ein Element besitzt, welches minimal (bezüglich der $\in$-Relation) ist; diese Bedingung ist also Teil der Forderung, daß $\in_a$ eine Wohlordnung ist (Bedingung (Min) in der Definition einer Wohlordnung). Eine Menge a mit der Eigenschaft $a \in a$ ist nicht fundiert (denn $\{a\}$ wäre eine nicht-leere Teilmenge ohne minimales Element), und ebensowenig ist eine Menge $\{a,b\}$ mit $a \in b \in a$ fundiert. Wir wollen nun der Einfachheit halber voraussetzen, daß *alle Mengen fundiert sind* (wie es in den üblichen Axiomensystemen der Mengenlehre ohnehin gefordert wird). Dann gilt also insbesondere:

$$b \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in b\, \forall z \in b\;\; z \notin y.$$

Damit werden Mengen a (wie oben) ausgeschlossen, die sich selbst als Element enthalten oder mit anderen Mengen einen endlichen $\in$-Zyklus bilden. Es gilt somit:

$$(F^*) \quad a \notin a,\ \neg(b \in c \wedge c \in b),\ \neg(d \in b \wedge b \in c \wedge c \in d), \ldots$$

Damit läßt sich die Definition der Ordinalzahlen wesentlich kürzer fassen:

Charakterisierung der Ordinalzahlen

(i) $Ord(a) \leftrightarrow trans(a) \wedge con(a)$.

(ii) *Elementе von Ordinalzahlen sind wieder Ordinalzahlen:*
$Ord(a) \wedge b \in a \rightarrow Ord(b)$.

Beweis: Da $\in_a$ eine Wohlordnung auf a ist gdw $\in_a$ irreflexiv, transitiv, connex und fundiert ist und die Irreflexivität aus der Fundiertheit folgt, ist nach unserer Vereinbarung (alle Mengen sind fundiert) für (i) nur zu zeigen:

$$con(a) \rightarrow trans(\in_a).$$

Sei also $con(a)$, sowie $b, c, d \in a$ mit $b \in c \wedge c \in d$. Beh.: $b \in d$.

Es gilt:	$b \in d \vee d = b \vee d \in b$	wegen $con(a)$.
Falls	$d = b$, so hätten wir $b \in c \wedge c \in b$	im Widerspruch zu (F*)
falls	$d \in b$, so $d \in b \wedge b \in c \wedge c \in d$	im Widerspruch zu (F*).

Somit bleibt nur die Möglichkeit $b \in d$.

Um (ii) zu zeigen, sei $Ord(a) \wedge b \in a$. Dann ist wegen $trans(a)$: $b \subseteq a$ und mit $\in_a$ auch $\in_b$ eine Wohlordnung. Somit brauchen wir nur noch zu zeigen, daß b auch transitiv ist:

Sei $x \in y \in b$. Beh.: $x \in b$. Dazu argumentieren wir wie oben: Es sind $x, b \in a$ (ersteres wegen $trans(a)$), also sind beide wegen $con(a)$ miteinander vergleichbar: $x \in b \vee x = b \vee b \in x$, wobei die letzten beiden Möglichkeiten zu einem Widerspruch zur Fundierung (F*) führen. □

Die Ordnung der Ordinalzahlen

Ordinalzahlen werden üblicherweise mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet:

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \xi, \eta, \zeta, \ldots$	stehen für Ordinalzahlen,
ebenso die Quantoren	
$\forall \xi, \ldots \exists \zeta \ldots$	für $\forall x(Ord(x) \rightarrow \ldots), \ldots \exists y(Ord(y) \wedge \ldots) \ldots$
Ferner schreiben wir	
$\alpha < \beta$	für $\alpha \in \beta$,
$\alpha \leq \beta$	für $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.

Wir werden gleich zeigen, daß alle Ordinalzahlen durch die $\in$-Relation nicht nur geordnet, sondern sogar wohlgeordnet sind, so daß diese Bezeichnungsweise gerechtfertigt ist. Der obige Satz besagt also im Teil (ii) : $\alpha = \{\xi \mid \xi < \alpha\}$.

Satz

(i) $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$, und somit auch

(ii) $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta$.

Beweis: Für (i) ist nur die zweite Äquivalenz zu zeigen, und hierbei folgt der Teil "$\rightarrow$" aus der Transitivität der Ordinalzahl β. Zum Beweis der umgekehrten Richtung zeigen wir etwas allgemeiner:

$$trans(a) \wedge a \subseteq \beta \rightarrow Ord(a) \wedge (a \in \beta \vee a = \beta)$$

Sei $trans(a) \wedge a \subseteq \beta$. Dann ist auch $\in_a$ eine Wohlordnung, also $Ord(a)$.

Falls $a \neq \beta$, so $a \subset \beta$, d. h. $\beta - a \neq \emptyset$, und wir können wegen der Fundiertheit ein minimales $\gamma \in \beta - a$ wählen, von dem wir zeigen werden, daß $a = \gamma$ und damit $a \in \beta$ wie erwünscht:

Sei also $\gamma \in \beta - a$ $\in$-minimal, so daß insbesondere $\forall x \in \gamma\, x \in a$, d.h. $\gamma \subseteq a$. Es gilt dann aber auch $a \subseteq \gamma$:

Sei $x \in a$. Dann $x \in \beta$ (nach Voraussetzung) und $x \in \gamma \vee x = \gamma \vee \gamma \in x$ wegen $con(\beta)$. Aber die letzten beiden Fälle können nicht eintreten: $x = \gamma \rightarrow \gamma \in a$ und $\gamma \in x \rightarrow \gamma \in a$ (wegen $trans(a)$), es ist aber nach Wahl von $\gamma : \gamma \notin a$. $\square$

Somit haben wir mengentheoretisch nicht nur eine einfache $<$-Beziehung auf den Ordinalzahlen (nämlich die $\in$-Beziehung), sondern auch eine einfache $\leq$-Beziehung (nämlich die $\subseteq$-Beziehung).

Folgerungen

1. 0 ist die kleinste Ordinalzahl.

2. Zu jeder Ordinalzahl α existiert eine nächstgrößere Ordinalzahl $\alpha' = \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, der **Nachfolger** von α.
   Insbesondere sind alle natürlichen Zahlen Ordinalzahlen.

3. Die Menge der natürlichen Zahlen selbst ist - wie bereits erwähnt - als transitive wohlgeordnete Menge ebenfalls eine Ordinalzahl, bezeichnet mit ω, die erste unendliche Ordinalzahl und zugleich die erste **Limeszahl**:

Definition

$$Lim(\lambda) :\leftrightarrow \lambda \neq 0 \wedge \forall \xi < \lambda\ \xi + 1 < \lambda$$

4. Zu jeder *Menge* $a \neq \emptyset$ von Ordinalzahlen existiert das **Supremum** (bzgl. $\leq$) dieser Menge, und zwar ist $\sup a = \bigcup_{\xi \in a} \xi$. Hat a ein größtes Element, so ist natürlich $\sup a$ das größte Element von a, sonst ist es eine Limeszahl.

Auf die Ordinalzahl ω folgen dann also wieder Nachfolgerzahlen und deren Limites als Limeszahlen:

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots \omega+\omega, \omega+\omega+1, \omega+\omega+2, \ldots \omega+\omega+\omega,$$
$$\omega+\omega+\omega+1, \omega+\omega+\omega+2, \ldots \omega \cdot \omega, \omega \cdot \omega+1, \ldots, \omega^{\omega} \ldots \omega^{\omega^{\omega}} \ldots$$

Die hier bezeichneten Ordinalzahlen sind noch abzählbar; nach allen abzählbaren Ordinalzahlen folgt schließlich die erste überabzählbare Ordinalzahl, dann wieder Nachfolger, Limites .... Gibt es auch ein Supremum aller Ordinalzahlen?

Satz

(i) *Die $\in$-Beziehung ist eine Wohlordnung auf allen Ordinalzahlen.*

(ii) *Es gibt keine Menge aller Ordinalzahlen.*
(**Antinomie von Burali-Forti**)

Beweis von von (i):

$\alpha \notin \alpha$	nach dem Fundierungsaxiom (oder wegen $fund(\alpha)$)
$\alpha \in \beta \in \gamma \rightarrow \alpha \in \gamma$	wegen $trans(\gamma)$
$\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$	kann man wie folgt zeigen:

Sei $\delta := \alpha \cap \beta$ das Minimum der beiden Ordinalzahlen. Dann ist $trans(\delta)$ und $\delta \subseteq \alpha, \beta$, also nach nach dem vorangegangen Satz: $\delta = \alpha \vee \delta \in \alpha$ und ebenso $\delta = \beta \vee \delta \in \beta$, aber im Fall $\delta \in \alpha \wedge \delta \in \beta$ erhielten wir den Widerspruch $\delta \in \delta$! Somit ist die $\in$-Beziehung auf den Ordinalzahlen eine lineare Ordnung. Sie ist ferner eine Wohlordnung, da für Mengen a von Ordinalzahlen die Minimalitätsbedingung $\emptyset \neq a \rightarrow \exists \alpha \in a\ \alpha \cap a = \emptyset$ nach unserer Vereinbarung (also dem Fundierungsaxiom) erfüllt ist.

(ii) Angenommen, es gäbe eine Menge a aller Ordinalzahlen. Nach Satz 3.2 (ii) ist a transitiv und nach der gerade bewiesenen Aussage (i) ist die $\in$-Beziehung eine Wohlordnung auf a, also ist a selbst eine Ordinalzahl, somit $a \in a$ nach Definition von a als Menge aller Ordinalzahlen, aber anderseits gilt $a \notin a$ für alle Ordinalzahlen a, Widerspruch! (Man könnte auch so argumentieren: die Menge a aller Ordinalzahlen wäre als Ordinalzahl die größte Ordinalzahl, dann kann aber nicht $a \in a$ sein!) $\square$

Die Antinomie von BURALI-FORTI (1897) war CANTOR übrigens bereits schon 1895 bekannt. Welche Bedeutung hat sie? Sie besagt, daß es keine größte Ordinalzahl gibt, und wir können sie als Aussage verstehen, daß die Gesamtheit aller Ordinalzahlen so "groß" ist, daß sie sich nicht zu einer Menge zusammenfassen läßt. Das wäre an sich harmlos, wenn man nun nicht befürchten müßte, daß vielleicht an einer anderen Stelle der Theorie ein (womöglich bisher noch gar nicht entdeckter) Widerspruch versteckt ist, der sich nicht so einfach hinweg interpretieren läßt. Später werden wir eine Axiomatisierung der Mengenlehre beschreiben, die diese und ähnliche Antinomien auszuschließen versucht.

Als abschließendes Ergebnis erwähnen wir den

Repräsentationssatz für Wohlordnungen

Ist $<$ eine Wohlordnung auf der Menge a, so gibt es genau eine Ordinalzahl α und genau eine Abbildung $f : a \leftrightarrow \alpha$ mit

(i) $\forall x, y \in a\,(x < y \leftrightarrow f(x) \in f(y))$, *d. h.*

(ii) $a = \{a_\xi \mid \xi < \alpha\}$, *wobei* $\forall \xi, \eta < \alpha(\xi \in \eta \leftrightarrow a_\xi < a_\eta)$.

α heißt der **(Wohl-)Ordnungstyp** von a (bezgl. der Wohlordnung $<$).

Zwar gibt es viele Ordinalzahlen und damit auch viele Wohlordnungen, um aber für jede Menge die Existenz einer Wohlordnung zu erhalten, benötigt man

3.3 Das Auswahlaxiom

$$\mathsf{AC} \qquad \forall x \in a\; x \neq \emptyset \rightarrow \exists f(f \textit{ ist Funktion auf } a\ \wedge \forall x \in a\; f(x) \in x),$$

welches besagt, daß es zu jeder Menge a von nicht-leeren Mengen eine Funktion f gibt, welche aus jedem Element $x \in a$ genau ein Element $f(x) \in x$ auswählt (ein solches f heißt eine **Auswahlfunktion** für die Menge a.)

Damit ist es möglich, eine vorgegebene Menge a aufzuzählen, indem man eine Auswahlfunktion auf den nicht-leeren Teilmengen von a benutzt, um aus den noch nicht aufgezählten Elementen von a jeweils ein weiteres Element zu wählen, bis alle Elemente von a aufgezählt sind. Umgekehrt kann man mittels Wohlordnungen stets eine Auswahl angegeben (nämlich das kleinste Element in dieser Wohlordnung). Somit ist das Auswahlaxiom äquivalent zum ZERMELOschen

Wohlordnungssatz: Jede Menge läßt sich wohlordnen.

Darüber hinaus besitzt das Auswahlaxiom Anwendungen in fast allen Gebieten der Mathematik und viele äquivalente Fassungen (wie das ZORNsche Lemma). Die Problematik des Auswahlaxioms[1] liegt vor allem darin, daß es die Existenz einer Funktion fordert ohne einen Hinweis auf eine mögliche Beschreibung; und ähnlich folgt aus dem Wohlordnungssatz, daß sich z. B. die reellen Zahlen wohlordnen lassen, ohne daß es eine definierbare Wohlordnung zu geben braucht. Wir werden das Auswahlaxiom an vielen Stellen, zunächst vor allem in der Theorie der Kardinalzahlen, benötigen, später Anwendungen in der Deskriptiven Mengenlehre darstellen. Dabei werden wir mit dem *Axiom der Determiniertheit* auch ein Axiom behandeln, welches dem Auswahlaxiom widerspricht. Deswegen ist es wichtig, darauf zu achten, an welchen Stellen man das Auswahlaxiom benutzt. Gelegentlich reichen zur Anwendungen auch Abschwächungen des Auswahlaxioms aus:

Auswahlaxiom für abzählbare Mengen AC_ω

$$\forall n \in \omega \; a_n \neq \emptyset \to \exists f (f \textit{ ist Funktion auf } \omega \wedge \forall n \in \omega \; f(n) \in a_n),$$

Axiom der abhängigen Auswahl DC (*dependent choice*)

$$R \textit{ ist Relation} \wedge a_0 \in a \;\wedge\; \forall x \in a \, \exists y \in a \; xRy$$
$$\to \exists f [f : \omega \longrightarrow a \;\wedge\; f(0) = a_0 \;\wedge\; \forall n < \omega \; f(n) R f(n+1)]$$

Es gilt:
$\mathsf{AC} \to \mathsf{DC}, \mathsf{DC} \to \mathsf{DC}_\omega$ (aber die Umkehrungen sind nicht beweisbar).

Das AC_ω benötigt man, um zu zeigen:

1. jede unendliche Menge enthält eine abzählbar-unendliche Teilmenge,

[1] Zur Geschichte und Problematik des Auswahlaxioms s. das Buch von G.H. MOORE: *Zermelo´s axiom of choice,* Springer 1982

2. die Vereinigung abzählbar-vieler abzählbarer Mengen ist wiederum abzählbar.

Daher spielen diese Axiome in der Analysis und der Maßtheorie eine wichtige Rolle.

3.4 Mächtigkeiten

Grundlegend für die Theorie der Kardinalzahlen ist der Begriff der *Mächtigkeit* einer Menge. Zunächst definieren wir, wann zwei Mengen *gleichmächtig* sind:

$$a \sim b :\leftrightarrow \exists f(f : a \longleftrightarrow b) \qquad \textbf{gleichmächtig}$$

Eine Menge a ist *endlich* gdw ihre Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen von 0 bis $n-1$ für ein n abgezählt werden kann. Da nach unserer Festlegung $\{0,1,\dots,n-1\} = n$ ist, so haben wir eine besonders einfache Definition:

$$\begin{array}{rcl} a \quad \textbf{endlich} \ : & \leftrightarrow & \exists n < \omega \, (a \sim n), \\ a \quad \textbf{unendlich} : & \leftrightarrow & \neg\, a \text{ endlich.} \end{array}$$

Ist a endlich, so ist die natürliche Zahl n mit $a \sim n$ (die man durch Abzählen bestimmt) eindeutig festgelegt und gibt die *Anzahl* der Elemente von a an - für unendliche Mengen braucht dies aber nicht mehr zu gelten!

Nach den endlichen Mengen folgen als nächstgrößere Mengen die *abzählbar-unendlichen* Mengen:

$$a \ \textbf{abzählbar-unendlich:} \leftrightarrow a \sim \omega.$$

Es ist oft zweckmäßig, die endlichen mit den abzählbar-unendlichen Mengen zusammenzufassen; wir sprechen dann von den *abzählbaren* Mengen. Sie werden gemeinsam erfaßt, wenn man auch Abzählungen zuläßt, die Elemente u. U. mehrfach aufzählen:

$$a \ \textbf{abzählbar:} \longleftrightarrow a = \emptyset \lor a = \{a_n \mid n < \omega\} \text{ für eine Folge } (a_n | n < \omega).$$

(Für abzählbar-unendliche Mengen ist also die entsprechende Folge $(a_n|n < \omega)$ injektiv.) Mit

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}_{<\omega}(a) : & = & \{x \mid x \subseteq a \land x \textit{ endlich}\} \\ a^{<\omega} : & = & \{f \mid \exists n < \omega f : n \longrightarrow a\} \end{array}$$

bezeichnen wir die *Menge der endlichen Teilmengen* von a bzw. die *Menge der endlichen Folgen von Elementen* von a.

Eigenschaften abzählbarer Mengen

(i) *a abzählbar* $\leftrightarrow$ *a endlich* $\vee$ *a abzählbar-unendlich* $\leftrightarrow \exists \alpha \leq \omega\,(a \sim \alpha)$,

(ii) *sind a und b abzählbar, so auch*
$a \cup b$, $a \cap b$, $a - b$, $a \times b$, $F[a]$, $\mathcal{P}_{<\omega}(a)$ *und* $a^{<\omega}$,

(iii) (unter der Voraussetzung des abzählbaren Auswahlaxioms AC_ω):
$\forall n \in \omega$ *(a_n abzählbar)* $\rightarrow \bigcup_{n<\omega} a_n$ *abzählbar*,

(iv) *a abzählbar* $\wedge\, b \subseteq a \rightarrow b$ *abzählbar*.

Beweis von von (i): Sei zunächst a abzählbar, also $a = \{a_n \mid n < \omega\}$ für eine Folge $(a_n \mid n < \omega)$, die möglicherweise Wiederholungen enthält. Diese lassen wir weg, indem wir neu aufzählen: Setze $b_0 = a_0$ und definiere (durch Rekursion) $b_{n+1} = a_k$, wobei k minimal ist mit $a_k \neq b_i$ für alle $i \leq n$. (Da wir a als unendlich voraussetzen können, muß ein solches k existieren.) Es ist dann $n \mapsto b_n$ eine Aufzählung von a ohne Wiederholungen.

Umgekehrt sind offenbar endliche wie auch abzählbar-unendliche Mengen abzählbar.

Wir zeigen wir nun (iii), wobei wir annehmen können, daß die betrachteten Mengen nicht-leer sind: Dazu geben wir zunächst eine **Paarfunktion** an:

$$f : \omega \times \omega \longleftrightarrow \omega, \qquad f(n,m) = 2^n \cdot (2m+1) - 1.$$

Ist nun $\forall n \in \omega$ (a_n abzählbar), so können wir (mit Hilfe des Auswahlaxioms) für jedes $n < \omega$

$$a_n = \{a_{n,i} \mid i < \omega\}$$

schreiben, indem wir eine Abzählung von a_n wählen, und die Menge

$$\bigcup_{n<\omega} a_n = \{a_{n,i} \mid n, i < \omega\}$$

läßt sich dann mittels der oben definierten Paarfunktion f aufzählen.

(ii) beweist man ähnlich, wobei man sich leicht überzeugt, daß in diesem Fall das Auswahlaxiom nicht benötigt wird. $\square$

Überabzählbare Mengen

Während die Potenzmenge einer endlichen Menge auch wieder endlich ist, ist die Potenzmenge einer abzählbar-unendlichen Menge nicht mehr abzählbar, also **überabzählbar**: Wäre

$$\begin{array}{rl} \mathcal{P}(\omega) = \{a_n \mid n \in \omega\}, & \text{so wäre auch} \\ a := \{m \in \omega \mid m \notin a_m\} = a_n & \text{für ein } n, \text{dann aber} \\ n \in a_n \leftrightarrow n \notin a_n & \text{Widerspruch!} \end{array}$$

Mit Hilfe eines ähnlichen *Diagonalargumentes* kann man zeigen, daß die Menge aller zahlentheoretischen Funktionen (wie auch die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$) überabzählbar ist.

3.5 Vergleich von Mächtigkeiten

Obwohl wir die *Mächtigkeit* einer Menge noch nicht erklärt haben, konnten wir Mengen als gleichmächtig definieren, wenn sie sich eineindeutig aufeinander abbilden lassen. Ebenso lassen sich Mengen hinsichtlich ihrer Größe vergleichen, ohne sie vorher aufzählen zu müssen:

$$\begin{array}{lcll} a \sim b: & \leftrightarrow & \exists f(f : a \longleftrightarrow b) & a \text{ ist } \textbf{gleichmächtig} \text{ mit } b \\ a \preccurlyeq b: & \leftrightarrow & \exists f(f : a \rightarrowtail b) & a \text{ ist } \textbf{kleiner oder gleichmächtig} \text{ mit } b \\ & \leftrightarrow & \exists x \subseteq b\, (a \sim x) & (a \text{ ist } \textit{schmächtiger} \text{ als } b) \\ a \prec b: & \leftrightarrow & a \preccurlyeq b \wedge a \not\sim b & a \text{ ist } \textbf{kleiner} \text{ als } b \end{array}$$

(Genauer sollte man für $a \preccurlyeq b$ sagen: *a ist von Mächtigkeit kleiner oder gleich b*.) So ist z.B.

$$n \preccurlyeq \omega, n \prec \omega, \omega \preccurlyeq \omega+1, \omega+1 \preccurlyeq \omega, \omega \prec \mathcal{P}(\omega),$$
$$\text{aber:} \quad \omega+1 \not\prec \omega, \omega \not\prec \omega+1.$$

Die Gleichmächtigkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation und zugleich eine Kongruenzrelation bezüglich $\preccurlyeq$ und $\prec$; die Relation $\preccurlyeq$ ist reflexiv und transitiv. Der folgende Satz besagt, daß $\preccurlyeq$ antisymmetrisch ist (bis auf $\sim$), was trivial ist, wenn man das Auswahlaxiom (bzw. den Wohlordnungssatz, s. 3.3) benutzt. Als eines der wenigen Ergebnisse der Theorie der Mächtigkeiten läßt er sich aber auch ohne diese Voraussetzung beweisen:

Satz von Cantor-Schröder-Bernstein

$$a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a \rightarrow a \sim b$$

Beweis: Wir führen die Behauptung zunächst auf den einfacheren Fall

$$(*) \qquad a \preccurlyeq b \wedge b \subseteq a \rightarrow a \sim b$$

zurück: Nach Voraussetzung existieren Abbildungen

$$\begin{aligned} g &: a \longleftrightarrow a' \subseteq b, \\ h &: b \longleftrightarrow b' \subseteq a, && \text{also mit} \\ f &:= h \circ g : a \rightarrowtail b' && \text{gilt} \\ a \preccurlyeq b' &\wedge b' \subseteq a \wedge b' \sim b. \end{aligned}$$

Nach (*) gilt dann $a \sim b'$, also auch $a \sim b$, wie zu zeigen war.

Zum Beweis von (*) gehen wir von einer injektiven Abbildung

$$f : a \rightarrowtail b \subseteq a$$

aus und konstruieren daraus eine Abbildung

$$g : a \leftrightarrow b$$

wie folgt:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b] \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $f^0(y) = y, f^{n+1}(y) = f(f^n(y))$ (numerische Rekursion). Es gilt nun:

(i) g ist surjektiv, d. h. $W(g) = b$:

Sei $d \in b$. Falls $d \in \bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b]$, so ist $d \in f^n[a-b]$ für ein n, und zwar $n > 0$ wegen $d \in b$. Dann ist aber $d = f(f^{n-1}(y))$ für ein y und damit $d \in W(g)$. Im anderen Fall ist aber $d = g(d)$ und damit auch $d \in W(g)$.

(ii) g ist injektiv:

Da f injektiv ist, so auch g auf $\bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b]$, und als identische Abbildung ist sie auch auf dem Komplement injektiv. Ist aber einerseits $x \in \bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b]$ und andererseits $y \in a - \bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b]$, so muß auch $g(x) \neq g(y)$ sein, da $g(x) \in \bigcup_{n\in\omega} f^n[a-b]$, während $g(y) = y$ im Komplement liegt. Somit ist g eine Bijektion von a auf b. □

Der folgende Satz benötigt zum Beweis jedoch notwendig das Auswahlaxiom, da er hierzu äquivalent ist:

Vergleichbarkeitssatz von Hartogs

$$a \preccurlyeq b \lor b \preccurlyeq a$$

Beweis: Nach dem Wohlordnungssatz gibt es Ordinalzahlen α, β mit $a \sim \alpha$ und $b \sim \beta$. Da Ordinalzahlen vergleichbar sind (und zwar $\alpha \subseteq \beta \lor \beta \subseteq \alpha$), überträgt sich diese Beziehung in der Form $a \preccurlyeq b \lor b \preccurlyeq a$ auf die entsprechenden Mengen. □

Daß es zu jeder Menge eine mit größerer Mächtigkeit gibt, zeigt der

Satz von Cantor

$$a \prec \mathcal{P}(a)$$

Beweis: Da durch $x \mapsto \{x\}$ eine injektive Funktion definiert wird, ist $a \preccurlyeq \mathcal{P}(a)$. Die Annahme $a \sim \mathcal{P}(a)$ widerlegt man wie im Fall $a = \omega$ durch ein Diagonalargument: Falls $f : a \twoheadrightarrow \mathcal{P}(a)$, so setze man $d := \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$. Dann erhält man wegen der Surjektivität von f ein $b \in a$ mit $d = f(b)$, was aber mit
$b \in f(b) = d \leftrightarrow b \notin b$ zum Widerspruch führt! □

3.6 Kardinalzahlen

Für die *Mächtigkeit* einer Menge a, bezeichnet mit $\overline{\overline{a}}$, soll gelten:

$$\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{b}} \leftrightarrow a \sim b.$$

Im Falle einer endlichen Menge gilt:

$$a \sim \{0, \ldots, n-1\} = n,$$

wobei n eindeutig durch a bestimmt ist. Diese Zahl wird auch als die *Anzahl* der Elemente von a bezeichnet und kann als Mächtigkeit von a gewählt werden. Ist jedoch a eine unendliche Menge, so können folgende Probleme auftauchen:

1. a besitzt keine Wohlordnung und damit auch keine Aufzählung,

2. a besitzt Aufzählungen verschiedener Länge.

Das erste Problem läßt sich vermeiden, indem man das Auswahlaxiom voraussetzt: Dann läßt sich jede Menge wohlordnen:

$$a = \{\alpha_\xi \mid \xi < \alpha\} \quad \text{für ein } \alpha,$$

aber das zweite Problem bleibt bestehen: Selbst bei injektiven Aufzählungen ist im Falle unendlicher Menge die "Länge" α nie eindeutig bestimmt. Als *Kardinalzahl* von a wählt man daher das kleinstmögliche derartige α:

$$|a| := \overline{\overline{a}} := \mu\alpha(a \sim \alpha) \qquad \textbf{Kardinalzahl} \text{ von } a.$$

Die Kardinalzahl einer Menge a ist somit *die kleinste Ordinalzahl unter allen gleichmächtigen Mengen* (man sagt dann auch, daß man die Kardinalzahlen mit den **Anfangszahlen** identifiziert).

Lemma

(i) $a \sim b \leftrightarrow \overline{\overline{a}} = \overline{\overline{b}}$,

(ii) $a \preccurlyeq b \leftrightarrow \overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{b}}$,

(iii) $a \prec b \leftrightarrow \overline{\overline{a}} < \overline{\overline{b}}$.

Definition

$$\alpha^+ := \mu\xi(\alpha \prec \xi) \qquad \textbf{kardinaler Nachfolger}$$

Mit Hilfe des Satzes von CANTOR (und des Auswahlaxioms) erhält man:

$$\alpha \prec \alpha^+ \leq |\mathcal{P}(\alpha)|.$$

Zur Aufzählung der unendlichen Kardinalzahlen benutzt man seit CANTOR den hebräischen Buchstaben $\aleph$ (aleph):

$$\omega = \aleph_0 < \aleph_1 < \ldots \aleph_\omega < \ldots \qquad \textbf{Aleph-Funktion}$$

Beispiele

1. Die natürlichen Zahlen $0, 1, \ldots$ sind zugleich die endlichen Ordinal- und Kardinalzahlen.

2. $\omega = \aleph_0$ ist die erste unendliche Ordinal- wie auch Kardinalzahl, und zwar die Kardinalzahl abzählbar-unendlicher Mengen:
$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\omega + 1| = |\omega + 2| = \ldots = |\omega + \omega| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|.$$

3. Die nächste Kardinalzahl $> \aleph_0$ ist die kleinste überabzählbare Ordinalzahl, also
$$\aleph_1 = \omega_1 = \{\alpha \mid \alpha \text{ abzählbar}\},$$
zwischen den Kardinalzahlen $\aleph_0$ und $\aleph_1$ liegen also die (überabzählbar-vielen) abzählbar-unendlichen Ordinalzahlen. Die Zahl ω_1 werden wir benutzen, um den Abschluß einer Menge unter Operationen mit abzählbarer Stellenzahl zu erhalten. Dagegen ist es nicht einfach, eine natürliche Menge der Kardinalzahl $\aleph_1$ anzugeben, man weiß nur, daß die Menge der reellen Zahlen sicher überabzählbar ist, also
$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \geq \aleph_1,\ |\mathcal{P}(\mathbb{R})| \geq \aleph_2, \ldots$$

3.7 Operationen auf den Kardinalzahlen

Die arithmetischen Operationen auf den Kardinalzahlen definiert man analog zum endlichen Fall, wobei im Falle der Addition zu beachten ist, daß man als Summe zweier Kardinalzahlen die Vereinigung *disjunkter* Mengen der entsprechenden Kardinalzahl wählt:

$$\begin{aligned}
\kappa \oplus \lambda &= |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})| \\
\kappa \odot \lambda &= |\kappa \times \lambda| \\
\kappa^{\underline{\lambda}} &= |{}^{\kappa}\lambda| = |\{f \mid f : \lambda \to \kappa\}|
\end{aligned}$$

Endliche Ordinal- und Kardinalzahlen stimmen überein (es sind gerade die natürlichen Zahlen), und für diese Fälle stimmen diese Operationen mit den entsprechenden Operationen auf den Ordinalzahlen ebenfalls überein. Für unendliche Kardinalzahlen ergeben sich aber wesentliche Unterschiede. So sind die Operationen der Addition und Multiplikation auf den Kardinalzahlen (wie im Falle der natürlichen Zahlen, aber im Gegensatz zu den ordinalen Operationen) kommutativ, assoziativ und distributiv - wenngleich diese Gesetze trivial sind; es gilt nämlich der

Satz von Hessenberg

Es seien κ, λ *unendliche Kardinalzahlen. Dann gilt:*

$$\kappa \oplus \lambda = \kappa \odot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

(Tatsächlich braucht nur eine der beiden Zahlen unendlich zu sein, im Falle der Multiplikation darf aber natürlich keine = 0 sein.) Dieses Ergebnis läßt sich (mit einfachen Monotoniegesetzen) zurückführen auf den

Satz

Für unendliche Kardinalzahlen gilt:

$$\kappa \odot \kappa = \kappa.$$

Beweis: Wir werden eine bijektive Abbildung $F : On \times On \leftrightarrow On$ angeben, die die Paare von Ordinalzahlen abzählt, und zwar so, daß für jede unendliche Kardinalzahl κ gilt: $F \restriction \kappa \times \kappa$ ist eine Bijektion von $\kappa \times \kappa$ auf κ. Dazu müssen wir die Paare von Ordinalzahlen wohlordnen. Zunächst definieren wir auf $On \times On$ die **lexikographische Ordnung**:

$$(\alpha, \beta) <_l (\gamma, \delta) :\leftrightarrow \alpha < \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta).$$

Dieses ist zwar eine lineare Ordnung, die die Minimumsbedingung erfüllt, aber wir müssen aufpassen, da in dieser Ordnung die *echte* Klasse aller Ordinalzahlen $\{(0, \xi) | \xi \in On\}$ vor dem Paar $(1, 0)$ vorkommt! Deshalb wandelt man diese Ordnung nach GÖDEL ab, indem man nach dem Maximum der Paare vorsortiert:

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) <_g (\gamma, \delta) :\leftrightarrow\ & \max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \vee \\ & \vee (\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \wedge (\alpha, \beta) <_l (\gamma, \delta)).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder eine lineare Ordnung, so daß für jedes Element die kleineren nur eine Menge bilden[2], aber auch weiterhin die Minimalitätsbedingung

[2] s. hierzu auch 8.2

erfüllt ist, und zwar findet man in einem nicht-leeren $A \subseteq On \times On$ das kleinste Element, indem man

- zunächst das kleinste $\gamma_0 \in \{\max(\alpha,\beta) | (\alpha,\beta) \in A\}$ bestimmt,
- sodann hierzu das kleinste $\alpha_0 \in \{\alpha \mid \exists\beta\ ((\alpha,\beta) \in A \wedge \max(\alpha,\beta) = \gamma_0)\}$
- und schließlich das kleinste $\beta_0 \in \{\beta \mid (\alpha_0,\beta) \in A \wedge \max(\alpha_0,\beta) = \gamma_0\}$.

(α_0,β_0) ist dann das kleinste Element von A bezüglich $<_g$.

Durch monotone Aufzählung der Elemente von $On \times On$ erhält man einen Ordnungsisomorphismus $F : On \times On \leftrightarrow On$ mit

$$(\alpha,\beta) <_g (\gamma,\delta) \leftrightarrow F(\alpha,\beta) < F(\gamma,\delta),$$

also eine bijektive Abbildung aller Paare von Ordinalzahlen auf On, von der man zeigen kann, daß sie für jede unendliche Kardinalzahl κ auch die Paare in $\kappa \times \kappa$ nach dem Ordnungstyp κ aufzählt. □

Den Satz von HESSENBERG können wir nun hieraus folgern: Für unendliches κ gilt zunächst:

$$\kappa \leq \kappa \oplus \kappa \leq \kappa \odot \kappa = \kappa, \text{ also } \kappa \oplus \kappa = \kappa \odot \kappa = \kappa.$$

Es seien nun κ, λ Kardinalzahlen und etwa $\kappa \leq \lambda$, λ unendlich. Dann gilt also

$$\begin{array}{ll} \lambda \leq \kappa \oplus \lambda \leq \lambda \oplus \lambda = \lambda, & \text{also } \kappa \oplus \lambda = \lambda, \text{ und ebenso} \\ \lambda \leq \kappa \odot \lambda \leq \lambda \odot \lambda = \lambda, & \text{also } \kappa \odot \lambda = \lambda \text{ für } \kappa, \lambda \neq 0. \end{array}$$

Damit vereinfacht sich die Bestimmung der Kardinalzahl unendlicher Mengen in vielen Fällen und in Verallgemeinerung des Falles abzählbarer Mengen erhalten wir:

Satz

Für $\emptyset \neq b \preccurlyeq a$, a unendlich, gilt:

(i) $|a \cup b| = |a \times b| = |a|$,

(ii) $|a^{<\omega}| = |\mathcal{P}_{<\omega}(a)| = |a|$.

3.8 Die Cantorsche Kontinuumshypothese

Während nach dem Satz von HESSENBERG Addition und Multiplikation von unendlichen Kardinalzahlen trivial (nämlich das Maximum) ist, stößt man bereits bei Bestimmung der einfachsten transfiniten Potenz, nämlich $2^{\underline{\omega}}$, auf unlösbare Probleme. Dabei hat diese Kardinalzahl eine besondere Bedeutung als Mächtigkeit der reellen Zahlen (des *Kontinuums*):

Satz

$$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}.$$

Beweis: Die zweite Gleichheit folgt aus der Äquivalenz der Potenzmenge einer Menge a mit der Menge der charakteristischen Funktionen der Teilmengen von a. Es gibt zahlreiche Beweise für den ersten Teil, am einfachsten ist die Beziehung

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|,$$

nachzuweisen, indem man z. B. jeder reellen Zahl r die Menge $\{x \in \mathbb{Q} | x < r\}$ (also praktisch den entsprechenden DEDEKINDschen Schnitt) zuordnet und die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ benutzt oder die Darstellung reeller Zahlen als Dezimalbrüche (bzw. Dualbrüche im Binärsystem). Für den Beweis der umgekehrten Beziehung stört die fehlende Eindeutigkeit der Dezimal- bzw. Binärdarstellung, was sich jedoch nur auf abzählbar-viele Fälle bezieht, die wegen der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ aber keine Rolle spielen. Man kann aber auch etwa wie folgt argumentieren: Für eine Binärfolge $f : \mathbb{N} \to 2 = \{0, 1\}$ definieren wir eine zugeordnete reelle Zahl

$$r_f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot f(n)}{3^{n+1}},$$

womit wir eine injektive Abbildung von ${}^{\mathbb{N}}2$ in die reellen Zahlen erhalten und damit auch $|\mathbb{R}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. □

Folgerungen

1. Mit $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ ist auch $|\mathbb{R}^n| = (2^{\aleph_0})^n = 2^{\aleph_0}$, es ist sogar

   $$|\{s \mid s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \odot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

   d. h. es gibt genau so viele abzählbare Folgen reeller Zahlen wie es reelle Zahlen gibt!

2. Da eine stetige reelle Funktion bereits durch ihre Werte auf den abzählbarvielen rationalen Stellen eindeutig bestimmt ist und da es mit den konstanten Funktionen mindestens so viele stetige Funktionen wie reelle Zahlen gibt, so gilt:

$$|\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \land f \textit{ stetig}\}| = |\{f \mid f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

3. Dagegen erhalten wir höhere Mächtigkeiten, indem wir zur Potenzmenge der reellen Zahlen oder zur Menge aller reellen Funktionen übergehen:

$$|\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}.$$

Wie groß ist nun $2^{\aleph_0}$? Nach dem Satz von CANTOR ist $2^{\aleph_0} \geq \aleph_0^+ = \aleph_1$. Die

Cantorsche Kontinuumshypothese $\mathsf{CH}: \quad 2^{\aleph_0} = \aleph_1$

erscheint als naheliegende, zumindest einfachste Festlegung der Größe von $2^{\aleph_0}$. Sie ist unabhängig von den üblichen Axiome der Mengenlehre (z. B. dem System ZFC der Mengenlehre von ZERMELO-FRAENKEL), und zwar kann man sie widerspruchsfrei zu ZFC hinzunehmen (GÖDEL 1938), aber in dieser Theorie auch nicht beweisen (COHEN 1963).

CH besagt, daß die Mächtigkeit der reellen Zahlen die nächst-größere Kardinalzahl nach dem Abzählbaren ist. Um CH zu widerlegen, müßte man also eine Menge reeller Zahlen angeben, die überabzählbar, aber noch von Mächtigkeit $< 2^{\aleph_0}$ ist, um dagegen CH zu beweisen, muß man zeigen, daß für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$A \textit{ abzählbar} \lor A \sim \mathbb{R}$$

Da CH nicht beweisbar ist, kann man diese Aussage höchstens für *bestimmte* Mengen nachweisen. Die Grenze der Komplexität, bis zu welcher dieses nachweisbar ist, werden wir mit Hilfe der *projektiven Hierarchie* genau abschätzen können.

Kapitel 4

Die reellen Räume

Die Dezimalbruchdarstellung der reellen Zahlen hat den Nachteil, daß die rationalen Zahlen stets zwei Darstellungen besitzen ($0,5 = 0,4\bar{9}$); deshalb benutzt man in der Deskriptiven Mengenlehre den Raum der Irrationalzahlen in der besonders einfachen Darstellung als BAIREschen Raum. Dieser fällt - wie auch auch die reellen Zahlen selbst und auch einige verwandte topologische Räume - unter den allgemeineren Begriff des *Polnischen Raumes*. Zuvor führen wir einige allgemeine Begriffe aus der Topologie ein.

4.1 Topologische Räume

Ein **topologischer Raum** ist eine nicht-leere Menge X mit einer **Topologie** $\mathcal{T}$, die folgende Bedingungen erfüllt:

T1 $O \in \mathcal{T} \to O \subseteq X$,

T2 $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

T3 $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \to O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$,

T4 $\forall i \in I\ O_i \in \mathcal{T} \to \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen **offene** Mengen, ihre Komplemente (in X) **abgeschlossene** Mengen. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** des Punktes $x \in X$ gdw $x \in O \subseteq U$ für eine offene Menge O.

Eine **Basis** $\mathcal{B}$ für die offenen Mengen eines topologischen Raumes ist eine Menge offener Mengen, so daß jede offene Menge Vereinigung von Mengen der

Basis ist. (Beispiel: die Menge der offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten im Falle des Raumes $\mathbb{R}$.)

Beispiele

1. Es gibt natürlich zwei Extremfälle: Besteht $\mathcal{T}$ aus allen Teilmengen von X, so heißt die Topologie *diskret*, ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, so heißt die Topologie *indiskret* (oder *Klumpentopologie*).

2. Die übliche Topologie von $\mathbb{R}$ (oder dem $\mathbb{R}^n$) ist weder diskret noch indiskret. Wir haben sie im vorhergehenden Abschnitt mittels des üblichen Abstandsbegriffes eingeführt, auch im folgenden werden wir vor allem topologische Räume behandeln, deren Topologie durch eine Metrik gegeben ist; es gibt aber auch Beispiele von topologischen Räumen, deren Topologie nicht auf eine Metrik zurückgeführt werden kann.

Auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes X erklärt man eine Topologie durch $\{O \cap Y \mid Y \in T\}$, d. h. die offenen Mengen von Y als **Unterraum** von X sind die die Durchschnitte mit Y von den offenen Mengen von X.

Ein **metrischer Raum** ist eine nicht-leere Menge X mit einer Abstandsfunktion (Metrik) $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die die folgenden Axiome erfüllt:

(M1) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$ (positiv-definit),

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (symmetrisch),

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung).

In einem metrischen Raum (X,d) definiert man für jeden Punkt $a \in X$ und jede reelle Zahl $\delta > 0$

$$U_\delta(a) := \{x \in X \mid d(x,a) < \delta\} \quad \delta\text{-}\textbf{Umgebung} \text{ von } a, \quad \text{allgemeiner:}$$
$$U \subseteq X \quad \textbf{Umgebung} \text{ von } a :\leftrightarrow \exists \delta > 0\, U_\delta(a) \subseteq U,$$

und damit eine *Topologie* auf X, indem man (wie im Falle der reellen Zahlen)

$$G \subseteq X \textbf{ offen} :\leftrightarrow \forall x \in G \exists \delta > 0\, U_\delta(x) \subseteq G$$

definiert und entsprechend

$$\begin{aligned} F \subseteq X \textbf{ abgeschlossen} : \quad &\leftrightarrow \quad X - F \text{ offen} \\ &\leftrightarrow \quad \forall x \notin F \exists \delta > 0\, U_\delta(x) \cap F = \emptyset \\ &\leftrightarrow \quad \forall x \forall \delta > 0\, (U_\delta(x) \cap F \neq \emptyset \to x \in F). \end{aligned}$$

Die Begriffe **offener Kern, abgeschlossene Hülle** kann man dann wie im Falle der reellen Zahlen definieren. Auch die Begriffe CAUCHY-Folge und Konvergenz lassen sich direkt auf den Fall metrischer Räume übertragen.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist **metrisierbar** gdw er eine Metrik d besitzt, die zu der Topologie $\mathcal{T}$ führt, und in diesem Fall heißt die Metrik d **verträglich** mit der Topologie $\mathcal{T}$. *Achtung*: Verschiedene Metriken können durchaus zur selben Topologie führen! (Z. B. erzeugt mit d auch $d' = d/1+d$ dieselbe Metrik, wobei zusätzlich $d' \leq 1$ gilt.)

Das **Produkt** einer Folge metrischer Räume $(X, d_n)_{n<\omega}$ ist der Produktraum

$$X = \prod_{n<\omega} X_n := \{(x_n)_{n<\omega} \mid \forall n < \omega \; x_n \in X_n\}$$

mit der Metrik

$$d(x,y) = \sum_{n<\omega} 1/2^{n+1} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

für $x = (x_n)_{n<\omega}, y = (y_n)_{n<\omega}$. Die zugehörige Topologie ist dann auch die Produkttopologie der entsprechenden topologischen Räume $(X, \mathcal{T}_n)$.

Es seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $x \in X$. Dann heißt

$$\begin{aligned} f \textbf{ stetig in } x : \quad \leftrightarrow \quad & \forall V \subseteq Y (V \text{ Umgebung von } f(x) \\ & \to f^{-1}[V] = \{x \in X | f(x) \in V\} \text{ Umgebung von } x). \end{aligned}$$

f ist **stetig** genau dann, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist, d. h.

$$f \textbf{ stetig} :\leftrightarrow \forall V \subseteq Y (V \text{ offen in } Y \to f^{-1}[V] = \{x \in X | f(x) \in V\} \text{ offen in } X).$$

Wegen $f^{-1}(Y - V) = X - f^{-1}(V)$ ist für eine stetige Abbildung dann auch das Urbild jeder abgeschlossenen Menge wiederum abgeschlossen, aber nicht notwendig das stetige Bild einer offenen Menge wieder offen (*Beispiel:* eine konstante reelle Funktion).

$$f : X \to Y \textbf{ Homöomorphismus } :\leftrightarrow f \text{ bijektiv, stetig und } f^{-1} \text{ stetig }.$$

In diesem Fall werden durch f die offenen Mengen von X genau auf die offenen Mengen von Y abgebildet, so daß beide dieselbe topologische Struktur besitzen.

4.2 Bäume

Für eine nicht-leere Menge A und eine natürliche Zahl n bezeichnen wir die Menge der n-elementigen Folgen (von Elementen von A) mit

$$A^n := \{s \mid s : \{0, \dots n-1\} \to A\}$$

und schreiben auch $s = (s(0), \dots, s(n-1)) = (s_0, \dots, s_{n-1})$. Dabei heißt $|s| := n$ die **Länge** von s; die leere Menge $\emptyset$ gilt als Folge der Länge 0 (und somit $A^0 = \{\emptyset\}$). Die Menge der **endlichen Folgen** bzw. **unendlichen Folgen** (von Elementen von A) ist dann

$$\begin{aligned} A^{<\mathbb{N}} &:= \bigcup_{n<\mathbb{N}} A^n \quad \textit{bzw.} \\ A^{\mathbb{N}} &:= \{x \mid x : \mathbb{N} \to A\}, \end{aligned}$$

und eine unendliche Folge $x : \mathbb{N} \to A$ hat die Länge $|x| = \omega$. Für die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ benutzen wir auch die Bezeichnung ω als die kleinste unendliche Ordinalzahl, so daß also $n \in \mathbb{N} \leftrightarrow n < \omega$ gilt.

Eine partielle Ordnung $\leq$ auf den endlichen wie auch unendlichen Folgen ist die Inklusion:

$$s \leq t :\leftrightarrow s \subseteq t \leftrightarrow |s| \leq |t| \wedge \forall i < |s| \; s(i) = t(i),$$

was bedeutet, daß s ein **Anfangsstück** von t bzw. t eine **Verlängerung** von s ist.

Zwei Folgen s, t sind miteinander **verträglich** gdw $s \leq t \vee t \leq s$; dagegen bedeute $s|t$, daß die Folgen nicht miteinander verträglich sind.

Für eine Folge $s = (s_0, \dots, s_n)$ ist $s^\frown a = (s_0, \dots, s_{n-1}, a)$ die **Verlängerung** von s um das Element a; allgemeiner kann man für zwei endliche Folgen s, t ihre **Zusammensetzung** (concatenation) $s^\frown t$ zu einer Folge der Länge $|s| + |t|$ erklären.

Ein **Baum** auf A ist eine Teilmenge $T \subseteq A^{<\omega}$, die unter Anfangsstücken abgeschlossen ist:

$$T \,\text{Baum} :\leftrightarrow T \subseteq A^{<\omega} \wedge \forall s \in T \, \forall n < |s| \, (s \restriction n \in T).$$

Ein **unendlicher Zweig** von T ist eine Folge $z : \omega \to A$ mit $\forall n < \omega \; (z \restriction n \in T)$.

$$[T] := \{z \mid z \text{ unendlicher Zweig von } T\}$$

nennt man **Stamm** (*body*) von T. Ein Baum T heißt **gestutzt** (pruned) gdw jedes $t \in T$ eine echte Fortsetzung $s \supset t, s \in T$ besitzt, (wenn also T keine maximalen endlichen Ketten besitzt).

Als wichtigste Beispiele erhalten wir für $A = \{0,1\}$ den vollen binären Baum 2^ω, für $A = \mathbb{N}$ den Baum aller unendlichen Folgen natürlicher Zahlen. Beides sind gestutzte Bäume mit $[2^{<\mathbb{N}}] = 2^{\mathbb{N}}, [\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Die Menge $A^{\mathbb{N}}$ wird zum topologischen Raum durch die Produkttopologie, wobei A die diskrete Topologie besitze. Das bedeutet, daß dieser Raum metrisierbar ist durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 2^{-(n+1)} & \text{falls } x \neq y \wedge n = \text{kleinstes } m \text{ mit } x_m \neq y_m. \end{cases}$$

Die Mengen

$$N(s) := \{x \in A^{\mathbb{N}} \mid s \subseteq x\}$$

bilden für $s \in A^{<\mathbb{N}}$ eine Basis für die offenen Mengen. Dabei gilt:

$$s \subseteq t \leftrightarrow N(s) \supseteq N(t), \quad s|t \leftrightarrow N(s) \cap N(t) = \emptyset.$$

Satz

(i) *$U \subseteq A^{\mathbb{N}}$ ist offen $\iff$ es gibt eine Menge $S \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ mit $U = \bigcup_{s \in S} N(s)$. (Dabei kann man annehmen, daß für alle $s,t \in S : s \neq t \rightarrow s|t$).*

(ii) *$F \subseteq A^{\mathbb{N}}$ ist abgeschlossen $\iff$ es gibt einen Baum $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ mit $F = [T]$. (Dabei kann man annehmen, daß T ein gestutzter Baum ist.) Die Abbildung*

$$T \mapsto [T]$$

ist eine Bijektion zwischen den gestutzten Bäumen auf A und den abgeschlossenen Teilmengen von $A^{\mathbb{N}}$, die Umkehrabbildung wird gegeben durch

$$F \mapsto T_F := \{x \restriction n \mid x \in F \wedge n \in \mathbb{N}\}.$$

T_F heißt der **Baum** von F.

(iii) *Sind $F,H \subseteq A^{\mathbb{N}}$ abgeschlossen mit $\emptyset \neq F \subseteq H$, so gibt es eine stetige Surjektion $f : H \twoheadrightarrow F$ mit $\forall x \in F\ f(x) = x$.* ($F$ heißt **Retrakt** von H.)

Beweis von (iii): Es seien S,T gestutzte Bäume mit $F = [S]$ und $H = [T]$. Dann gilt $S \subseteq T$, und wir definieren eine Abbildung $\varphi : T \rightarrow S$ mit $\forall s \in S\ \varphi(s) = s$ wie folgt: $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Ist $\varphi(t)$ definiert, so sei für $a \in A$

$$\varphi(t^\frown a) = \begin{cases} t^\frown a & \text{falls } t^\frown a \in S, \\ \varphi(t)^\frown b & \text{für ein } b \text{ mit } \varphi(t)^\frown b \in S \text{ sonst.} \end{cases}$$

(Da S ein gestutzter Baum ist, muß ein solches b im 2. Fall existieren.)
Die gesuchte Abbildung f erhält man nun durch $f(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x \restriction n)$.

□

4.3 Polnische Räume

Ein **Polnischer Raum** ist ein metrischer (und damit topologischer Raum), welcher

- **separabel** ist: X enthält eine abzählbare *dichte* Teilmenge D (d. h. jede Umgebung enthält einen Punkt aus D) und
- **vollständig** ist: jede CAUCHY-Folge besitzt einen Grenzwert.

Die erste Bedingung wird dafür sorgen, daß X nicht "zu groß" ist, während die Vollständigkeit dafür sorgt, daß X genügend viele Punkte enthält. Eine weitere Bedingung wird dann dazu führen, daß jeder *perfekte* Polnische Raum die Mächtigkeit der reellen Zahlen besitzt:

Ein topologischer Raum heißt **perfekt** gdw er keine isolierten Punkte besitzt (d. h. keine einelementige Menge $\{x\}$ ist offen).

Beispiele:

1. $\mathbb{N}$, die Menge der **natürlichen Zahlen** mit dem gewöhnlichen Abstand $d(x,y) = |x-y|$, ist ein Polnischer Raum (jede CAUCHY-Folge ist ab einer Stelle konstant). $\mathbb{N}$ besteht aus lauter isolierten Punkten, ist also *nicht* perfekt. Alle folgenden Beispiele sind jedoch perfekte Polnische Räume:

2. $\mathbb{R}$, die Menge der **reellen Zahlen** mit der gewöhnlichen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ ist ein Polnischer Raum mit $\mathbb{Q}$ als abzählbarer dichter Teilmenge,

3. $\mathbb{I}$, das abgeschlossene **Einheitsintervall** $[0,1]$ als Teilraum von $\mathbb{R}$,

4. $\mathcal{N}$ (der BAIRE-**Raum**): Elemente ("Punkte") sind die zahlentheoretischen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die auch mit $x = (x_n)_{n<\omega}$ bezeichnet werden, wobei wir $x_n = x(n)$ setzen. Als Metrik auf $\mathcal{N}$ wählen wir wie in 4.2:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 2^{-(n+1)} & \text{falls } x \neq y \wedge n = \text{kleinstes } m \text{ mit } x_m \neq y_m. \end{cases}$$

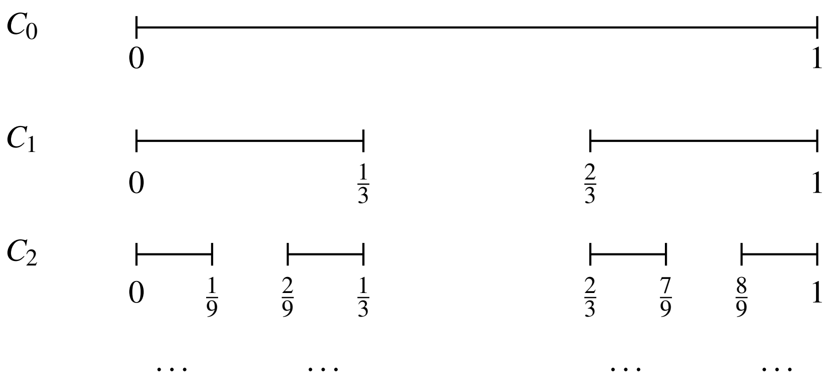
5. $\mathcal{C}$ (der CANTOR-**Raum**) als Teilraum der $0,1$-Folgen $x : \mathbb{N} \to 2 = \{0,1\}$ mit derselben Metrik wie $\mathcal{N}$.

Die obigen Räume (außer $\mathbb{N}$) werden auch **reelle Räume** genannt. Sie unterscheiden sie sich in ihren topologischen Eigenschaften:

- $\mathbb{I}$ und $\mathcal{C}$ sind kompakt, nicht aber $\mathbb{R}$ und $\mathcal{N}$,
- $\mathbb{R}$ und $\mathbb{I}$ sind zusammenhängend, $\mathcal{N}$ und $\mathcal{C}$ aber total-unzusammenhängend.
- $\mathcal{N}$ ist homöomorph zum Raum der Irrationalzahlen (benutze die Kettenbruchentwicklung reeller Zahlen!), $\mathcal{C}$ homöomorph zum

CANTORschen **Diskontinuum**, welches aus dem abgeschlossenen Einheitsintervall $[0,1]$ entsteht, indem man jeweils die inneren offenen Drittel entfernt:

$C_0 = [0,1]$, $C_1 = [0, {}^1\!/_3] \cup [{}^2\!/_3, 1] \ldots$, $D = \bigcap_{n<\omega} C_n$:



Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist D abgeschlossen, aber ohne innere Punkte (die Intervalle werden mit wachsendem n immer kleiner), also ist D nirgends-dicht. Die Elemente von D lassen sich als triadische Brüche darstellen:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a_0/3 + a_1/3^2 + \ldots \text{ mit } a_n \in \{0,2\}\},$$

z. B.

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{3^{n+1}},\ \frac{1}{3} = \sum_{n>0} \frac{2}{3^{n+1}},\ \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \sum_{n>0} \frac{0}{3^{n+1}}, \ldots,$$

und damit läßt sich ein Homöomorphismus vom CANTOR-Raum $\mathcal{C}$ auf das CANTORsche Diskontinuum D definieren durch

$$x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^{n+1}} .$$

Weitere Polnische Räume erhält man wie folgt:

- Jede abgeschlossene Menge $A \neq \emptyset$ eines Polnischen Raumes ist als Unterraum (mit derselben Metrik) wiederum ein Polnischer Raum. Allgemeiner gilt:[1]

- ein Unterraum A eines Polnischen Raumes X ist wiederum ein Polnischer Raum gdw A eine G_δ-Teilmenge von X ist. Insbesondere ist auch das offene Intervall der reellen Zahlen $(0,1)$ ein Polnischer Raum, aber nicht mit der üblichen Metrik (unter dieser ist er nicht vollständig)!

- Das Produkt endlich oder abzählbar vieler Polnischer Räume ist wieder ein Polnischer Raum (mit der üblichen Produktmetrik bzw. -Topologie),

- X ist ein Polnischer Raumes gdw X homöomorph zu einer G_δ-Teilmenge des HILBERT-Würfels $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ ist.

Insbesondere ist also auch der $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Metrik ein perfekter Polnischer Raum. Für unterschiedliche Dimensionszahlen n sind diese Räume zwar gleichmächtig, aber nicht homöomorph. Dagegen gilt für den BAIRE-Raum $\mathcal{N}$, daß $\mathcal{N}^2$ homöomorph zu $\mathcal{N}$ ist, und zwar mittels der einfachen Abbildung

$$(x,y) \mapsto (x_0,y_0,x_1,y_1,\dots,x_n,y_n,\dots).$$

$\mathcal{N}$ ist somit *dimensionslos*, was ihn für die spätere Entwicklung besonders geeignet macht. Außerdem werden wir zeigen:

- Jeder Polnische Raum ist stetiges Bild von $\mathcal{N}$ (und hat somit höchstens die Mächtigkeit der reellen Zahlen),

- jeder perfekte Polnische Raum enthält eine Kopie von $\mathcal{C}$ (und hat somit mindestens die Mächtigkeit der reellen Zahlen).

Daher beschäftigen wir uns jetzt näher mit den

---

[1] s. QUERENBURG: *Mengentheoretische Topologie*, pp. 149f oder
KECHRIS: Classical Descriptive Set Theory, 4.C A

4.4 Eigenschaften des Baireschen Raumes

Zunächst erinnern wir an die Definition der Metrik auf $\mathcal{N}$:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 2^{-(n+1)} & \text{falls } x \neq y \wedge n = \text{kleinstes } m \text{ mit } x_m \neq y_m. \end{cases}$$

Insbesondere gilt also für zwei Punkte $x, y \in \mathcal{N}$ und alle $n > 0$:

$$d(x,y) \leq 2^{-(n+1)} \leftrightarrow d(x,y) < 2^{-n} \leftrightarrow \forall i < n \; x_i = y_i,$$

je länger zwei Folgen übereinstimmen, desto kürzer ist also ihr Abstand. Die Metrik bestimmt wieder die Topologie von $\mathcal{N}$:

$$G \subseteq \mathcal{N} \text{ offen} :\leftrightarrow \forall x \in G \; \exists \delta > 0 \; U_\delta(x) \subseteq G.$$

Hier können wir besonders einfache **Basis-Umgebungen** wählen: Für jede endliche Folge $s \in \omega^{<\omega}$ der Länge n sei

$$N(s) := \{x \mid s \subseteq x\}.$$

Dann gilt auch

$$G \subseteq \mathcal{N} \text{ offen} \leftrightarrow \forall x \in G \; \exists s \in \omega^{<\omega} \; N(s) \subseteq G.$$

Topologische Eigenschaften von $\mathcal{N}$

(i) *Die Mengen $N(s)$ bilden eine Umgebungsbasis im Sinne der Topologie:*

 (a) $x \in N(x \restriction n)$ für alle n,

 (b) Ist U eine beliebige Umgebung von x, so ist $N(x \restriction n) \subseteq U$ für ein n.

(ii) *Die Mengen $N(s)$ sind offen und abgeschlossen. (Einen topologischen Raum mit einer Umgebungsbasis aus offen-abgeschlossenen Mengen nennt man* **total-unzusammenhängend** *oder* **dimensionslos***).*

(iii) $\mathcal{N}$ *ist separiert (oder: ein* HAUSDORFF*-Raum, d. h. je zwei verschiedene Punkte lassen sich durch disjunkte Umgebungen trennen) und separabel: die Menge der Folgen, die ab einer Stelle konstant = 0 sind, bilden eine abzählbare dichte Teilmenge von* $\mathcal{N}$.

(iv) $\mathcal{N}$ *ist vollständig, aber nicht kompakt.*

Beweis von (i) (b): Ist $U_\delta(x) = \{y \mid d(x,y) < \delta\} \subseteq U$ für ein $\delta > 0$, so ist $N(x \restriction n) \subseteq U_\delta(x)$ für jedes n mit $1/2^n \leq \delta$.

(ii): Ist $x \in N(s)$ mit $n = |s| > 0$, so ist $\forall i < n\, x(i) = s(i)$. Setzt man $\delta := 1/2^n$, so gilt auch $\forall i < n\, x(i) = y(i)$ für alle $y \in U_\delta(x)$, also $U_\delta(x) \subseteq N(s)$. Somit ist $N(s)$ offen.

Ist andererseits $x \notin N(s), s = (s(o), \dots, s(n-1))$, so $x(i) \neq s(i)$ für ein $i < n$. Dann ist aber auch $N(x \restriction n) \cap N(s) = \emptyset$, d. h. das Komplement von $N(s)$ ist offen und damit $N(s)$ abgeschlossen.

(iii): Sind $x \neq y$ verschiedene Punkte, so $x(n) \neq y(n)$ für ein n, und dann sind $N(x \restriction n+1)$ und $N(y \restriction n+1)$ disjunkte Umgebungen von x bzw. y.

(iv): Es sei $(x^{(n)})_{n<\omega}$ eine CAUCHY-Folge, also

$$\forall n\, \exists k_0\, \forall k,l \geq k_0\; d(x^{(k)}, x^{(l)}) < 2^{-(n+1)}. \quad \text{Dann gilt}$$
$$\forall n\, \exists k_0\, \forall k,l \geq k_0\; \forall m \leq n\; x^{(k)}(m) = x^{(l)}(m),$$

d. h. für festes i ist die Folge $(x^{(k)}(i))_{k<\omega}$ schließlich konstant, etwa $= x_i$. Dann ist die Folge $(x_i)_{i<\omega}$ der Grenzwert der Folge $(x^{(k)})_{k<\omega}$.

Wir wählen die einelementigen Folgen (k_0) (die an der Stelle 0 den Wert k_0 annehmen). Die zugehörigen Mengen $N((k_0))$ für $k_0 \in \mathbb{N}$ bilden dann eine Überdekkung durch offene Mengen, welche keine endliche Teil-Überdeckung besitzt. $\square$

4.5 Polnische Räume als stetige Bilder des Baire-Raumes

Jeder Polnische Raum ist stetiges Bild des BAIREschen Raumes.
Es gilt sogar:
Für jeden Polnischen Raum $\mathcal{M}$ gibt es eine abgeschlossene Menge F und eine stetige Bijektion $f : F \leftrightarrow \mathcal{M}$, die sich zu einer Surjektion $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ erweitern läßt.

Beweis: Es sei $D = \{r_n | n < \omega\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge des Polnischen Raumes $\mathcal{M}$. Als ersten Ansatz definieren wir eine Abbildung

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{N} & \to & \mathcal{M} & \text{durch} \\ x & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} r_{x(n)}. & \end{array}$$

Da D dicht ist, ist diese Abbildung surjektiv; allerdings braucht der Limes i. a. nicht zu existieren und die Abbildung wird nicht ohne weiteres stetig sein. Daher nehmen wir folgende Modifikation vor:

Zu jedem $x \in \mathcal{N}$ sei die Folge $(f_i^x)_{i<\omega}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f_0^x &= r_{x(0)} \\ f_{n+1}^x &= \begin{cases} r_{x(n+1)} & \text{falls } d(f_n^x, r_{x(n+1)}) < 1/2^n, \\ f_n^x & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Da somit $d(f_n^x, f_{n+1}^x) < 1/2^n$, erhalten wir eine CAUCHY-Folge, die wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{M}$ einen Grenzwert in M besitzt. Wir setzen nun

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^x.$$

Es ist nun leicht nachzuprüfen, daß f die gewünschten Eigenschaften besitzt: Setzt man für gegebenes $y \in M$

$$x(n) = \text{ das kleinste } k \text{ mit } d(r_k, y) < 1/2^{n+1},$$

so ist $f(x) = \lim_{n\to\infty} r_{x(n)} = y$, also ist f surjektiv. Außerdem ist f offenbar stetig, so daß wir $\mathcal{M}$ als stetiges Bild des BAIREschen Raumes $\mathcal{N}$ erhalten haben.

Um die verstärkte Aussage des Satzes zu erhalten, müssen wir die Konstruktion von f weiter verfeinern, und zwar mit einer Methode, die wir zunächst beim Beweis des folgenden Satzes beschreiben werden: □

4.6 Stetige Einbettungen des Cantor-Raumes

Für jeden perfekten Polnischen Raum $\mathcal{M}$ gibt es eine stetige injektive Abbildung $f : \mathcal{C} \rightarrowtail \mathcal{M}$ des CANTOR-Raumes $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$.

Ähnlich wie beim Beweis von 4.5 werden wir jedem Punkt $x \in \mathcal{C}$, also jeder unendlichen Binärfolge x, den Limes einer CAUCHY-Folge $(f_i^x)_{i<\omega}$ zuordnen. Das Problem besteht nun darin, daß die Abbildung injektiv sein soll. Dazu gehen wir (wie in den früheren Fällen) die Elemente von x der Reihe nach durch und legen für jedes n fest, in welcher Menge $f(x)$ liegen soll gemäß der Information, die im Anfangsstück $x \upharpoonright n$ vorliegt. Dazu suchen wir Mengen $A_{x\upharpoonright n}$, in welchen alle $f(y)$ mit $x \upharpoonright n = y \upharpoonright n$ liegen sollen, und $f(x)$ soll schließlich das einzige Element von

$$\bigcap_{n<\omega} A_{x\upharpoonright n}$$

sein. Um dieses zu erreichen, verlangen wir von den Mengen A_s (für $s \in 2^{<\omega}$) folgende Eigenschaften:

(i) $s \subseteq t \to A_s \supseteq A_t$.

Dadurch wird $f(x)$ durch $A_{x\upharpoonright n}$ mit wachsendem n immer besser festgelegt. Damit der Durchschnitt aller dieser Mengen aus genau einem Element besteht, fordern wir weiter:

(ii) für alle $s \in 2^{<\omega}$ ist A_s abgeschlossen und $\neq \emptyset$,

(iii) $d(A_{x\upharpoonright n}) \to 0$ für $n \to \infty$,
wobei $d(A) = \sup\{d(x,y) | x,y \in A\}$ = *Durchmesser* von A ist.

Unter diesen Bedingungen ist f *stetig*: Sei $x \in \mathcal{C}$. Dann ist für alle $y \in N(x \upharpoonright m)$:

$$f(y) \in \bigcap_{n<\omega} A_{y\upharpoonright n} \subseteq A_{y\upharpoonright m} = A_{x\upharpoonright m}$$

und auch $f(x) \in A_{x\upharpoonright m}$. Wegen (iii) kann man also erreichen, daß der Abstand zwischen $f(x)$ und $f(y)$ hinreichend klein wird, sofern x und y nahe beieinander liegen.

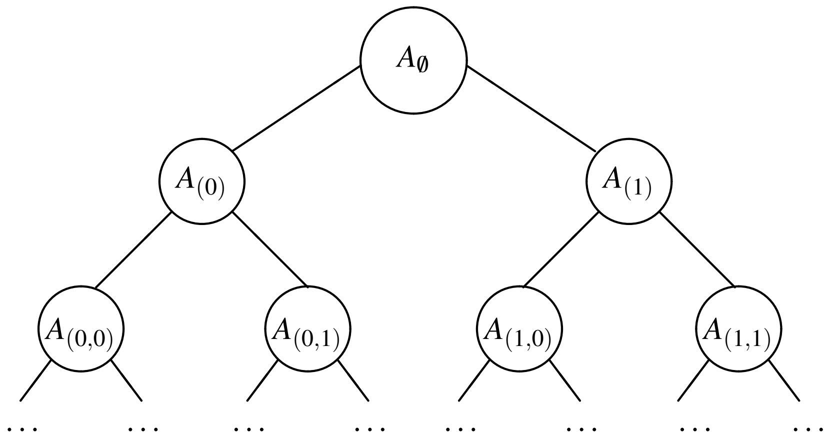
Damit die Abbildung f *injektiv* ist, werden wir verlangen:

(vi) $s \in 2^{<\omega} \to A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset$.

Die Abbildung f ist auch noch *surjektiv*, falls zusätzlich gefordert wird:

(v) $A_\emptyset = M$ und $A_s = A_{s^\frown 0} \cup A_{s^\frown 1}$ für alle $u \in 2^{<\omega}$.

Die Bedingungen (i) und (vi) legen ein CANTOR-**Schema** auf $\mathcal{M}$ fest, welches an die Struktur des binären Baumes wie auch der CANTOR-Menge erinnert:



Wir müssen nun also nachweisen, daß sich in einem perfekten Polnischen Raum $\mathcal{M}$ die obigen Bedingungen (i) - (iv) erfüllen lassen. Dazu definieren wir ein CANTOR-Schema $(U_s | s \in 2^{<\omega})$ auf $\mathcal{M}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) U_s ist offen und nicht-leer,

(b) $d(U_s) \leq 1/2^{|s|}$,

(c) $\overline{U_{s^\frown i}} \subseteq U_s$ für alle $s \in 2^{<\omega}$, $i = 0, 1$.

Dann erfüllt $(\overline{U_s} | s \in 2^{<\omega})$ die obigen Bedingungen (i) - (iv) und $f : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ mit

$$f(x) = \textit{ das einzige Element von } \bigcap_{n<\omega} \overline{U_{x\restriction n}} = \bigcap_{n<\omega} U_{x\restriction n}$$

ist die gesuchte Einbettung.

Die Mengen U_s definieren wir durch Induktion über die Länge von s:

Für $s = \emptyset$ wählen wir eine Menge mit (a) und (b). Ist U_s definiert, so wählen wir $U_{s^\frown i}$, indem wir in U_s zwei Punkte $x \neq y$ wählen (was möglich ist, da $\mathcal{M}$ perfekt ist) und als $U_{s^\frown 0}, U_{s^\frown 1}$ hinreichend kleine disjunkte Umgebungen dieser Punkte, so daß auch noch deren Abschluß disjunkt ist.

Da der CANTOR-Raum $\mathcal{C}$ kompakt ist, ist auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig, so daß wir wirklich von einer *Einbettung* sprechen können:

> Jeder perfekte Polnische Raum enthält eine topologische Kopie des CANTOR-Raumes $\mathcal{C}$.

In obigem Ergebnis kann man $\mathcal{C}$ durch $\mathcal{N}$ ersetzen, da sich $\mathcal{N}$ in $\mathcal{C}$ topologisch einbetten läßt: Dazu definiere man zunächst eine Abbildung

$$\varphi : \omega^{<\omega} \to 2^{<\omega}$$

durch

$$\begin{aligned} \varphi(\emptyset) &= \emptyset \\ \varphi(s^\frown n) &= \varphi(s)^\frown(0,\dots,0,1) \text{ (n-viele Nullen)}, \end{aligned}$$

z. B.: $\varphi((2,0,5)) = (0,0,1,1,0,0,0,0,0,1)$. Damit erhält man dann eine Einbettung

$$f : \mathcal{N} \to \mathcal{C} \text{ durch } f(x) = \bigcup_{n<\omega} \varphi(x \restriction n),$$

deren Wertebereich die G_δ-Menge $\{x \in C \mid x(n) = 1 \text{ für unendlich-viele } n\}$ ist.

Insbesondere lassen sich alle perfekten polnischen Räume bijektiv auf die reellen Zahlen abbilden, haben also dieselbe dieselbe Kardinalzahl wie $\mathbb{R}$, welche auch mit $2^{\aleph_0}$ bezeichnet wird.

Wir wollen jetzt die verstärkte Fassung von 4.5 beweisen. Entsprechend dem Übergang von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{N}$ benutzen wir statt eines CANTOR-Schemas ein entsprechendes LUSIN-**Schema**, d. h. eine Folge $(F_s | s \in \mathbb{N}^{<\omega})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $s \subseteq t \to F_s \supseteq F_t$.

(iv) $t \in \mathbb{N}^{<\omega} \to F_{t^\frown 0} \cap F_{t^\frown 1} = \emptyset$.

Besitzt es die zusätzliche Eigenschaft

(iii) $d(F_{x\restriction n}) \to 0$ für $n \to \infty$,

so kann man wie oben auf der Menge

$$D := \{x \in \mathcal{N} \mid \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x\restriction n} \neq \emptyset\}$$

die zugehörige Abbildung $f : D \to \mathcal{M}$ definieren durch

$$\{f(x)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x\restriction n}$$

und erhält eine injektive und stetige Abbildung $f : D \to \mathcal{M}$.

In der Situation von 4.5 definieren wir ein solches LUSIN-Schema, so daß

(a) $F_\emptyset = M$,

(b) F_s ist F_σ-Menge,

(c) $d(F_s) \leq 1/2^{|s|}$,

(d) $F_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_{s^\frown i} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{F_{s^\frown i}}$.

Dazu müssen wir zeigen, daß jede F_σ-Menge $F \subseteq M$ sich für jedes $\varepsilon > 0$ schreiben läßt in der Form $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$, wobei die F_i paarweise disjunkte F_σ-Mengen vom Durchmesser $< \varepsilon$ und mit der Eigenschaft $\overline{F_i} \subseteq F$:

Sei also $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$, wobei alle C_i abgeschlossen sind und wir annehmen können, daß $C_i \subseteq C_{i+1}$. Dann ist $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(C_{i+1} - C_i$. Nun ist wiederum $C_{i+1} - C_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j^{(i)}$ mit paarweise disjunkten F_σ-Mengen $E_j^{(i)}$ vom Durchmesser $< \varepsilon$. Also erhalten wir

$$F = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} E_j^{(i)} \quad \text{und} \quad \overline{E_j^{(i)}} \subseteq \overline{C_{i+1} - C_i} \subseteq C_{i+1} \subseteq F.$$

Die zu diesem LUSIN-Schema gehörige Abbildung f hat wegen (a) und (d) als Bild M; ihr Definitionsbereich D ist offenbar abgeschlossen. Somit haben wir eine abgeschlossene Teilmenge $D \subseteq \mathcal{N}$ und eine stetige Bijektion $f : D \to M$. Da F ein Retrakt von $\mathcal{N}$ ist, läßt sich f zu einer stetigen Abbildung $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow M$ fortsetzen (siehe den Satz am Schluß von 4.2).

4.7 Der Satz von Cantor-Bendixson

Den Begriff des *perfekten* Raumes hatten wir schon erklärt; um auch von perfekten Teilmengen sprechen zu können, ergänzen wir einige **Definitionen:**

M sei Teilmenge eines topologischen Raumes X, $a \in X$.

1. a ist **Berührpunkt** von $M :\leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ U_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$,
2. a ist **Häufungspunkt** von $M :\leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ U_\varepsilon(a) \cap M$ unendlich,
3. a ist **Kondensationspunkt** von $M :\leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ U_\varepsilon(a) \cap M$ überabzählbar.
4. Die **Ableitung** von M ist $M' := \{x \in X \mid x \text{ Häufungspunkt von } M\}$.

Für einen *Berührpunkt* a einer Menge M enthält also jede Umgebung des Punktes a mindestens einen Punkt von M, insbesondere sind alle Punkte von M selbst Berührpunkte, aber auch die Endpunkte eines offenen Intervalls sind Berührpunkte.

Für einen *Häufungspunkt* reicht es aus, wenn in jeder Umgebung mindestens *ein* weiterer Punkt von M liegt. (Punkte, die nicht Häufungspunkte sind, heißen **isolierte** Punkte.) Der Grenzwert 0 der Folge $1, 1/2, 1/3 \ldots$ ist Häufungspunkt, aber kein Kondensationspunkt der Menge der Folgenglieder, während Endpunkte eines Intervalls *Kondensationspunkte* sind.

Die *Ableitung* M' entsteht aus M, indem man einerseits die isolierten Punkte wegläßt und andererseits die Ränder von M hinzunimmt.

Offensichtlich ist

$$M^- = \{x \in X \mid x \text{ Berührpunkt von } M\} = M \cup M'$$

die abgeschlossene Hülle von M und

$$M \text{ abgeschlossen } \leftrightarrow M = M^- \leftrightarrow M' \subseteq M.$$

5. M **perfekt**: $\leftrightarrow M = M'$.

Perfekte Mengen enthalten also ihre Häufungspunkte und haben keine isolierten Punkte, die einfachsten perfekten Mengen sind die abgeschlossenen Intervalle, während eine konvergente Folge zusammen mit ihrem Grenzwert zwar abgeschlossen, nicht aber perfekt ist. Eine weniger triviale perfekte Menge ist die das CANTORsche Diskontinuum. Nach 4.6 hat jede nicht-leere perfekte Menge die Mächtigkeit des Kontinuums.

Satz

X sei ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis $\mathcal{B}$ für die offenen Mengen, $A \subseteq X$, D sei die Menge der Kondensationspunkte von A. Dann gilt:

(i) $D \subseteq A^-$,

(ii) *D ist abgeschlossen,*

(iii) *$A - D$ ist abzählbar,*

(iv) *D ist perfekt.*

Beweis: Die ersten beiden Aussagen sind klar.

ad (iii): Nach Definition von D gibt es zu jedem $x \in A - D$ eine Umgebung V_x von x mit $V_x \cap A$ abzählbar, wobei man $V_x \in \mathcal{B}$ wählen kann. Es ist also

$$A - D \subseteq \bigcup_{x \in A - D} V_x \cap A$$

als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar.

ad (iv): Es sei $y \in D, V$ eine Umgebung von y. Dann ist

$$V \cap A \text{ überabzählbar und } = (V \cap (A - D)) \cup (V \cap (D \cap A)),$$

wobei $A - D$ abzählbar, also $V \cap (D \cap A)$ überabzählbar, insbesondere mehr als einen Punkt enthalten muß. Also ist y kein isolierter Punkt von D. □

Daraus erhalten wir nun den

Satz von Cantor-Bendixson

X sei ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis für die offenen Mengen. Dann besitzt jede abgeschlossene Menge $F \subseteq X$ eine Zerlegung

$$F = P \cup A \text{ mit } P \text{ perfekt, } A \text{ abgeschlossen.}$$

(Im Falle eines Polnischen Raumes ist diese Zerlegung sogar eindeutig.) Insbesondere ist jede abgeschlossene Menge eines Polnischen Raumes abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Kapitel 5

Die Borel-Mengen endlicher Ordnung

5.1 Produkträume

Im folgenden werden wir uns mit den reellen Räumen und ihren endlichen Produkten beschäftigen und ihre einfachsten Teilmengen untersuchen:

$\mathcal{F}$ sei eine Menge von metrischen Räumen mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{F}$ enthalte $\mathbb{N} = \omega$ sowie die reellen Räume $\mathbb{R}$, $\mathcal{N}$ und $\mathcal{C}$, und
2. jeder Raum in $\mathcal{F}$ - außer $\mathbb{N}$ - sei ein perfekter Polnischer Raum.

Räume in $\mathcal{F}$ nennen wir **Basis-Räume**, bezeichnet mit $X, X_1, \ldots, Y, \ldots$.

Weiterhin werden wir endliche Produkte dieser Räume zulassen (**Produkträume**), bezeichnet mit $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \ldots$ und versehen mit Produktmetrik und Produkttopologie. Dabei ist für zwei metrische Räume (X_1, d_1) und (X_2, d_2) die **Produktmetrik** auf $X = X_1 \times X_2$ definiert durch

$$d(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$$

(ähnlich für endliche Produkte) und die **Produkttopologie** der Räume $(X_i, \mathcal{T}_i), i = 1, \ldots, n$ durch

$$\mathcal{T} = \{(O_1 \times \ldots O_n | O_1 \in \mathcal{T}_1. \wedge \ldots \wedge O_n \in \mathcal{T}_n\}.$$

Elemente der Produkträume heißen	**Punkte**, bezeichnet mit $x, y, \ldots$,
Teilmengen der Produkträume heißen	**Punktmengen**, bezeichnet mit $P, Q, \ldots$,
Mengen von Punktmengen heißen	**Punktklassen**, bezeichnet mit $\Lambda, \ldots$

Je nach Zweckmäßigkeit fassen wir Punktmengen auch als Relationen auf und umgekehrt, d. h. $P(x,\ldots)$ bedeutet dasselbe wie $(x,\ldots) \in P$.

Bemerkungen

1. Ist $\mathbf{X}$ ein endliches Produkt der Räume $\mathbb{N}$ und $\mathcal{N}$ und kommt $\mathcal{N}$ mindestens einmal als Faktor vor, so ist $\mathbf{X} \cong \mathcal{N}$ (d. h. $\mathbf{X}$ *homöomorph zu* $\mathcal{N}$).
   (Hinweis: Zeige $\mathcal{N} \times \omega \cong \mathcal{N}$ und $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \cong \mathcal{N}$.)

2. Ist $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \ldots \times \mathbf{X}_n$ ein Produktraum und mindestens ein Faktor $\mathbf{X}_i$ von $\mathbb{N}$ verschieden, so ist $\mathbf{X}$ ein perfekter Polnischer Raum.

5.2 Operationen auf Punktmengen und -Klassen

Für eine Punktmenge $P \subseteq \mathbf{X}$ sei

$$\neg P := \mathbf{X} - P \quad \text{das } \textbf{Komplement} \text{ von } P \text{ (bzgl. } \mathbf{X}\text{)},$$

für eine Punktklasse Λ sei

$$\neg\Lambda := \{\neg P \mid P \in \Lambda\} \quad \text{die zu } \Lambda \textbf{ duale} \text{ Punktklasse.}$$

Für $P \subseteq \mathbf{X} \times \omega$ sei

$$\begin{aligned} \exists^\omega P :&= \{x \in \mathbf{X} \mid \exists n \in \omega\, P(x,n)\} && \text{die } \textbf{Projektion} \text{ von } P \text{ entlang } \omega, \\ \forall^\omega P :&= \{x \in \mathbf{X} \mid \forall n \in \omega\, P(x,n)\} && \text{die dazu duale Operation.} \end{aligned}$$

Die entsprechenden Operationen auf Punktklassen sind

$$\begin{aligned} \exists^\omega \Lambda : &= \{\exists^\omega P \mid P \in \Lambda,\, P \subseteq \mathbf{X} \times \omega\}, \\ \forall^\omega \Lambda : &= \{\forall^\omega P \mid P \in \Lambda,\, P \subseteq \mathbf{X} \times \omega\}, \end{aligned}$$

und den beschränkten Quantoren entsprechen die Operationen

$$\begin{aligned} \exists^{\leq} P : &= \{(x,n) \in \mathbf{X} \times \omega \mid \exists m \leq n\, P(x,m)\} \\ \forall^{\leq} P : &= \{(x,n) \in \mathbf{X} \times \omega \mid \forall m \leq n\, P(x,m)\}, \end{aligned}$$

welche wieder Punktmengen von $\mathbf{X} \times \omega$ liefern.

Die **Borelschen Punktklassen endlicher Ordnung** werden definiert durch[1]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}_1^0 &= \text{ Klasse der offenen Punktmengen} \\
\mathbf{\Sigma}_{n+1}^0 &= \exists^\omega \neg\, \mathbf{\Sigma}_n^0 = \exists^\omega \Pi_n^0, \text{ wobei } \mathbf{\Pi}_n^0 = \neg\, \mathbf{\Sigma}_n^0 \\
\mathbf{\Delta}_n^0 : &= \mathbf{\Sigma}_n^0 \cap \mathbf{\Pi}_n^0 .
\end{aligned}$$

Somit gilt insbesondere:

$$\begin{gathered}
\mathbf{\Delta}_1^0 = \text{ offen-abgeschlossene Mengen} \\
\mathbf{\Sigma}_1^0 = \text{ offene Mengen,} \qquad \mathbf{\Sigma}_1^0 = \text{ abgeschlossene Mengen} \\
\mathbf{\Delta}_2^0 = F_\sigma \cap G_\delta \\
\mathbf{\Sigma}_2^0 = F_\sigma \text{ -Mengen,} \qquad \mathbf{\Pi}_2^0 = G_\delta\text{-Mengen,} \\
\mathbf{\Delta}_3^0 = G_{\delta\sigma} \cap F_{\sigma\delta} \\
\mathbf{\Sigma}_3^0 = G_{\delta\sigma} \text{ -Mengen,} \qquad \mathbf{\Pi}_3^0 = F_{\sigma\delta}\text{-Mengen,} \\
\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Hieraus läßt sich ablesen, daß jede Menge der oberen Klasse auch Element der darunterstehenden Klasse ist, was auch aus der Beschreibung der Elemente dieser Klassen durch logische Komplexität folgt (die sich außerdem gut zur Verallgemeinerung auf andere Strukturen eignet):

5.3 Normalformen

a) **Allgemeiner Fall:** Für $P \subseteq \mathbf{X}$ gilt:

$$\begin{aligned}
P \in \mathbf{\Sigma}_1^0 &\leftrightarrow P \text{ offen in } \mathbf{X} \\
P \in \mathbf{\Sigma}_2^0 &\leftrightarrow \forall x \in \mathbf{X}\, [P(x) \leftrightarrow \exists k\, F(x,k)] \text{ für ein abgeschlossenes } F \subseteq \mathbf{X} \times \omega \\
P \in \mathbf{\Pi}_2^0 &\leftrightarrow \forall x \in \mathbf{X}\, [P(x) \leftrightarrow \forall k\, G(x,k)] \text{ für ein offenes } G \subseteq \mathbf{X} \times \omega \\
P \in \mathbf{\Sigma}_3^0 &\leftrightarrow \forall x \in \mathbf{X}\, [P(x) \leftrightarrow \exists k\, \forall m\, G(x,k,m)] \text{ für ein offenes } F \subseteq \mathbf{X} \times \omega \\
\ldots &\quad \ldots
\end{aligned}$$

[1] Zur Unterscheidung von den entsprechenden Klassen der arithmetischen Hierarchie werden diese Klassen mit fettgedruckten Symbolen (boldface) bezeichnet.

allgemein für *ungerades* $n \geq 3$:

$$\boxed{P \in \mathbf{\Sigma}^0_n \leftrightarrow \forall x \in \mathbf{X}\, [P(x) \leftrightarrow \exists k_1\, \forall k_2 \ldots \forall k_{n-1}\, G(x,k_1,\ldots,k_{n-1})]}$$

für ein offenes $G \subseteq \mathbf{X} \times \omega \times \ldots \times \omega$. Ebenso für *gerades* $n \geq 2$:

$$\boxed{P \in \mathbf{\Sigma}^0_n \leftrightarrow \forall x \in \mathbf{X}\, [P(x) \leftrightarrow \exists k_1\, \forall k_2 \ldots \exists k_{n-1}\, F(x,k_1,\ldots,k_{n-1})]}$$

für ein abgeschlossenes $F \subseteq \mathbf{X} \times \omega \times \ldots \times \omega$. (Ähnlich im dualen Fall $P \in \mathbf{\Pi}^0_n$.)

Im Falle der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind die offen-abgeschlossenen Mengen nur $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ selbst, also uninteressant. Anders jedoch im Falle des BAIRE-Raumes $\mathcal{N}$: Hier sind die Basisumgebungen offen-abgeschlossen und somit jede offene (abgeschlossene) Menge abzählbare Vereinigung (Durchschnitt) offen-abgeschlossener Mengen. Dieses ist der wichtigste Fall, auf den die Bezeichnungsweise abgestimmt ist:

b) **Standardfall**

Für Mengen $P \subseteq \mathbf{X}$ eines Produktraumes $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \ldots \times \mathbf{X}_n$, alle $\mathbf{X}_i = \mathbb{N}$ oder $\mathcal{N}$, aber mindestens ein $\mathbf{X}_i \neq \mathbb{N}$, erhält man die folgenden Normalformen:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} P \in \mathbf{\Sigma}^0_n & \leftrightarrow & \forall x \in \mathbf{X}\, [P(x) \leftrightarrow \exists k_1\, \forall k_2 \ldots Q k_n\, R(x,k_1,\ldots,k_n)] \\ P \in \mathbf{\Pi}^0_n & \leftrightarrow & \forall x \in \mathbf{X}\, [P(x) \leftrightarrow \forall k_1\, \exists k_2 \ldots Q k_n\, R(x,k_1,\ldots,k_n)] \end{array}}$$

wobei R offen-abgeschlossen ist. Die vor der Relation R stehende Quantorenfolge nennt man das **Präfix** der Formel; Q steht für $\exists$ bzw. $\forall$, das Präfix besteht hier also aus n abwechselnden Quantoren. Das bedeutet:

P ist eine $\mathbf{\Sigma}^0_n$-Menge gdw P sich definieren läßt durch eine Formel, die aus einer offen-abgeschlossenen Relation durch Hinzufügen von n Quantoren entsteht, wobei die Quantoren mit $\exists$ beginnen und sich dann abwechseln.

Entsprechend ist eine $\mathbf{\Pi}^0_n$-Menge definiert, nur daß in diesem Fall die Quantorenfolge mit dem $\forall$-Quantor beginnt.

Formeln kann man durch Hinzufügen von neuen Variablen und "überflüssigen" Quantoren künstlich komplizierter machen. Da außerdem gilt: Ist die Relation $R(x,k_1,k_2,\ldots)$ offen bzw. abgeschlossen und R' definiert durch

$$R'(x,k_0,k_1,k_2,\ldots) \leftrightarrow R(x,k_1,k_2,\ldots),$$

so ist auch R' offen bzw. abgeschlossen, so folgt hieraus:

5.4 Hierarchiesatz - schwache Form

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_n \subseteq \boldsymbol{\Pi}^0_{n+1} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\Pi}^0_n \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1}\,.$$

In einem metrischen Raum ist jede offene Menge eine F_σ- und jede abgeschlossene Menge eine G_δ-Menge, also ist

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_1 \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_2 \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\Pi}^0_1 \subseteq \boldsymbol{\Pi}^0_2,$$

was sich durch Induktion verallgemeinern läßt, so daß wir folgendes Bild erhalten:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \boldsymbol{\Sigma}^0_1 & & & & \boldsymbol{\Sigma}^0_2 & & & & \boldsymbol{\Sigma}^0_3 & & \\
 & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & \\
\boldsymbol{\Delta}^0_1 & & & & \boldsymbol{\Delta}^0_2 & & & & \boldsymbol{\Delta}^0_3 & & & & \cdots \\
 & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & \\
 & & \boldsymbol{\Pi}^0_1 & & & & \boldsymbol{\Pi}^0_2 & & & & \boldsymbol{\Pi}^0_3 & &
\end{array}$$

Wir werden später sehen, daß für perfekte Produkträume diese Hierarchie echt aufsteigend ist.

5.5 Abschlußeigenschaften

1. Eine Punktklasse Λ ist **abgeschlossen** unter einer k-stelligen Operation Φ gdw gilt:

$$\Phi(P_1,\ldots,P_k) \textit{ ist definiert und } P_1,\ldots,P_k \in \Lambda \rightarrow \Phi(P_1,\ldots,P_k) \in \Lambda.$$

2. Eine Punktklasse Λ ist **abgeschlossen unter stetigen Urbildern (Substitutionen)** gdw für alle stetigen $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ gilt:

$$\begin{gathered} P \subseteq Y \ \wedge\ P \in \Lambda \rightarrow f^{-1}[P] \in \Lambda, \quad \text{d. h.} \\ P \subseteq Y \ \wedge\ P \in \Lambda \rightarrow \{x \in \mathbf{X} | P(f(x))\} \in \Lambda. \end{gathered}$$

Dabei ist $f^{-1}[P] := \{x \in \mathbf{X} | f(x) \in P\}$ das Urbild von P unter f, also

$$x \in f^{-1}[P] \leftrightarrow P(f(x)).$$

Der Abschluß unter stetigen Substitutionen erlaubt es insbesondere, Variablen in Relationen zu vertauschen oder zu identifizieren, allgemeiner:

Bemerkung

Ist Λ abgeschlossen unter stetigen Substitutionen, sind $f_1 : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}_1, \ldots, f_m : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}_m$ stetige Abbildungen, $Q \in \Lambda, Q \subseteq \mathbf{Y}_1 \times \ldots \times \mathbf{Y}_m$, und ist

$$P(x) \leftrightarrow Q(f_1(x), \ldots, f_m(x)),$$

so ist auch $P \in \Lambda$.

Satz

Jede der BOREL*schen Punktklassen*

(i) $\mathbf{\Sigma}^0_n$ *ist abgeschlossen unter stetigen Substitutionen,* $\cap, \cup, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}$ und $\exists^{\omega}$,

(ii) $\mathbf{\Pi}^0_n$ *ist abgeschlossen unter stetigen Substitutionen,* $\cap, \cup, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}$ und $\forall^{\omega}$,

(iii) $\mathbf{\Delta}^0_n$ *ist abgeschlossen unter stetigen Substitutionen,* $\neg, \cap, \cup, \exists^{\leq}$ und $\forall^{\leq}$.

Beweis: Es genügt, die erste Behauptung zu beweisen, aus welcher die anderen folgen. Den Abschluß unter stetiger Substitution beweist man leicht durch Induktion über n; für die restliche Behauptung benutzen wir die Methoden der *Kodierung* sowie *logische Umformungen*. $\square$

Kodierung endlicher Folgen natürlicher Zahlen

Es sei $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7, p_4 = 11 \ldots$ die Aufzählung der Primzahlen. Damit setzen wir

$$< s >= \begin{cases} 1 & \text{falls } s = \emptyset \text{ die leere Folge ist,} \\ p_0^{s_0+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n+1} & \text{falls } s = (s_0, \ldots, s_n). \end{cases}$$

Dadurch wird jeder endlichen Folge natürlicher Zahlen eindeutig eine natürliche Zahl zugeordnet. Umgekehrt sei

$$(k)_i = \begin{cases} s_i & \text{falls } k =< s > \text{ für eine endlichen Folge } s = (s_0, \ldots, s_{n-1}) \text{ ist} \\ & \text{ und } i < n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiele: $(2^5 \cdot 3^3)_0 = 4, (2^5 \cdot 3^3)_1 = 2$, aber $(10)_i = 0$ für alle i, da $10 = 2 \cdot 5$ keine endliche Folge kodiert (es fehlt eine Potenz von 3).

5.6 Präfix-Umformungen

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x P(x) &\leftrightarrow \forall x \neg P(x) \\
\neg\forall x P(x) &\leftrightarrow \exists x \neg P(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists x P(x) \vee \exists y R(y) &\leftrightarrow \exists u\,(P(u) \vee R(u)) \\
\exists x P(x) \wedge \exists y R(y) &\leftrightarrow \exists x \exists y\,(P(x) \wedge R(y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall x P(x) \wedge \forall y R(y) &\leftrightarrow \forall u\,(P(u) \wedge R(u)) \\
\forall x P(x) \vee \forall y R(y) &\leftrightarrow \forall x \forall y\,(P(x) \vee R(y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists n \exists m P(n,m) &\leftrightarrow \exists k P((k)_0,(k)_1) \\
\forall n \forall m P(n,m) &\leftrightarrow \forall k P((k)_0,(k)_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall m \leq n \exists k\, P(m,k) &\leftrightarrow \exists k \forall m \leq n\, P(m,(k)_m) \\
\exists m \leq n \forall k\, P(m,k) &\leftrightarrow \forall k \exists m \leq n\, P(m,(k)_m)
\end{aligned}
$$

Die ersten 3 Paare von Äquivalenzen gelten allein aufgrund logischer Gesetze, die letzten beiden nur für Quantoren über natürliche Zahlen (bzw. nur mit geeigneter Kodierungsmöglichkeit).

Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige reelle Funktion. Dann sind die Relationen

$$
\begin{aligned}
R(x) &\leftrightarrow f'(x) \text{ existiert} \\
P(x,y) &\leftrightarrow f'(x) = y
\end{aligned}
$$

$F_{\sigma\delta} = \mathbf{\Pi}^0_3$-Mengen.

5.7 Uniformisierung, Reduktion und Separation

Es sei $P \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Wir definieren:

1. $\exists^{\mathbf{Y}} P := \{x \in \mathbf{X} \mid \exists y \in \mathbf{Y}\ P(x,y)\}$ heißt **Projektion von P längs $\mathbf{Y}$**.

2. P^* **uniformisiert** $P :\leftrightarrow P^* \subseteq P \wedge \forall x \in \mathbf{X}\, [\exists y\, P(x,y) \rightarrow \exists! y\, P^*(x,y)]$

   d. h. P^* ist Funktion mit Definitionsbereich $\exists^{\mathbf{Y}} P$ und wählt für jedes $x \in \mathbf{X}$ aus der Menge $P_x = \{y \mid P(x,y)\}$ genau ein Element aus.

Nach dem Auswahlaxiom existiert immer ein solches P^*; wichtig ist die Frage, ob es immer ein P^* gibt, welches "nicht viel komplizierter" als P ist.

Uniformisierungs-Satz

Für $n > 1$ hat $\mathbf{\Sigma}^0_n$ *die* **Uniformisierungseigenschaft**, d. h.

$$P \subseteq \mathbf{X} \times \omega \wedge P \in \mathbf{\Sigma}^0_n \rightarrow \exists P^* \in \mathbf{\Sigma}^0_n\, (P^* \text{uniformisiert } P).$$

Beweis: Es sei $P(x,m) \leftrightarrow \exists i\, Q(x,m,i)$ mit $Q \in \mathbf{\Pi}^0_{n-1}$. Setze

$$\begin{aligned} R(x,k) : &\leftrightarrow Q(x,(k)_0,(k)_1) \wedge \forall l < k\, \neg Q(x,(l)_0,(l)_1), \\ P^*(x,m) : &\leftrightarrow \exists i\, R(x, 2^{m+1} \cdot 3^{i+1}). \end{aligned}$$

□

Es seien $P, Q \subseteq \mathbf{X}$. Wir definieren: (P^*, Q^*) **reduziert** (P,Q) :

$$\leftrightarrow P^* \subseteq P \wedge Q^* \subseteq Q \text{ mit } P \cup Q = P^* \cup Q^* \wedge P^* \cap Q^* = \emptyset.$$

In diesem Fall werden also die gemeinsamen Punkte von P und Q auf eine dieser Mengen verteilt. Jedes Paar $P, Q)$ läßt sich einfach reduzieren, indem man $P^* = P - Q$ und $Q^* = Q$ (oder umgekehrt) setzt. Wichtig ist jedoch zu wissen, ob man $P \cup Q$ durch ein Paar gleicher Komplexität reduzieren kann:

Reduktions-Satz

Für $n > 1$ hat $\mathbf{\Sigma}^0_n$ *die* **Reduktionseigenschaft**, d. h.

$$P, Q \subseteq \mathbf{X} \wedge P, Q \in \mathbf{\Sigma}^0_n \rightarrow \exists P^*, Q^* \in \mathbf{\Sigma}^0_n\, (P^*, Q^*) \text{ reduziert } (P,Q).$$

Beweis: Uniformisiere die Relation

$$R(x,m) :\leftrightarrow (P(x) \wedge m = 0) \vee (Q(x) \wedge m = 1),$$

welche ebenfalls in $\mathbf{\Sigma}^0_n$ ist, falls dies für P und Q zutrifft. □

3. Für $P, Q \subseteq \mathbf{X}, P \cap Q = \emptyset$ gilt:
   Eine Menge $S \subseteq \mathbf{X}$ **separiert** P von $Q :\leftrightarrow P \subseteq S \wedge S \cap Q = \emptyset$.

Natürlich werden disjunkte Mengen P, Q stets von P wie auch $\neg Q$ separiert. Wichtiger ist hier der Fall, wo eine einfachere separierende Menge existiert:

Separierungs-Satz

Für $n > 1$ hat $\mathbf{\Pi}^0_n$ *die* **Separierungseigenschaft**, d. h.

$$P, Q \subseteq \mathbf{X} \wedge P \cap Q = \emptyset \wedge P, Q \in \mathbf{\Pi}^0_n \rightarrow \exists S \in \mathbf{\Delta}^0_n \; (S \text{ separiert } P \text{ von } Q).$$

Hinweis: Um P von Q zu separieren, reduziert man die Komplementmengen $\neg P, \neg Q$.

5.8 Parametrisierung

Eine I-**Parametrisierung** einer Menge S ist eine Abbildung $I \twoheadrightarrow S$. In diesem Fall gilt also $S = \{s_i \mid i \in I\}$ für eine Folge $(s_i)_{i \in I}$, d. h. die Elemente von S lassen sich mit Hilfe der Elemente von I aufzählen (möglicherweise mit Wiederholungen).

Für eine Punktklasse Γ sei $\Gamma(\mathbf{X}) := \{P \subseteq \mathbf{X} \mid P \in \Gamma\}$ die **Einschränkung** von Γ auf den Raum $\mathbf{X}$.

Eine Punktmenge $G \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ heißt **universell** für $\Gamma(\mathbf{X})$ gdw

- $G \in \Gamma$ und
- $\Gamma(\mathbf{X}) = \{G_y \mid y \in Y\}$, wobei $Gy := \{x \in \mathbf{X} \mid G(y, x)\}$.

Somit gilt: G ist in Γ und die Abbildung

$$y \mapsto Gy = \{x \in \mathbf{X} \mid G(y, x)\} \text{ für } y \in \mathbf{Y}$$

ist eine $\mathbf{Y}$-Parametrisierung von $\Gamma(\mathbf{X})$, d. h. für jedes $P \subseteq \mathbf{X}$ gilt:

$$P \in \Gamma \leftrightarrow P = G_y \text{ für ein } y \in \mathbf{Y}.$$

In diesem Fall zählen also die Mengen $\{x \in \mathbf{X} \mid G(y, x)\}$ alle $P \in \Gamma$ mit $P \subseteq \mathbf{X}$ mittels der Punkte $y \in \mathbf{Y}$ auf.

Eine Punktklasse Γ ist $\mathbf{Y}$-**parametrisierbar** gdw es für jeden Produktraum $\mathbf{X}$ ein $G \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ gibt, welches universell für $\Gamma(\mathbf{X})$ ist.

Satz

Die $\mathbf{\Sigma}^0_1$-Mengen sind $\mathcal{N}$-parametrisierbar.

Beweis: Es sei $U_0, U_1, \ldots$ eine Aufzählung einer Basis für die Topologie eines Produktraumes $\mathbf{X}$. Dann definiert die Relation

$$O(t,x) :\leftrightarrow \exists n\, x \in U_{t(n)}$$

eine offene Menge $O \subseteq \mathcal{N} \times \mathbf{X}$. Jede offene Menge P ist abzählbare Vereinigung von Basismengen, also für ein $t \in \mathcal{N}$

$$P = O_t = \bigcup_{n<\omega} U_{t(n)}.$$

$\square$

Tatsächlich sind alle BOREL-Klassen $\mathcal{N}$-parametrisierbar (und damit von der Mächtigkeit des Kontinuums). Allgemeiner gilt zunächst

Parametrisierungssatz für die offenen Mengen

Für jeden perfekten Raum $\mathbf{Y}$ ist die Punktklasse $\mathbf{\Sigma}^0_1$ der offenen Mengen $\mathbf{Y}$-parametrisierbar.

Beweis: $\mathbf{X}$ sei ein Produktraum und
$N_0, N_1, \ldots$ eine Aufzählung einer Basis für die Topologie von $\mathbf{Y}$ und
$U_0, U_1, \ldots$ eine Aufzählung einer Basis für die Topologie von $\mathbf{X}$.

Wie in obigem Beweis können wir die offenen Mengen auch $\mathcal{C}$-parametrisieren: jede offene Menge von $\mathbf{X}$ ist Vereinigung von abzählbar-vielen Basismengen, und statt die Indizes dieser abzählbar-vielen Mengen durch ein $t \in \mathcal{N}$ aufzuzählen, können wir sie durch eine binäre Folge $t \in \mathcal{C}$ kodieren:

$$G(y,x); \leftrightarrow \exists n\, (t(n) = 0 \wedge x \in U_n).$$

Ist nun allgemeiner $\mathbf{Y}$ ein perfekter Produktraum, so benutzen wir die Einbettung von $\mathcal{C}$ in den Raum $\mathbf{Y}$ (Lemma 4.6) und wählen wie dort eine Abbildung $\sigma : 2^{<\omega} \to \omega$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $N_{\sigma(u)} \neq \emptyset$,

(b) $u \leq v \to N^-_{\sigma(v)} \subseteq N_{\sigma(u)}$,

(c) *hat u die Länge n, so ist der Radius von* $N_{\sigma(u)} \leq 1/2^n$,

(d) $u|v \to N^-_{\sigma(u)} \cap N^-_{\sigma(v)} = \emptyset$,

wobei $u|v :\leftrightarrow u \not\leq v \wedge v \not\leq u$ (u ist mit v *unverträglich*).

Damit definieren wir eine Menge $G \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ durch

$$G(y,x); \leftrightarrow \exists u \in 2^{<\omega}(u = (u_0, \ldots, u_n) \wedge u_n = 0 \wedge y \in N_{\sigma(u)} \wedge x \in U_n).$$

Offenbar ist G offen und jeder Abschnitt G_y ist offen in $\mathbf{X}$. Es bleibt zu zeigen, daß auch umgekehrt jedes offene $P \subseteq \mathbf{X}$ ein G_y ist: Ein solches P ist Vereinigung von Basismengen:

$$x \in P \leftrightarrow \exists n(n \in A \wedge x \in U_n)$$

für eine Teilmenge $A \subseteq \omega$. Wählen wir die 0-1-Folge t mit

$$t_n = 0 \leftrightarrow n \in A$$

und für y_n das Zentrum von $N_{\sigma(t_0,\ldots,t_n)}$, so erhalten wir eine CAUCHY-Folge $(y_n)_{n<\omega}$, die also einen Limes y besitzt. Für diesen gilt nun aber:

$$G(y,x) \leftrightarrow x \in P.$$

□

Der Anfang war am schwierigsten, nun geht es leicht weiter:

Satz

Ist eine Punktklasse Γ $\mathbf{Y}$*-parametrisierbar, so auch* $\neg\Gamma$ *und* $\exists^{\mathbf{Z}}\Gamma$ *für jeden Produktraum* $\mathbf{Z}$.

Insbesondere sind alle BOREL*-Klassen* $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ *und* $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ $\mathbf{Y}$*-parametrisierbar für jeden perfekten Produktraum* $\mathbf{Y}$.

Beweis: Ist $G \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ universell für $\Gamma(\mathbf{X})$, so ist $\neg G$ universell für $\neg\Gamma(\mathbf{X})$.

Ist $G \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Z}$ universell für $\Gamma(\mathbf{X} \times \mathbf{Z})$, so ist H mit

$$H(y,x) :\leftrightarrow \exists z\, G(y,x,z)$$

universell für $\exists^{\mathbf{Z}}\Gamma(\mathbf{X})$. □

Diagonalisierungssatz

Γ *sei eine Punktklasse, so daß für jeden Produktraum* $\mathbf{X}$ *und jede Punktmenge* $P \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ *in* Γ *auch die Diagonale*

$$P' := \{x \mid P(x,x)\}$$

in Γ *ist. Dann gilt:*

Ist Γ $\mathbf{Y}$*-parametrisierbar, so gibt es ein* $P \subseteq \mathbf{Y}$ *mit* $P \in \Gamma$*, aber* $P \notin \neg\Gamma$.

Beweis: Es sei $G \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Y}$ universell für $\Gamma(\mathbf{Y})$. Setze $P := \{y \mid G(y,y)\}$. Dann ist nach Voraussetzung $P \in \Gamma$. Wäre auch $P \in \neg\Gamma$, so für ein $y' \in \mathbf{Y}$:

$$G(y',y) \leftrightarrow \neg P(y) \leftrightarrow \neg G(y,y)$$

für alle $y \in \mathbf{Y}$, was aber für $y = y'$ zum Widerspruch $G(y,y) \leftrightarrow \neg G(y,y)$ führt! $\square$

5.9 Hierarchiesatz für die Borel-Klassen endlicher Ordnung

I*st* $\mathbf{X}$ *ein perfekter Produktraum, so bilden die Borel-Klassen endlicher Ordnung eine echt aufsteigende Hierarchie:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \mathbf{\Sigma}^0_1(\mathbf{X}) & & & & \mathbf{\Sigma}^0_2(\mathbf{X}) & & & & \mathbf{\Sigma}^0_3(\mathbf{X}) & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \\
\mathbf{\Delta}^0_1(\mathbf{X}) & & & & \mathbf{\Delta}^0_2(\mathbf{X}) & & & & \mathbf{\Delta}^0_3(\mathbf{X}) & & & & \cdots \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \\
 & & \mathbf{\Pi}^0_1(\mathbf{X}) & & & & \mathbf{\Pi}^0_2(\mathbf{X}) & & & & \mathbf{\Pi}^0_3(\mathbf{X}) & &
\end{array}$$

Beweis: Es ist nur noch zu zeigen, daß die obigen Inklusionen echt sind: Da die BOREL-Klassen $\mathbf{X}$-parametrisierbar sind, so gibt es für jedes $n \geq 1$ nach dem Diagonalisierungslemma eine Menge $P \subseteq \mathbf{X}$ mit $P \in \mathbf{\Sigma}^0_n$, aber $P \notin \neg\mathbf{\Sigma}^0_n = \mathbf{\Pi}^0_n$, also ist

$$\mathbf{\Delta}^0_n \subset \mathbf{\Sigma}^0_n \quad \text{und ebenso} \quad \mathbf{\Delta}^0_n \subset \mathbf{\Pi}^0_n.$$

Wäre andererseits etwa $\mathbf{\Sigma}^0_n = \mathbf{\Delta}^0_{n+1}$, so wäre $\mathbf{\Sigma}^0_n$ abgeschlossen unter $\neg$, also $\mathbf{\Sigma}^0_n = \mathbf{\Pi}^0_n$ im Widerspruch zum Diagonalisierungslemma. $\square$

Kapitel 6

Borel-Mengen und -Funktionen

6.1 Die Borel-Mengen transfiniter Stufe

Die Punktklasse $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ der BOREL-**Mengen** eines topologischen Raumes $\mathbf{X}$ ist die kleinste Punktklasse von Teilmengen von $\mathbf{X}$, welche

(i) die offenen Mengen von $\mathbf{X}$ enthält und abgeschlossen ist unter

(ii) Komplementen und

(iii) abzählbaren Vereinigungen.

Die BOREL-Mengen von $\mathbf{X}$ bilden somit die kleinste σ-Algebra (siehe 2.3.3) von Teilmengen von $\mathbf{X}$, welche die offenen (und damit auch die abgeschlossenen) Mengen enthält (und auch unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen ist). Die Menge der BOREL-Mengen endlicher Stufe ist i. a. jedoch noch nicht unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen: Wählt man nach dem Hierarchiesatz 5.9 für jedes $n < \omega$ eine Menge $G_n \subseteq \mathcal{N}$ mit $G_n \in \mathbf{\Pi}^0_n - \mathbf{\Sigma}^0_n$, so ist für alle m

$$G := \bigcup_{n<\omega} \{(n,x) \mid x \in G_n\} \notin \mathbf{\Sigma}^0_m,$$

und damit ist $G \notin \bigcup_{n<\omega} \mathbf{\Sigma}^0_n$. Man muß nun erneut abzählbare Vereinigungen aus dieser Menge bilden, Komplemente, abzählbare Vereinigungen ...

Allgemeiner können wir folgende Situation betrachten:
Es sei $A \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, die A als Teilmenge enthält, und

$$\sigma(A,X) = \text{ die kleinste } \sigma\text{-Algebra } M \text{ auf } X \text{ mit } A \subseteq M$$

(die von A **erzeugte** σ-Algebra) kann man einfach “von oben” definieren als

$$\sigma(A,X) = \bigcap\{M \mid M\ \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ mit } A \subseteq M\}.$$

Mehr Informationen liefert eine stufenweise Definition “von unten”: Es sei

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(A,X) &= A, \\
\Pi_\alpha(A,X) &= \neg\Sigma_\alpha(A,X), \quad \text{und für } \alpha > 1: \\
\Sigma_\alpha(A,X) &= \{\bigcup_{n<\omega} A_n \mid \forall n < \omega\, A_n \in \bigcup_{\xi<\alpha} (\Sigma_\xi(A,X) \cup \Pi_\xi(A,X))\}, \\
&= (\bigcup_{\xi<\alpha} (\Sigma_\xi(A,X) \cup \Pi_\xi(A,X)))_\sigma, \\
\Delta_\alpha(A,X) &= \Sigma_\alpha(A,X) \cap \Pi_\alpha(A,X).
\end{aligned}$$

Dann gilt:

Lemma

(i) $\Sigma_\alpha(A,X) \subseteq \Sigma_\beta(A,X)$ für $\alpha < \beta$,

(ii) $\Sigma_\alpha(A,X) \cup \Pi_\alpha(A,X) \subseteq \sigma(A,X)$,

(iii) $\sigma(A,X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha(A,X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi_\alpha(A,X)$.

Im Falle der Hierarchie der BOREL-Mengen eines topologischen Raumes $\mathbf{X}$ geht man aus von der Menge $\mathbf{G}$ der offenen Teilmengen von $\mathbf{X}$ und erhält die etwas vereinfachte Hierarchie:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}^0_1(\mathbf{X}) &= \mathbf{G}, \text{ und für } \alpha > 1: \\
\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathbf{X}) &= (\neg \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(\mathbf{X}))_\sigma, \\
\mathbf{\Pi}^0_\alpha(\mathbf{X}) &= \neg\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathbf{X}), \\
\mathbf{\Delta}^0_\alpha(\mathbf{X}) &= \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathbf{X}) \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha(\mathbf{X}), \text{ so daß} \\
\mathbf{B}(\mathbf{X}) &= \sigma(\mathbf{G},\mathbf{X})) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathbf{X}) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha(\mathbf{X}).
\end{aligned}$$

Mit $\mathbf{\Sigma}^0_1$, $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \ldots$ bezeichnet man die offenen, $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathbf{X})\ldots$-Mengen irgendeines Produktraumes $\mathbf{X}$; ebenso mit $\mathbf{B}$ die Klasse aller BOREL-Mengen. Die früheren Ergebnisse über die BOREL-Mengen endlicher Stufe (Abschlußeigenschaften 5.5, Uniformisierung, Reduktion und Separation 5.7 sowie Parametrisierung 5.8) übertragen sich leicht auf die BOREL-Mengen transfiniter Stufen, auch der Hierarchiesatz 5.9 gilt weiter.

6.2 Borel-Mengen als offen-abgeschlossene Mengen

In vielen Beweisen ist es zweckmäßig, die Topologie eines Polnischen Raumes so zu erweitern, daß eine vorgegebene BOREL-Menge zu einer offen-abgeschlossenen Menge wird, ohne daß sich die Gesamtheit der BOREL-Mengen ändert.

Definition

X und **Y** seien disjunkte topologische Räume. Die **disjunkte Vereinigung** von **X** mit **Y**, bezeichnet mit $\mathbf{X} \uplus \mathbf{Y}$, ist die Topologie auf $X \cup Y$, definiert durch

$$U \subseteq X \cup Y \text{ offen:} \leftrightarrow \; U \cap X \text{ und } U \cap Y \text{ sind offen.}$$

Lemma

(i) *Ist d eine Metrik eines Polnischen Raumes* **X**, *so gibt es eine Metrik $\hat{d}$ auf X, welche dieselbe Topologie erzeugt, mit $\hat{d} < 1$.*

(ii) *Ist* **X** *ein Polnischer Raum, $G \subseteq X$ offen, so ist auch G ein Polnischer Raum mit der Unterraum-Topologie.*

(iii) *Die disjunkte Vereinigung $\mathbf{X} \uplus \mathbf{Y}$ disjunkter Polnischer Räume $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ist ein Polnischer Raum mit X und Y als offen-abgeschlossenen Teilmengen.*

(iv) **X** *sei Polnischer Raum mit der Topologie $\mathcal{T}, F \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gibt es eine Verfeinerung $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$ der Topologie $\mathcal{T}$, so daß F bezüglich $\mathcal{T}'$ offen-abgeschlossen ist, während $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}$ dieselben* BOREL*-Mengen haben.*

Beweis: (i) Setze $\hat{d}(x,y) = d(x,y)/1 + d(x,y)$.

(ii) Wähle eine Metrik mit $d < 1$, welche die Topologie auf **X** erzeugt, und definiere auf G eine neue Metrik d_G durch

$$d_G(x,y) = d(x,y) + |1/d(x,X-G) - 1/d(y,X-G)|.$$

(iii) Auf $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ wähle man Metriken d_X, d_y mit $d_X < 1$ und $d_Y < 1$, die die ursprünglich gegebene Topologie erzeugen, und definiere eine Metrik d auf $X \cup Y$ durch

$$d(x,y) = \begin{cases} d_X(x,y) & \text{falls } x,y \in X, \\ d_Y(x,y) & \text{falls } x,y \in Y, \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann sind die offenen Mengen von $\mathbf{X} \uplus \mathbf{Y}$ Vereinigungen von offenen Mengen in $\mathbf{X}$ mit offenen Mengen in $\mathbf{Y}$, und die Elemente einer CAUCHY-Folge sind von einer Stelle ab ganz in X oder ganz in Y.

(iv) Ist F abgeschlossen, so ist F mit der Unterraum-Topologie wieder ein Polnischer Raum, ebenso ist nach (ii) die offene Menge $X - F$ ein Polnischer Raum (allerdings mit einer neuen Metrik.) Ist nun $\mathcal{T}'$ die Topologie auf X als disjunkter Vereinigung von $X - F$ mit F, so ist F offen-abgeschlossen in dieser Topologie. Die offenen Mengen von $\mathcal{T}'$ sind offen in $\mathcal{T}$ oder Durchschnitte offener Mengen von $\mathcal{T}$ mit F, insbesondere haben $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}$ dieselben BOREL-Mengen. □

Satz

$\mathbf{X}$ sei Polnischer Raum mit der Topologie $\mathcal{T}$, $B \subseteq X$ sei BOREL-Menge. Dann läßt sich die Topologie $\mathcal{T}$ zu einer Topologie $\mathcal{T}^*$ verfeinern, so daß B offen-abgeschlossen ist bezüglich $\mathcal{T}^*$, aber $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}^*$ dieselben BOREL-Mengen erzeugen.

Beweis: Es sei

$$\Omega := \{B \in X \mid B \text{ offen-abgeschlossen in einer Polnischen Topologie } \mathcal{T}^* \text{ auf } X, \\ \text{wobei } \mathcal{T}^* \text{ dieselben BOREL-Mengen besitzt wie } \mathcal{T}\}.$$

Nach obigem Lemma enthält Ω die offenen und die abgeschlossenen Mengen und ist unter Komplementen abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen, daß Ω auch unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen ist:

Es seien also $A_0, A_1, \ldots \in \Omega, B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\mathcal{T}_i$ sei Polnische Topologie auf $\mathbf{X}$, in welcher A_i offen-abgeschlossen ist und die dieselben BOREL-Mengen wie $\mathcal{T}$ besitzt. Das topologische Produkt $\prod_i (X, \mathcal{T}_i)$ ist ein Polnischer Raum.

$j : X \to \prod_i (X, \mathcal{T}_i)$ sei die Diagonalabbildung $j(x) = (x, x, \ldots)$ und $\mathcal{T}^*$ die Topologie auf X mit $\{j^{-1}[U] | U \text{ offen im Produkt}\}$ als offenen Mengen. Da $j[X]$ abgeschlossen ist, ist diese Topologie Polnisch. Als Subbasis für diese Topologie kann man die Urbilder der Mengen $\{f | \forall i \in \mathbb{N}\, f(i) \in O_i\}$ mit O_i offen in $\mathcal{T}_i$ wählen. Somit hat $\mathcal{T}^*$ eine Subbasis aus Mengen, welche in $\mathcal{T}$ BOREL-Mengen sind, insbesondere ist jede $\mathcal{T}^*$-BOREL-Menge auch eine $\mathcal{T}$-BOREL-Menge.

Da die A_i $\mathcal{T}_i$-offen-abgeschlossen sind, so auch in $\mathcal{T}^*$, und damit ist auch der Durchschnitt B zumindest abgeschlossen in $\mathcal{T}^*$. Aufgrund des obigen Lemmas kann man die Topologie weiter verfeinern, so daß B offen-abgeschlossen wird, ohne neue BOREL-Mengen hinzuzufügen. $\square$

Aus obigem Satz erhalten wir die

Perfekte-Mengen-Eigenschaft für die BOREL-Mengen

$\mathbf{X}$ *sei Polnischer Raum. Dann enthält jede überabzählbare* BOREL*-Menge eine perfekte Teilmenge.*

Beweis: $\mathcal{T}^*$ sei die Topologie auf $\mathbf{X}$ und $\mathcal{T}^*$ eine Verfeinerung, in welcher B offen-abgeschlossen ist. Ist B überabzählbar, so enthält sie als abgeschlossene Menge nach dem Satz von CANTOR-BENDIXSON eine perfekte Teilmenge $P \neq \emptyset$, und es gibt eine stetige bijektive Abbildung $f : \mathcal{C} \to P$. Da $\mathcal{T}^*$ eine Verfeinerung von $\mathcal{T}$ ist, so ist f auch in der Topologie $\mathcal{T}$ stetig, und da $\mathcal{C}$ kompakt ist, so ist P $\mathcal{T}$-abgeschlossen. Außerdem hat P keine isolierten Punkte in $\mathcal{T}^*$, also auch nicht in $\mathcal{T}$ und ist somit auch in der ursprünglichen Topologie perfekt. $\square$

Weiterhin erhalten wir einen einfachen Beweis von

Satz

Jede BOREL*-Menge eines Polnischen Raumes ist stetiges Bild von* $\mathcal{N}$.

Beweis: Ist B BOREL-Menge von $\mathbf{X}$, so erweitere die Topologie zu einer Polnischen Topologie $\mathcal{T}^*$, in welcher B abgeschlossen ist. Dann ist B mit der Unterraumtopologie ein Polnischer Raum und nach 4.5 gibt es eine stetige surjektive Abbildung $f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow B$. f ist auch bezüglich der alten Topologie stetig. $\square$

Dieses Ergebnis werden wir später verstärken.

6.3 Borel-Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ heißt BOREL-**meßbar** (oder einfach: BOREL) gdw

$$\forall Y \subseteq \mathbf{Y}\ (Y \text{ BOREL } \to f^{-1}[Y] \text{ BOREL in } \mathbf{X}).$$

Hierbei genügt es zu verlangen, daß das Urbild jeder offenen bzw. abgeschlossenen Menge wieder BOREL ist; hat $\mathbf{Y}$ eine abzählbare Basis, so braucht diese Bedingung sogar nur für die Basismengen erfüllt zu sein.

$f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ heißt BOREL-**Isomorphismus** gdw f bijektiv und sowohl f wie auch die inverse Funktion f^{-1} BOREL-meßbar sind.

Lemma

Die Klasse der BOREL*-Mengen* $\mathbf{B}$ *ist abgeschlossen unter* BOREL*scher Substitution; die* BOREL*-Funktionen sind abgeschlossen unter Komposition.*

In ähnlicher Weise, wie man eine BOREL-Menge in einer erweiterten Topologie zu einer offen-abgeschlossenen Mengen machen kann, kann man zeigen:

Satz

Ist $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *eine* BOREL*-meßbare Abbildung eines Polnischen Raumes in einen separablen Raum, so gibt es eine Verfeinerung der Topologie von* $\mathbf{X}$ *mit denselben* BOREL*-Mengen, so daß* f *bezüglich dieser Topologie stetig ist.*

Nach dem (später folgenden) Satz 6.4 von LUSIN-SOUSLIN ist jeder Polnische Raum durch eine BOREL-Injektion einbettbar in $\mathcal{N}$ und damit auch in $\mathcal{C}$. Umgekehrt gibt es nach 4.6 für einen überabzählbaren (und damit perfekten) Polnischen Raum eine stetige (und damit BOREL-) Einbettung in $\mathcal{C}$. Aus dem folgenden Satz ergibt sich somit, daß alle überabzählbaren Polnischen Räume BOREL-isomorph zu $\mathcal{C}$ und damit auch untereinander BOREL-isomorph sind:

Satz von Schröder-Bernstein für Borel-Einbettungen

Sind $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *Polnische Räume,* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *ein* BOREL*-Isomorphismus von* $\mathbf{X}$ *auf* $f[\mathbf{X}]$ *und ebenso* $g : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *ein* BOREL*-Isomorphismus von* $\mathbf{Y}$ *auf* $f[\mathbf{Y}]$*, so sind* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ BOREL*-isomorph.*

Beweis: Man kann den früheren Beweis von 3.5 direkt übertragen oder mit denselben Argumenten wie folgt argumentieren: Wir bilden die Mengen

$$\begin{aligned} X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \ldots \quad &\text{mit} \quad X_{n+1} = gf[X_n] \text{ und ebenso} \\ Y = X_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \ldots \quad &\text{mit} \quad Y_{n+1} = fgf[Y_n], \end{aligned}$$

wobei die X_n, Y_n BOREL-Mengen sind wie auch $X_\infty = \bigcup X_n$ und $Y_\infty = \bigcup Y_n$. Somit erhalten wir Bijektionen

$$f \restriction X_n - X_{n+1} : X_n - X_{n+1} \leftrightarrow Y_{n+1} - Y_{n+2}$$

und ähnlich für $g \restriction Y_n - Y_{n+1}$. Somit ist $f \restriction X_\infty : X_\infty \leftrightarrow Y_\infty$. Schließlich wird der gesuchte Isomorphismus definiert durch $h : X \to Y$ mit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ falls } x \in X_{2n} - X_{2n+1} \text{ für ein } n \text{ oder } x \in X_\infty, \\ g^{-1}(x) \text{ falls } x \in X_{2n+1} - X_{2n+2} \text{ für ein } n. \end{cases}$$

□

Korollar

Zwei Polnische Räume sind BOREL*-isomorph genau dann, wenn sie dieselbe Kardinalzahl haben.*

Der Satz 4.5 läßt sich nun verstärken zum

6.4 Satz von Lusin-Souslin

(i) $\mathbf{X}$ *sei Polnischer Raum,* $B \subseteq \mathbf{X}$ *sei eine* BORELsche *Teilmenge. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge* $F \subseteq \mathcal{N}$ *und eine stetige Bijektion* $f : F \leftrightarrow B$*. Ist* $B \neq \emptyset$*, so gibt es eine stetige Surjektion* $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow B$*, welche f fortsetzt.*

(ii) $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *seien Polnische Räume,* $B \subseteq \mathbf{X}$ *sei eine* BOREL*sche Menge,* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *sei stetig. Ist* $f \restriction B$ *injektiv, so ist auch das Bild* $f[B]$ BOREL.

(iii) $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *seien Polnische Räume,* $B \subseteq \mathbf{X}$ *sei eine* BOREL*sche Menge,* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *sei* BOREL*. Ist* $f \restriction B$ *injektiv, so ist auch das Bild* $f[B]$ BOREL *und f ist ein* BOREL*-Isomorphismus* $B \leftrightarrow f[B]$.

Beweis von (i): Erweitere die Topologie $\mathcal{T}$ zu einer Topologie $\mathcal{T}^*$, so daß B offen-abgeschlossen ist bezüglich $\mathcal{T}^*$. Nach 4.5 gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq \mathcal{N}$ und eine Bijektion $f : F \leftrightarrow B$, welche bezüglich $\mathcal{T}^*$ stetig ist. Dann ist aber f auch stetig bezüglich der gröberen Topologie $\mathcal{T}$.

(ii): Siehe KECHRIS : *Classical Descriptive Set Theory*, II.15.1 für einen Beweis, der aber Ergebnisse über analytische Mengen benutzt.

(iii) folgt aus (ii). $\square$

Der folgende Satz ist ein einfaches Korollar von Aussage (i):

Satz

Jede BOREL*-Menge ist stetiges injektives Bild einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathcal{N}$.*
Insbesondere ist jede BOREL*-Menge abzählbar oder von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.*

Wir geben hier einen elementaren Beweis an: Zu zeigen ist, daß für jede BOREL-Menge $B \subseteq \mathbf{X}$ eine stetige Abbildung $f : \mathcal{N} \to \mathbf{X}$ und eine abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathcal{N}$ existieren, so daß f auf F injektiv ist und $B = f[F]$. Nach Satz 4.5 gilt diese Behauptung für die abgeschlossenen Mengen B, so daß wir nur zu zeigen brauchen, wie sie sich auf abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte überträgt:

(i) Es sei $B = \bigcup_{n<\omega} B_n$ und für alle n seien $f_n : \mathcal{N} \to \mathbf{X}$ stetige Abbildungen und F_n abgeschlossene Mengen, so daß $f_n \upharpoonright F_n$ injektiv ist mit Bild B_n. Setzen wir für $n \in \mathbb{N}$

$$N(n) := \{x \in \mathcal{N} \mid x(0) = n\},$$

so sind diese Mengen homöomorph zu $\mathcal{N}$ mittels der Abbildung

$$\begin{array}{ccl} x \mapsto x^*, & \text{wobei} & x^* \text{ die um 1 “verschobene” Folge ist mit} \\ x^*(t) & = & x(t+1), \end{array}$$

Wir können somit unsere Annahme abändern, indem wir annehmen, daß $F_n \subseteq N(n)$ und $f_n : N(n) \to \mathbf{X}$. Nun setzen wir

$$F = \{x \mid x^* \in F_{x(0)}\},$$

und definieren $f(x) = f_{x(0)}(x^*)$. Nach der Methode des Zusatzes zu Satz 4.5 erhält man eine abgeschlossene Teilmenge von F, welche durch f bijektiv auf B abgebildet wird.

(ii) Schließlich sei $B = \bigcap_{n<\omega} B_n$ und für alle n seien $f_n : \mathcal{N} \to \mathbf{X}$ stetige Abbildungen und F_n abgeschlossene Mengen, so daß $f_n \upharpoonright F_n$ injektiv ist mit Bild B_n. Wir kodieren eine Folge von Elementen $(x_i | i < \omega)$ aus $\mathcal{N}$ durch eine Folge x mittels

$$x(< i, j >) = x_i(j), \; x(n) = 0 \text{ sonst, und setzen}$$

$$\begin{aligned} x \in F \quad \leftrightarrow \quad & \forall n\, (x)_n \in F_n \wedge \\ & \wedge \forall n \forall m\; f_n((x)_n) = f_m((x)_m) \wedge \\ & \wedge \forall i \forall j \forall n\, (n \neq < i, j > \rightarrow x(n) = 0). \end{aligned}$$

Dann ist F abgeschlossen. Setzt man $f(x) = f_0((x)_0)$, so ist f injektiv auf F und $f[F] = \bigcap_{n<\omega} B_n$.

Kapitel 7

Analytische Mengen und die Projektive Hierarchie

Es gibt $2^{\aleph_0}$-viele

- *reelle Zahlen,*
- *Paare von reellen Zahlen* und damit ebenso viele *reelle Intervalle,*
- *offene Mengen* reeller Zahlen (denn jede offene Menge ist Vereinigung von abzählbar-vielen reellen Intervallen mit rationalen Endpunkten),
- *abgeschlossene Mengen* reeller Zahlen (als die Komplemente der offenen Mengen),
- G_δ*- und* F_σ*-Mengen* reeller Zahlen (als abzählbare Durchschnitte bzw. Vereinigungen von $2^{\aleph_0}$-vielen Mengen), nach demselben Argument auch nur ebenso viele
- $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$*-Mengen* reeller Zahlen für jedes $\alpha < \omega_1$, und wegen $\omega_1 \leq 2^{\aleph_0}$ schließlich auch so viele
- BOREL*-Mengen* reeller Zahlen.

Dagegen hat die Gesamtheit *aller* Mengen von reellen Zahlen die Mächtigkeit $2^{(2^{\aleph_0})} > 2^{\aleph_0}$, so daß es sinnvoll ist, nach Fortsetzungen der BOREL-Hierarchie zu suchen. Über den historischen Anlaß, diese Hierarchie zu den projektiven Mengen zu erweitern, berichtet SIERPINSKI[1]: N. LUSIN hatte um 1916 seinen Schüler M.

[1] W. SIERPINSKI: *Les Ensembles projectifs et analytiques.* Mémorial des Sciences Math. Heft 112, pp. 28-29, Paris 1950

SOUSLIN beauftragt, eine Arbeit von H. LEBESGUE über analytische Funktionen zu studieren, und SOUSLIN fand mehrere Fehler, u. a. in einem Lemma, welches aussagte, daß die Projektion einer BOREL-Menge wiederum eine BOREL-Menge sei. Tatsächlich stellt sich heraus, daß bereits Projektionen abgeschlossener Mengen nicht mehr BOREL-Mengen zu sein brauchen:

7.1 Analytische Mengen

Definition (Souslin 1917)

Ist $\mathbf{X}$ ein Polnischer Raum, so heißt

$$A \subseteq \mathbf{X} \textbf{ analytisch} :\leftrightarrow A = \emptyset \vee A \text{ ist stetiges Bild von } \mathcal{N}.$$

Einfache Eigenschaften analytischer Mengen:

(i) *Jede abgeschlossene Menge ist analytisch.*

(ii) *Jedes stetige Bild einer analytischen Menge ist analytisch.*

(iii) *Vereinigung und Durchschnitt abzählbar-vieler analytischer Menge sind analytisch.*

(iv) *Jede* BOREL*-Menge ist analytisch.*

Beweis: Da eine abgeschlossene Teilmenge als Teilraum eines Polnischen Raumes selbst wieder ein Polnischer Raum ist, folgt (i) aus 4.5. (ii) ergibt sich direkt aus der Definition. (iii) ist hier etwas aufwendig zu beweisen; wir werden es später mittels einer anderen Charakterisierung zeigen. Aus (i) und (iii) folgt (iv). □

Das letzte Ergebnis läßt sich (außer etwa im trivialen Fall eines abzählbaren metrischen Raumes, in welchem alle Mengen BOREL-Mengen sind) nicht umkehren; zum Beweis benötigen wir jedoch zunächst einige weitere Charakterisierungen der analytischen Mengen.

Während die BOREL-Mengen stetige *und* injektive Bilder einer abgeschlossenen Teilmenge des BAIRE-Raumes sind, kann man die analytischen Mengen als Projektionen abgeschlossener Teilmengen von $\mathbf{X} \times \mathcal{N}$ erhalten, wobei für $F \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$

$$\exists^{\mathbf{Y}} F := \{x \in \mathbf{X} \mid \exists y \in \mathbf{Y}\, F(x,y)\} \text{ die } \textbf{Projektion} \text{ von } F \text{ entlang } \mathbf{Y}$$

ist.

Charakterisierung analytischer Mengen

A sei Teilmenge eines Polnischen Raumes $\mathbf{X}$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist analytisch, d. h. leer oder stetiges Bild von $\mathcal{N}$,*

(ii) *A ist leer oder stetiges Bild eines Polnischen Raumes* $\mathbf{Y}$,

(iii) *A ist stetiges Bild einer* BOREL*-Menge eines Polnischen Raumes* $\mathbf{Y}$*,*

(iv) $A = \exists^{\mathcal{N}} F$ *für ein abgeschlossenes* $F \subseteq \mathbf{X} \times \mathcal{N}$,

(v) $A = \exists^{\mathcal{C}} G$ *für eine G_δ-Menge* $G \subseteq \mathbf{X} \times \mathcal{C}$,

(vi) $A = \exists^{\mathbf{Y}} B$ *für eine* BOREL*-Menge* $B \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ *und einen Polnischen Raum* $\mathbf{Y}$.

Beweis:

(i) $\iff$ (ii): trivial bzw. mit 4.5.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Sei $f : \mathcal{N} \to \mathbf{X}$ stetig mit $f[\mathcal{N}] = A$. Dann gilt

$$y \in A \leftrightarrow \exists x \in \mathcal{N}\, f(x) = y.$$

Der Graph $G(f)$ von f ist abgeschlossen und ebenso
$F := G(f)^{-1} = \{(y,x) \mid f(x) = y\}$, welches die gewünschte Menge liefert.

Für (iii) $\Rightarrow$ (ii) und (vi) $\Rightarrow$ (ii) benutze den Satz aus 6.4, nach welchem jede BOREL-Menge stetiges Bild einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathcal{N}$ ist.

Für (iv) $\Rightarrow$ (v) benutze den Homöomorphismus von $\mathcal{N}$ mit einer G_δ-Teilmenge von $\mathcal{C}$ (siehe Ende von 4.6). (v) $\Rightarrow$ (vi) und (vi) $\Rightarrow$ (iii) sind wieder trivial. $\square$

Satz (Souslin)

Es sei $\mathbf{X}$ *ein perfekter Polnischen Raum. Dann gibt es in* $\mathbf{X}$ *eine analytische Menge, welche nicht* BOREL-*Menge ist.*

Beweis: Es sei nach 5.8 U eine universelle Menge für $\mathbf{\Pi}_1^0(\mathcal{N}^2)$. Dann ist die Menge

$$F := \{(y,x) \mid \exists z\,(y,x,z) \in U\}$$

universell für die Menge der analytischen Teilmengen von $\mathcal{N}$: Da Projektionen stetig sind, sind F und alle F_y analytisch. Ist umgekehrt $A \subseteq \mathcal{N}$ analytisch, so gibt es eine stetige Abbildung $f : C \twoheadrightarrow A$ für ein abgeschlossenes $C \subseteq \mathcal{N}$ (möglicherweise $C = \emptyset$). Es gilt also:

$$x \in A \leftrightarrow \exists z\,(z,x) \in f \leftrightarrow \exists z\,(x,z) \in f^{-1}.$$

Da f stetig ist, ist der Graph von f, $G(f)$, und damit auch die inverse Relation f^{-1} eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{N}^2$ und somit $G = U_y$ für ein $y \in \mathcal{N}$ und damit auch $A = F_y$.

Nun kann aber F keine BOREL-Menge sein, denn sonst wäre es auch $D := \{x \mid (x,x) \notin F\}$ und insbesondere analytisch, also $D = F_{y_0}$ für ein $y_0 \in \mathcal{N}$, d. h.

$$(x,x) \notin F \leftrightarrow (y_0,x) \in F,$$

was für $x = y_0$ zum Widerspruch führt. (Diagonalargument!)

Damit haben wir eine analytische Teilmenge von $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ erhalten, welche keine BOREL-Menge ist. Da $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ homöomorph zu $\mathcal{N}$ ist, überträgt sich dieses Ergebnis auf den Raum $\mathcal{N}$. Der allgemeine Fall eines perfekten Polnischen Raumes $\mathbf{X}$ folgt nun hieraus, da dieser eine homöomorphe Kopie von $\mathcal{N}$ enthält (s. 4.6). □

Ein interessanter Zusammenhang zwischen den BOREL-Mengen und den analytischen Mengen ergibt sich aus dem

7.2 Separationssatz von Lusin

$A, B \subseteq \mathbf{X}$ *seien disjunkte analytische Teilmengen eines Polnischen Raumes* $\mathbf{X}$*. Dann existiert eine* BOREL-*Menge* C*, welche* A *von* B *trennt, d. h.*

$$A \subseteq C \;\wedge\; B \cap C = \emptyset.$$

Beweis: Wir benutzen folgende einfache Tatsache:

(*) falls die Mengen $R_{m,n}$ die Mengen P_m, Q_n trennen, so trennt $R = \bigcup_m \bigcap_n R_{m,n}$ die Mengen $P = \bigcup_m P_m,\ Q = \bigcup_n Q_n$.

Sind nun $A, B \subseteq \mathbf{X}$ disjunkte analytische Mengen $\neq \emptyset$, so gibt es stetige Surjektionen $f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow A$ und $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow B$. Für endliche Folgen $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ setzen wir

$$A_s := f[N_s],\ B_t := g[N_t].$$

Dann ist $A_s = \bigcup_m A_{s^\frown m}$ und $B_t = \bigcup_n B_{t^\frown n}$. Wir nehmen nun an, daß sich A von B nicht durch eine BOREL-Menge trennen läßt. Dann können wir durch Rekursion Folgen $x, y \in \mathcal{N}$ definieren, so daß sich für kein n die disjunkten Mengen

$$A_{x\restriction n}, B_{y\restriction n}$$

durch eine BOREL-Menge trennen lassen: Haben wir nämlich für $s = x \restriction n, t = y \restriction n$ bereits gefunden, so daß sich A_s, B_t nicht durch eine BOREL-Menge trennen lassen, so können wir nach (*) Zahlen i, j finden, so daß sich $A_{s^\frown i}, B_{t^\frown j}$ nicht durch eine BOREL-Menge trennen lassen, und wir setzen dann $x(n) = i, y(n) = j$.

Nun ist $f(x) \in A, g(y) \in B$, also $f(x) \neq g(y)$ (denn A, B sind disjunkt), und somit gibt es disjunkte offene Mengen U, V mit $f(x) \in U, g(y) \in V$. Da f und g stetig sind, gilt für hinreichend großes n:

$$f[N_{x\restriction n}] \subseteq U,\ g[N_{y\restriction n}] \subseteq V,$$

damit erhalten wir aber einen Widerspruch, da U eine BOREL-Menge ist, welche $A_{x\restriction n}$ von $B_{y\restriction n}$ trennt! □

Als Korollar erhalten wir den (1917, also bereits 10 Jahre früher gefundenen)

7.3 Satz von Souslin

Ist eine Teilmenge A eines Polnischen Raumes $\mathbf{X}$ analytisch und ist auch ihr Komplement analytisch, so ist sie eine BOREL*-Menge (und natürlich auch umgekehrt).*

Übungsaufgabe

Für eine Abbildung $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ von Polnischen Räumen $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist BOREL,

(ii) der Graph von f ist BOREL,

(iii) der Graph von f ist analytisch.

7.4 Die Souslin-Operation A

Eine Folge

$$P = (P_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\omega}) \text{ heißt SOUSLIN-}\textbf{Schema} \text{ auf } \mathbf{X} \leftrightarrow \forall s \in \mathbb{N}^{<\omega}\, P_s \subseteq \mathbf{X}.$$

Die SOUSLIN-Operation $\mathcal{A}$ ist für ein derartiges P definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}P = \mathcal{A}_s\, P_s &= \bigcup_{x \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_{x \restriction n}, \quad \text{d. h.} \\ z \in \mathcal{A}P &\leftrightarrow \exists x \in \mathcal{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, z \in P_{x \restriction n}. \end{aligned}$$

Ist Γ eine Punktklasse, so wie üblich $\mathcal{A}\Gamma = \{\mathcal{A}_s P_s | \forall s \in \mathbb{N}^{<\omega}\, P_s \in \Gamma\}$.

Analytische Mengen (wir werden sie später als $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Mengen bezeichnen) werden auch **A-Mengen** genannt, weil sie mittels der **Operation** $\mathcal{A}$ aus abgeschlossenen Mengen erhalten werden können:

Satz

$$\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{X}) = \mathcal{A}\, \mathbf{\Pi}^0_1(\mathcal{X}),$$

d.h. folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) *$A \subseteq \mathcal{X}$ ist analytisch, d. h. leer oder stetiges Bild von $\mathcal{N}$,*

(ii) *A kann aus abgeschlossenen Mengen mittels der Operation $\mathcal{A}$ erhalten werden:*

$$z \in \mathcal{A}P \leftrightarrow \exists x \in \mathcal{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, z \in P_{x \restriction n},$$

wobei alle $P_{x\restriction n}$, $x \in \mathcal{N}$, $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossene Teilmengen von $\mathcal{X}$ sind.

Beweis: Ist $f : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ stetig mit Bild $f[\mathcal{N}] = A$, so ist

$$z \in A \leftrightarrow \exists x \in \mathcal{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, z \in \overline{f[N_{x\restriction n}]},$$

also mit den abgeschlossenen Mengen $P_s = \overline{f[N_{x\restriction n}]}$:

$$A = \mathcal{A}_s\, P_s.$$

Die Umkehrung ist klar. □

Bemerkungen

1. Ein SOUSLIN**-Schema** P heißt **regulär** gdw

$$\forall s,t \in \mathbb{N}^{<\omega}\, (s \subseteq t \rightarrow P_s \supseteq P_t).$$

   Ist $P = (P_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\omega})$ ein SOUSLIN-Schema auf $\mathbf{X}$, und setzt man

$$Q_s = \bigcap_{t \subseteq s} P_t,$$

   so ist $Q = (Q_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\omega})$ ein reguläres SOUSLIN-Schema auf $\mathbf{X}$ mit $\mathcal{A}P = \mathcal{A}Q$.

2. Ist Γ_σ bzw. Γ_δ die Menge der abzählbaren Vereinigungen bzw. abzählbaren Durchschnitte von Mengen aus Γ. so ist

$$\Gamma_\sigma \cup \Gamma_\delta \subseteq \mathcal{A}\Gamma.$$

Satz

Für jede Punktklasse $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *gilt:*

$$\mathcal{A}\mathcal{A}\Gamma = \mathcal{A}\Gamma.$$

Beweis: Offensichtlich gilt stets $\Gamma \subseteq \mathcal{A}\Gamma$, so daß wir nur $\mathcal{A}\mathcal{A}\Gamma \subseteq \mathcal{A}\Gamma$ zu beweisen brauchen:

Es sei $A = \mathcal{A}_s P_s$ mit $P_s \in \mathcal{A}\Gamma$, also $P_s = \mathcal{A}_t Q_{s,t}$ mit $Q_{s,t} \in \Gamma$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z \in A \quad &\leftrightarrow \quad \exists x \forall m\, (z \in P_{x\restriction m}) \\ &\leftrightarrow \quad \exists x \forall m\, \exists y \forall n\, (z \in Q_{x\restriction m, y\restriction n}) \\ &\leftrightarrow \quad \exists x\, \exists y \forall m \forall n\, (z \in Q_{x\restriction m, (y)_m\restriction n}), \end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Umformung die Möglichkeit benutzt haben, abzählbar-viele Folgen natürlicher Zahlen in geeigneter Weise durch eine einzige zu kodieren (s. im folgenden 7.9). In ähnlicher Weise lassen sich die beiden $\exists$-Quantoren durch einen einzigen ersetzen, so daß man erhält

$$z \in A \leftrightarrow \exists u \, \forall k (z \in R_{u \restriction k})$$

mit $R_s = Q_{\varphi(s),\psi(s)} \in \Gamma$ für geeignete φ, ψ:

Für die Kodierung wählt man zunächst eine bijektive Paarfunktion $\langle , \rangle$ von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ (etwa $\langle i, j \rangle = 2^i(2j+1) - 1$), so daß insbesondere stets gilt

$$m \leq \langle m,n \rangle \text{ und } p < n \rightarrow \langle m,p \rangle < \langle m,n \rangle.$$

Es seien $()_0, ()_1$ die entsprechenden Umkehrfunktionen, also $k = \langle (k)_0, (k)_1 \rangle$. Dann kodieren wir die $(x, (y)_m)$ durch ein $u \in \mathcal{N}$, so daß

$$u(k) = \langle x(k), y_{(k)_0}((k)_1) \rangle.$$

Schließlich benötigen wir noch Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, so daß für u als Code für $(x, (y)_m)$ und $s = u \restriction \langle m,n \rangle$ gilt $\varphi(s) = x \restriction m$ und $\psi(s) = (y)_m \restriction n$. $\square$

Als Folgerung erhalten wir:

Satz

Die analytischen Mengen sind unter der Operation $\mathcal{A}$ abgeschlossen:

$$\mathcal{A}\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{X}) = \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{X}).$$

7.5 Die Baire-Eigenschaft analytischer Mengen

Lemma

Es sei $\mathbf{X}$ ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis für die offenen Mengen, $A \subseteq X$. Dann gibt es eine Menge $B \subseteq X$ mit

(i) *$A \subseteq B$ und B hat die* BAIRE-*Eigenschaft,*

(ii) *falls $A \subseteq B'$ die* BAIRE-*Eigenschaft hat, so ist $B - B'$ mager.*

Beweis: Es sei $U_0, U_1; \dots$ eine Aufzählung einer Basis für die offenen Mengen von $\mathbf{X}$, alle $U_i \neq \emptyset$, und für eine gegebene Teilmenge $A \subseteq X$

$$A_1 := \{x \in X \mid \forall i\, (x \in U_i \to U_i \cap A \text{ ist nicht mager})\}.$$

Dann ist A_1 abgeschlossen: Ist $x \notin A_1$, so gibt es ein i mit $x \in U_i \wedge U_i \cap A$ mager. Ist nun $y \in U_i$, so $y \notin A_1$, da $U_i \cap A$ mager ist. Also ist $U_i \cap A_1 = \emptyset$. Als abzählbare Vereinigung magerer Mengen ist

$$A - A_1 = \bigcup \{A \cap U_i \mid A \cap U_i \text{ mager}\}$$

eine magere Menge. Setzt man $B := A \cup A_1$, so hat B als Vereinigung einer abgeschlossenen mit einer mageren Menge die BAIRE-Eigenschaft.

Sei nun $B' \supseteq A$ ebenfalls mit der BAIRE-Eigenschaft. dann hat auch $C := B - B'$ die BAIRE-Eigenschaft. Wäre C nicht mager, so $U_i - C$ mager für ein i und damit auch die Teilmenge $U_i \cap A$. Außerdem ist $U_i \cap C \neq \emptyset$ (sonst wäre U_i Teilmenge der mageren Menge $U_i - C$), also gibt es ein $x \in U_i$ mit $x \notin A_1$, somit ist $U_i \cap A$ nicht mager, Widerspruch! □

Satz

Es sei **BE** *die Klasse der Mengen mit der* BAIRE-*Eigenschaft. Dann ist* **BE** *abgeschlossen unter der Operation* $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}\mathbf{BE} \subseteq \mathbf{BE}.$$

Insbesondere haben alle analytischen Mengen die BAIRE-*Eigenschaft.*

Beweis: Es sei $A = \mathcal{A}_s A_s$, $(A_s | s \in \mathbb{N}^{<\omega})$ ein SOUSLIN-Schema von Mengen mit der BAIRE-Eigenschaft, von dem wir annehmen können, daß es regulär ist. Für $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ setzen wir

$$A^s := \bigcup_{x \supseteq s} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{x \restriction n} \subseteq A_s.$$

Nach obigem Lemma gibt es Mengen $B^s \supseteq A^s$ mit der BAIRE-Eigenschaft, so daß für jedes $B \supseteq A^s$ mit der BAIRE-Eigenschaft $B^s - B$ mager ist. Indem wir gegebenenfalls B^s durch $B^s \cap A_s$ ersetzen, können wir annehmen, daß $B^s \subseteq A_s$ und ferner, daß auch die Folge $(B^s | s \in \mathbb{N}^{<\omega})$ regulär ist.

Es sei nun $C_s := B^s - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{s \frown n}$. Dieses sind (nach unserer Wahl der B^s) nun magere Mengen, da $A^s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{s \frown n}$ und somit $A^s \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{s \frown n}$. Also ist auch $C := \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}} C_s$ mager. Es bleibt zu zeigen:

$$B^\emptyset - C \subseteq A.$$

Dann ist nämlich $B^\emptyset - A \subseteq C$ und damit auch mager, insbesondere haben $B^\emptyset - A$ und damit auch A die BAIRE-Eigenschaft.

Sei somit $b \in B^\emptyset - C$. Wegen $b \notin C_\emptyset$ gibt es ein $x(0)$ mit $b \in B^{x(0)}$.

Haben wir bereits $x(0), \ldots, x(n)$ gefunden mit $b \in B^{(x(0),\ldots,x(n))}$, so können wir wegen $b \notin C_{(x(0),\ldots,x(n))}$ ein $x(n+1)$ finden mit $b \in B^{(x(0),\ldots,x(n+1))}$. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $x \in \mathcal{N}$ mit

$$b \in \bigcap_n B^{x \restriction n} \subseteq \bigcap_n A_{x \restriction n} \subseteq A,$$

also ist $b \in A$, was wir zeigen wollten. □

Bemerkung

Ein ähnliches Ergebnis kann man für die LEBESGUE-Meßbarkeit erhalten:

Zunächst zeigt man entsprechend obigem Lemma das analoge

Lemma

Zu jeder Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

(i) *$A \subseteq B$ und B ist* LEBESGUE-*meßbar,*

(ii) *falls $A \subseteq B'$* LEBESGUE-*meßbar ist, so ist hat $B - B'$ das Maß 0.*

und folgert daraus:

Satz

Es sei **LM** *die Klasse der* LEBESGUE-*meßbaren Mengen. Dann ist* **LM** *abgeschlossen unter der Operation $\mathcal{A}$:*

$$\mathcal{A}\,\mathbf{LM} \subseteq \mathbf{LM}.$$

Insbesondere sind alle analytischen Mengen LEBESGUE-*meßbar.*

7.6 Perfekte-Mengen-Eigenschaft analytischer Mengen

Ein weiteres Ergebnis von SOUSLIN besagt, daß auch die analytischen Mengen die *Perfekte-Mengen-Eigenschaft* besitzen (d. h. jede überabzählbare analytische

Menge enthält eine perfekte Menge), und somit gilt die Kontinuumshypothese für die analytischen Mengen. Das Standardbeispiel für eine perfekte Menge (die zugleich offenbar die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ hat) ist der CANTOR-Raum C aller binären Folgen; eine Teilmenge $A \subseteq \mathbf{X}$ eines topologischen Raumes $\mathbf{X}$ heißt **CANTOR-Menge** gdw sie (als Unterraum von $\mathbf{X}$) homöomorph zum CANTOR-Raum $\mathcal{C}$ ist. Da der Raum $\mathcal{C}$ kompakt ist, so auch sein homöomorphes Bild, und da eine kompakte Teilmenge eines HAUSDORFF-Raumes abgeschlossen ist, ist jede CANTOR-Menge von $\mathbf{X}$ eine abgeschlossene und auch perfekte Teilmenge von $\mathbf{X}$.

Satz

$\mathbf{X}$ *sei ein Polnischer Raum und* $A \subseteq \mathbf{X}$ *eine analytische Teilmenge. Dann ist* A *abzählbar oder enthält eine* CANTOR-*Menge. Insbesondere gilt die Kontinuumshypothese für die analytischen Mengen.*

Beweis: Zur Vorbereitung beginnen wir mit folgender Tatsache:

(*) Zu jeder überabzählbaren Menge $A \subseteq \mathbf{X}$ gibt es disjunkte offene Mengen U_0, U_1, so daß $U_i \cap A$ überabzählbar ist für i=0,1.

Beweis von (*): Angenommen A ist überabzählbar, aber die Behauptung ist falsch. Es seien $U_{n,0}, U_{n,1}, \dots$ offene Mengen vom Radius $1/n$ für $n > 1$, welche X überdecken. Da A überabzählbar ist, aber die $U_{n,i}$ abzählbar sind, muß $A \cap U_{n,m}$ überabzählbar sein für ein m. Wir wählen ein solches $m = y(n)$ und setzen

$$A_n := A - \overline{U_{n,y(n)}}.$$

Jedes $x \in A_n$ liegt in einer (von abzählbar-vielen) offenen Mengen V disjunkt von $U_{n,y(n)}$; ist A_n überabzählbar, so muß ein derartiges V überabzählbar sein im Widerspruch zu unserer Annahme. Somit sind alle A_n abzählbar. Nun ist aber

$$A - \bigcup_n A_n = \bigcap_n \overline{U_{n,y(n)}}$$

und enthält wegen $d(U_{n,y(n)}) \to 0$ höchstens einen Punkt. Also ist A abzählbar, Widerspruch! $\square$

Zum Beweis des Satzes sei nun A analytisch, also $f : \mathcal{N} \to \mathbf{X}$ für eine stetige Funktion f mit Bild A. Wir betten dann eine CANTOR-Menge in A ein, indem wir eine Abbildung $s \mapsto \tau_s$ von $2^{<\omega} \to \mathbb{N}^{<\omega}$ definieren mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\tau_\emptyset = \emptyset$,

(ii) $s \subset s' \to \tau_s \subset \tau_{s'}$,

(iii) $f[N_{\tau_s}]$ ist überabzählbar,

(iv) $f[N_{\tau_{s^\frown 0}}] \cap f[N_{\tau_{s^\frown 1}}] = \emptyset$.

Die Idee ist folgende: Es sei $V \subseteq \mathcal{N}$ offen mit $f[V]$ überabzählbar. Dann gibt es nach (*) zwei offene disjunkte Mengen U_0, U_1, deren Durchschnitt mit $f[V]$ überabzählbar ist. Setzt man $W_i = \{x \in V \mid f(x) \in U_i\}$, so erhält man disjunkte offene Mengen, deren Bilder $f[W_i] = U_i \cap f[V]$ überabzählbar sind.

Somit kann man die τ_s durch Rekursion über die Länge von s definieren. Es sei nun $g : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$ definiert durch $g(x) := \bigcup_n \tau_{x \upharpoonright n}$. Dann ist g stetig und $f \circ g : \mathcal{C} \to \mathbf{X}$ ist injektiv. Da $\mathcal{C}$ kompakt ist, ist das Bild unter $f \circ g$ abgeschlossen und eine perfekte Teilmenge von A. $\square$

BERNSTEIN hat 1908 gezeigt (und zwar mit Hilfe des Auswahlaxioms), daß es eine überabzählbare Menge gibt, die keine perfekte Teilmenge besitzt. Wir werden später sehen, daß es möglich ist, unter den Komplementen einer analytischer Mengen ein solches Beispiel zu finden. Somit läßt sich die Methode des Nachweises der Kontinuumshypothese mittels der Perfekten-Mengen-Eigenschaft über die analytischen Mengen nicht hinausführen.

Die Projektion einer analytischen Menge ist zwar wiederum analytisch, aber das Komplement analytischer Mengen (eine **CA-Menge**) braucht nicht wieder eine analytische Menge zu sein. Andererseits sind die *CA*-Mengen wiederum nicht notwendig unter Projektionen abgeschlossen. Daher baut man nach LUSIN über den analytischen Mengen die Hierarchie der *projektiven Mengen* auf:

7.7 Projektive Mengen

$$\begin{array}{rcll}
\mathbf{\Sigma}^1_1 & = & \exists^{\mathcal{N}}\, \mathbf{\Pi}^0_1 & \text{analytische Mengen (A-Mengen),} \\
\mathbf{\Pi}^1_1 & = & \neg\, \mathbf{\Sigma}^1_1 & \text{co-analytische Mengen (CA-Mengen),} \\
\mathbf{\Sigma}^1_{n+1} & = & \exists^{\mathcal{N}}\, \mathbf{\Pi}^1_n\,, & \text{wobei } \mathbf{\Pi}^1_n = \neg\, \mathbf{\Sigma}^1_n, \\
\mathbf{\Delta}^1_n : & = & \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n\,. &
\end{array}$$

Somit ist eine Menge $P \subseteq \mathbf{X}$

$\mathbf{\Sigma}^1_1$ gdw $P(x) \leftrightarrow \exists y\, F(x,y)$ für ein abgeschlossenes $F \subseteq \mathbf{X} \times \mathcal{N}$,
$\mathbf{\Sigma}^1_2$ gdw $P(x) \leftrightarrow \exists y\, \forall z\, G(x,y,z)$ für ein offenes $G \subseteq \mathbf{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$,
$\mathbf{\Pi}^1_2$ gdw $P(x) \leftrightarrow \forall y\, \exists z\, F(x,y,z)$ für ein abgeschlossenes $F \subseteq \mathbf{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Der Satz von SOUSLIN besagt also:

$$\boxed{\mathbf{\Delta}_1^1 = \text{BOREL-Mengen.}}$$

Bemerkungen und Beispiele

1. Für eine stetige Funktion $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ ist der zugehörige Graph $\{x, y \mid y = f(x)\}$ abgeschlossen.

2. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbf{X}$ stetig, F abgeschlossen, so ist das Bild $f[F]$ eine $\mathbf{\Sigma}_2^0$-Menge.

3. Ist die Funktion $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ stetig, so ist das Bild einer offenen (abgeschlossenen) Menge i. a. nicht offen (bzw. abgeschlossen), aber:
   das Bild $f[P]$ einer $\mathbf{\Sigma}_n^1$-Menge P ist wieder eine $\mathbf{\Sigma}_n^1$-Menge.

4. Für jede Punktmenge $P \subseteq \mathbf{X}$ gilt:

$$\begin{aligned} P \in \mathbf{\Sigma}_1^1 &\quad\leftrightarrow\quad P = f[\mathcal{N}] \text{ für ein stetiges } f \text{ (vgl. den Satz in 6.4!)},\\ P \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1 &\quad\leftrightarrow\quad P = f[Q] \text{ für ein stetiges } f \text{ und eine } \Pi_n^1\text{-Menge } Q \subseteq \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

5. Die in der Analysis üblichen Prädikate kommen nur auf den untersten Stufen der projektiven Hierarchie vor:

   Ist $C[0,1]$ der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall $[0,1]$, so sind die Prädikate

$$\begin{aligned} Q(f) &\quad\leftrightarrow\quad f \textit{ ist differenzierbar auf } [0,1],\\ R(f) &\quad\leftrightarrow\quad f \textit{ ist stetig differenzierbar auf } [0,1]\\ MV(f) &\quad\leftrightarrow\quad f \textit{ erfüllt den Mittelwertsatz} \end{aligned}$$

   co-analytisch ($\mathbf{\Pi}_1^1$), analytisch ($\mathbf{\Sigma}_1^1$) bzw. $\mathbf{\Pi}_2^1$.

Wie im Falle der BOREL-Mengen gilt der

7.8 Hierarchiesatz - schwache Form

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{\Sigma}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Pi}^1_{n+1} & \text{und} & \boldsymbol{\Pi}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}, \\
\boldsymbol{\Sigma}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1} & \text{und} & \boldsymbol{\Pi}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Pi}^1_{n+1},
\end{array}$$

so daß wir folgendes Bild erhalten:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \boldsymbol{\Sigma}^1_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \boldsymbol{\Sigma}^1_3 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\
\boldsymbol{\Delta}^1_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \boldsymbol{\Delta}^1_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \boldsymbol{\Delta}^1_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \cdots \\
& \boldsymbol{\Pi}^1_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \boldsymbol{\Pi}^1_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \boldsymbol{\Pi}^1_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

Die Mengen der Projektiven Hierarchie lassen sich also durch Formeln definieren, deren Quantorenfolge am Anfang (das **Präfix**) eine bestimmte Form hat. Abschlußeigenschaften der einzelnen Klassen kann man erhalten, indem man logische Umformungen am Präfix vornimmt. Hierzu benötigen wir die Möglichkeit, endlich- (oder abzählbar-) viele Folgen von Elementen von $\mathcal{N}$ durch ein einzelnes Element zu kodieren:

Es sei $x : \omega \to \omega$. Setzt man

$$(x)_i = y \quad \text{mit } y(n) = x(\langle i, n\rangle) \text{ für } n \in \omega,$$

so stellt x eine **Kodierung** der unendlich-vielen Folgen $(x)_i, i = 0, 1, \ldots$ dar.

Für $k \geq 1$ sind die k-stelligen Inversen dieser Funktion definiert durch

$$\begin{array}{llll}
\langle x_0, \ldots, x_{k-1}\rangle & (\langle i, n\rangle) & = (x)_i(n), & \text{falls } i < k, \\
\langle x_0, \ldots, x_{k-1}\rangle & (m) & = 0 & \text{sonst} \\
& & \multicolumn{2}{l}{(\text{d. h. wenn } m \neq (\langle i, n\rangle) \text{ für alle } i < k, \text{ alle } n).}
\end{array}$$

Die Abbildungen $(x, i) \mapsto (x)_i$ und $(x_0, \ldots, x_{k-1}) \mapsto \langle x_0, \ldots, x_{k-1}\rangle$ sind offenbar stetig, und für alle k und alle $i < k$ gilt:

$$(\langle x_0, \ldots, x_{k-1}\rangle)_i = x_i.$$

Damit erhalten wir in Ergänzung zu 5.6 folgende

7.9 Präfix-Umformungen

$$\begin{aligned}
\neg\exists x\, P(x) &\leftrightarrow \forall x \neg P(x)\\
\neg\forall x\, P(x) &\leftrightarrow \exists x \neg P(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists x\, P(x) \vee \exists y\, R(y) &\leftrightarrow \exists x\,(P(x) \vee R(x))\\
\exists x\, P(x) \wedge \exists y\, R(y) &\leftrightarrow \exists x \exists y\,(P(x) \wedge R(y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x\, P(x) \wedge \forall y\, R(y) &\leftrightarrow \forall x\,(P(x) \wedge R(x))\\
\forall x\, P(x) \vee \forall y\, R(y) &\leftrightarrow \forall x \forall y\,(P(x) \vee R(y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists x \exists y\, P(x,y) &\leftrightarrow \exists z\, P((z)_0,(z)_1)\\
\forall x \forall y\, P(x,y) &\leftrightarrow \forall z\, P((z)_0,(z)_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall m \leq n\, \exists y\, P(m,y) &\leftrightarrow \exists z\, \forall m \leq n\, P(m,(z)_m)\\
\exists m \leq n\, \forall y\, P(m,y) &\leftrightarrow \forall z\, \exists m \leq n\, P(m,(z)_m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall m\, \exists y\, P(m,y) &\leftrightarrow \exists z\, \forall m\, P(m,(z)_m)\\
\exists m\, \forall y\, P(m,y) &\leftrightarrow \forall z\, \exists m\, P(m,(z)_m)
\end{aligned}$$

7.10 Abschlußeigenschaften

Wir beginnen mit einer Vorbemerkung:

Sind X,Y Polnische Räume und ist $f: X \to Y$ eine Funktion, so ist der Graph von f eine $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Relation gdw er $\mathbf{\Delta}^1_n$ ist (gdw f ist $\mathbf{\Delta}^1_n$- (oder $\mathbf{\Sigma}^1_n$- oder $\mathbf{\Pi}^1_n$)-meßbar). Die $\mathbf{\Delta}^1_1$-Funktionen sind also die BOREL-Funktionen.

(i) *Für jedes $n \geq 1$ sind die Punktklassen*

  (a) $\mathbf{\Sigma}^1_n$ *abgeschlossen unter stetigen Substitutionen, abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten* sowie unter stetigen Bildern, insbesondere unter $\exists^{\mathbf{Y}}$ *für jeden Produktraum* $\mathbf{Y}$,

(b) $\mathbf{\Pi}^1_n$ *abgeschlossen unter stetigen Substitutionen, abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten* sowie $\forall^{\mathbf{Y}}$ *für jeden Produktraum* $\mathbf{Y}$,

(c) $\mathbf{\Delta}^1_n$ *abgeschlossen unter stetigen Substitutionen, Komplementen und abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten (bilden also eine σ-Algebra*,

(ii) $\mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n$ und $\mathbf{\Delta}^1_n$ *sind für $n \geq 2$ abgeschlossen unter der Operation $\mathcal{A}$* (nicht dagegen $\mathbf{\Pi}^1_1$).

(iii) $\mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n$ und $\mathbf{\Sigma}^1_n$ *sind abgeschlossen unter $\mathbf{\Delta}^1_n$-Substitutionen, $\mathbf{\Delta}^1_n$ ist abgeschlossen unter Bildern von $\mathbf{\Delta}^1_n$-Funktionen.*

Wie im Falle der BOREL-Klassen gilt ferner der

Parametrisierungssatz für die projektiven Klassen

Für jeden perfekten Raum $\mathbf{Y}$ *sind die Punktklassen* $\mathbf{\Sigma}^1_n$ *und* $\mathbf{\Pi}^1_n$ $(n \geq 1)$ $\mathbf{Y}$*-parametrisierbar.*

Daraus folgt wie im Falle der BOREL-Hierarchie durch Diagonalisierung der

7.11 Hierarchiesatz für die projektive Hierarchie

I*st* $\mathbf{X}$ *ein perfekter Produktraum, so bilden die projektiven Klassen eine echt aufsteigende Hierarchie:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathbf{X}) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \mathbf{\Sigma}^1_2(\mathbf{X}) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \mathbf{\Sigma}^1_3(\mathbf{X}) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\
\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathbf{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \mathbf{\Delta}^1_2(\mathbf{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \mathbf{\Delta}^1_3(\mathbf{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \cdots \\
 & \mathbf{\Pi}^1_1(\mathbf{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \mathbf{\Pi}^1_2(\mathbf{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \mathbf{\Pi}^1_3(\mathbf{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] &
\end{tikzcd}$$

Es hat sich herausgestellt, daß Eigenschaften von Mengen reeller Zahlen, die sich nicht allgemein nachweisen lassen, gerade noch für die untersten Stufen der projektiven Hierarchie gelten, und zwar in Abhängigkeit von den vorausgesetzten mengentheoretischen Axiomen.

Kapitel 8

Axiome der Mengenlehre

In seinem Hauptwerk[1] gab CANTOR seine berühmte Beschreibung einer Menge:

> *Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Man kann diese "Definition" in folgendem Sinne zu präzisieren versuchen:

Zu jeder Eigenschaft $E(x)$ existiert die Menge M aller Objekte x mit der Eigenschaft $E(x)$: $M = \{x : E(x)\}$.

Präzisiert man den Begriff der *Eigenschaft* als Formel der mengentheoretischen Sprache (mit den üblichen logischen Symbolen sowie dem Prädikat $\in$ für die Elementbeziehung), so kann die CANTORsche Definition wie folgt aufgeschrieben werden:

Komprehensionsaxiom

$$\exists y \forall x \, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

Dieses Axiom ist nun aber widerspruchsvoll:

[1] *Beiträge zu Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Math. Ann. 46, (1895), 481 - 512, Math. Ann. 49, (1897), 207 - 246

RUSSELLsche Antinomie (1903)

Wählt man für $\varphi(x)$ die Formel $x \notin x$, so liefert das Komprehensionsaxiom die Existenz einer Menge r mit

$$\forall x(x \in r \leftrightarrow x \notin x) \quad \text{insbesondere gilt für } x = r:$$
$$r \in r \leftrightarrow r \notin r \qquad \text{Widerspruch!}$$

Ähnliche Widersprüche erhält man, wenn man für $\varphi(x)$ die Formel

$x = x$	Antinomie der “Menge aller Mengen” von CANTOR
x *ist Kardinalzahl*	Antinomie von CANTOR (um 1899, publiziert erst 1932)
x *ist Ordinalzahl*	Antinomie von CANTOR und BURALI-FORTI

wählt, wobei man allerdings noch einige Schritte in der Anwendung der Theorie durchführen muß, um zum Widerspruch zu gelangen (s. 3.2).

8.1 Axiome von ZFC

Grundlegend für die *Gleichheitsbeziehung* von Mengen ist das

Extensionalitätsaxiom $\qquad \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b.$

Dieses Axiom besagt also, daß Mengen übereinstimmen, wenn sie dieselben Elemente besitzen (also unabhängig von deren Reihenfolge und möglicher Definition).

Um die oben erwähnten Antinomien zu vermeiden, ist es hinsichtlich der *Existenz von Mengen* zweckmäßig, zwischen

- *Klassen* (bezeichnet mit Großbuchstaben $A, B, \ldots$) und
- *Mengen* (bezeichnet mit Kleinbuchstaben $a, b, \ldots, x, y \ldots$) zu unterscheiden:

Eine beliebige **Eigenschaft** $\varphi(x)$ von **Mengen** x definiert zunächst nur eine entsprechende **Klasse** $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ mit

$$a \in \{x|\varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(a),$$

aber diese Klasse braucht nicht notwendig selbst eine Menge zu sein; sondern man läßt nur *bestimmte* Klassen als Mengen zu, die dann ihrerseits als Mengen wieder Elemente anderer Klassen (oder Mengen) sein können. Klassen, welche keine

Mengen sind (weil sie "zuviele" Elemente enthalten, wie die Klasse aller Mengen, die Klasse aller Ordinalzahlen, ...) heißen *echte Klassen* (oder *Unmengen*).

Das heute am weitesten gebräuchliche Axiomensystem ZF von ERNST ZERMELO und ABRAHAM A. FRAENKEL drückt aus, daß Klassen, die "nicht zu groß" sind, als Mengen zugelassen werden. An die Stelle des Komprehensionsaxioms tritt das ZERMELOsche

Aussonderungsschema $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x, \ldots))$

Es besagt, daß man aus einer beliebigen Klasse $\{x \mid \varphi(x, \ldots)\}$ mittels einer bereits gegebenen *Menge* a die Teilklasse

$$\{x \in a \mid \varphi(x, \ldots)\}$$

als *Menge* aussondern kann. Insbesondere erhält man damit die Existenz folgender Mengen: $\emptyset$, $a \cap b$, $a - b$.

Dagegen kann die Klasse V aller Mengen *keine* Menge sein (sonst erhielten wir wieder die RUSSELLsche Antinomie). Nun benötigt man aber noch weitere Axiome für die Existenz von Mengen, zunächst das elementare

Paarmengenaxiom $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x = a \vee x = b)$.

Es erlaubt die Bildung von Paaren von Mengen, und zwar:

$\{a, b\}$	$:= \{x \mid x = a \ \vee \ x = b\}$	**Paarmenge**, speziell
$\{a\}$	$:= \{x \mid x = a\}$	**Einermenge**, sowie
(a, b)	$:= \{\{a\}, \{a, b\}\}$	**geordnetes Paar**.

Während es bei der Paarmenge auf die Reihenfolge nicht ankommt ($\{a, b\} = \{b, a\}$) gilt für das geordnete Paar:

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d,$$

so daß man (2-stellige) **Relationen** als Klassen geordneter Paare einführen kann:

$$Rel(R) :\leftrightarrow \forall u \in R \, \exists x, y \, (u = (x, y))$$

und **Funktionen** mit ihrem Graphen identifizieren kann:

$$F : A \to B :\leftrightarrow \forall x \in A \, \exists! y \in B \, (x, y) \in F.$$

In diesem Fall gibt es also zu jedem $x \in A$ (A nennt man den **Definitionsbereich** von F) genau ein $y \in B$, so daß $(x, y) \in F$. Dieses y nennen wir wie üblich den **Funktionswert** von F an der Stelle x und bezeichnen ihn mit $F(x)$ (anderenfalls sei etwa $F(x) = \emptyset$).

Die weiteren Axiome lauten:

Summenaxiom	$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists x \in a\, z \in x)$
Ersetzungsschema	$\exists u \forall y(y \in u \leftrightarrow \exists x \in a\, y = F(x))$
Potenzmengenaxiom	$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq a)$
Unendlichkeitsaxiom	$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$
Fundierungsaxiom	$a \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in a\, \forall y \in x\, y \notin a.$

Somit sind auch die folgende Klassen tatsächlich Mengen:

$\bigcup a = \bigcup_{x \in a} x$	$:= \{z \mid \exists x \in a\, z \in x\}$	**Vereinigungsmenge**
$\{F(x) \mid x \in a\}$	$:= \{y \mid \exists x \in a\, y = F(x)\}$	**Bildmenge**
$\mathcal{P}(a)$	$:= \{x \mid x \subseteq a\}$	**Potenzmenge**

Dagegen sind

V	$:= \{x \mid x = x\}$	**Klasse aller Mengen, Universum**
$-a$	$:= \{x \mid x \notin a\}$	**Komplement**

echte Klassen!

Aus dem Unendlichkeitsaxiom folgt die Existenz der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen (s. u.), mit Hilfe des Potenzmengenaxioms auch die Existenz der früher bereits betrachteten reellen Räume $\mathbb{R}, \mathcal{N}$, etc. Ferner lassen sich Vereinigungen und Produkte von Folgen von Mengen bilden, soweit die Indexmengen Mengen sind. Das Fundierungsaxiom fällt aus dem Rahmen, weil es die Existenz von Mengen fordert, ohne diese explizit festzulegen; es ist weitgehend entbehrlich, erleichtert aber, wie wir bereits gesehen haben, den Aufbau der Ordinalzahltheorie. Auch das Auswahlaxiom AC (s. 3.3) spielt eine besondere Rolle; man bezeichnet mit ZFC die Mengenlehre ZF mit hinzugefügtem Auswahlaxiom.

8.2 Induktion und Rekursion

Wie wir in 3.1 gesehen haben, ist die *Klasse On* aller Ordinalzahlen zwar keine Menge, aber wie jede Ordinalzahl transitiv und durch die $\in$-Beziehung wohlgeordnet. Hinsichtlich der entsprechenden $\leq$-Beziehung besitzt jede *Menge* a von Ordinalzahlen ein Supremum $\bigcup a = \bigcup_{\xi \in a} \xi$ und (falls $a \neq \emptyset$) auch ein Infimum $\bigcap a = \bigcap_{\xi \in a} \xi$ welches zugleich das *kleinste Element* von a ist. Letzteres existiert aber sogar jede (nicht-leere) *Klasse* A (denn ist etwa $\alpha \in A$, so brauchen wir das Infimum nur in der *Menge* der Ordinalzahlen $\leq \alpha$ zu suchen.) Damit können wir Eigenschaften für alle Ordinalzahlen durch *Induktion* nachweisen:

1. Induktionsprinzip für die Ordinalzahlen

Für jede Eigenschaft φ gilt:

$$\forall\alpha\,[\forall\xi<\alpha\,\varphi(\xi)\rightarrow\varphi(\alpha)]\rightarrow\forall\alpha\,\varphi(\alpha).$$

Kann man also für eine beliebige Ordinalzahl α die Eigenschaft φ nachweisen, indem man die *Induktionsvoraussetzung* $\forall\xi<\alpha\,\varphi(\xi)$ benutzt, so hat man die Eigenschaft φ für alle Ordinalzahlen α nachgewiesen. (Denn wäre $\forall\alpha\,\varphi(\alpha)$ falsch, so gäbe es ein α mit der Eigenschaft $\neg\varphi(\alpha)$ und damit eine kleinste derartige Ordinalzahl, was der Induktionsvoraussetzung widerspricht.) Dieses Prinzip verallgemeinert das entsprechende *Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen*:

$$\forall n\in\mathbb{N}\,[\forall m<n\,\varphi(m)\rightarrow\varphi(n)]\rightarrow\forall n\in\mathbb{N}\,\varphi(n).$$

Das Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen kann man auch in folgender Form erhalten:

$$\varphi(0)\wedge\forall n\in\mathbb{N}\,[\varphi(n)\rightarrow\varphi(n+1)]\rightarrow\forall n\in\mathbb{N}\,\varphi(n)$$

Das Unendlichkeitsaxiom besagt gerade, daß eine Limeszahl existiert. Die kleinste Limeszahl ω ist die Menge der natürlichen Zahlen, und über ω hinaus setzt sich der Prozeß der Nachfolger- und Limesbildung in die transfiniten Ordinalzahlen fort. Da jede Ordinalzahl entweder 0, eine Nachfolger- oder eine Limeszahl ist, erhält man entsprechend dem obigen Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen ein

2. Induktionsprinzip für die Ordinalzahlen

Für jede Eigenschaft φ gilt: Falls

(i) $\varphi(0)$,

(ii) $\forall\alpha(\varphi(\alpha)\rightarrow\varphi(\alpha+1))$ und schließlich

(iii) $\forall\xi<\lambda\,\varphi(\xi)\rightarrow\varphi(\lambda)$ für alle Limeszahlen λ,

so gilt $\forall\alpha\,\varphi(\alpha)$.

Hier stellt (i) den **Induktionsanfang** und (ii) den von den natürlichen Zahlen bekannten **Induktionsschluß** dar, zu dem für die Ordinalzahlen noch der weitere Induktionsschluß (iii) hinzukommt.

Dem Beweisprinzip durch Induktion entspricht außerdem stets ein zugehöriges Prinzip für die Definition von Funktionen durch *Rekursion*, welches z. B. die Addition auf den natürlichen Zahlen festlegt durch

$$\begin{aligned} x+0 &= x \\ x+(y+1) &= (x+y)+1. \end{aligned}$$

Im Falle der Ordinalzahlen muß man auch noch den Limesfall berücksichtigen:

Rekursionssatz für die Ordinalzahlen

Sind $G,H : On \times V \longrightarrow V$ Funktionen, a eine Menge, so existiert genau eine Funktion $F : On \longrightarrow V$ mit

$$\begin{aligned} F(0) &= a \\ F(\alpha+1) &= G(\alpha, F(\alpha)) \\ F(\lambda) &= H(\lambda, \{F(\xi) \mid \xi < \lambda\}) \quad \text{für } Lim(\lambda). \end{aligned}$$

bzw.

$$F(\alpha) = G(\alpha, F \restriction \alpha)$$

(Analog für mehrstellige Funktionen mit Parametern.) □

Beweis:
a) Die Eindeutigkeit von F zeigt man durch Induktion.
b) Für den Nachweis der Existenz definiert man (etwa im Falle der zweiten Fassung):

(i) h *brav:* $\leftrightarrow \exists \alpha\, (h : \alpha \to V \wedge \forall \xi \in \alpha\; h(x) = G(x, h \restriction \alpha))$,

(ii) *h verträglich* mit $g :\leftrightarrow \forall x \in D(h) \cap D(g)\; h(x) = g(x)$

Durch Induktion zeigt man, daß je zwei brave Funktionen miteinander verträglich sind:

(iii) h,g brav $\to \forall x \in D(h) \cap D(g)\; h(x) = g(x)$.

Die gesuchte Funktion können wir jetzt explizit definieren durch:

(iv) $F := \bigcup \{h \mid h\, brav\}$.

F ist wegen (iii) eine Funktion, $D(F)$ ist transitiv, und F erfüllt die Rekursionsbedingungen (da Vereinigung braver Funktionen). Es bleibt zu zeigen, daß F auf ganz On definiert ist:

Wäre $B := D(F) \neq On$, so $B = \alpha$ für ein α, insbesondere B und damit F eine Menge, etwa $F = f$ mit bravem f. Dieses f könnte man dann fortsetzen zu einem braven

$h := f \cup \{(\alpha, G(\alpha, f \upharpoonright \alpha))\}$ mit $\alpha \in D(F) = \alpha$, Widerspruch! □

Damit haben wir eine *explizite* mengentheoretische Definition einer Funktion erhalten, die durch eine rekursive Bedingung charakterisiert ist, und zwar erhält man die Funktion als Vereinigung von "partiellen" Lösungen der Rekursionsgleichungen.

Ähnliche Ergebnisse erhält man für eine Wohlordnung $<$ auf einer Klasse A, wobei man allerdings im Falle einer echten Klasse als Zusatzbedingung benötigt, daß für jedes $a \in A$ die Klasse aller *Vorgänger*, das durch a bestimmte Anfangssegment

$$S(a,<) := \{x \in A \mid x < a\},$$

stets wieder eine Menge ist (im Falle einer Menge ist diese Bedingung wegen des Aussonderungsaxioms stets erfüllt). In diesem Fall liefert der Rekursionssatz eine Funktion $F : A \to V$ mit

$$F(a) = G(a, F \upharpoonright S(a,<)).$$

Auch die $\in$-Beziehung erfüllt nach dem Fundierungsaxiom die Minimumsbedingung (und ebenfalls die oben erwähnte Mengenbedingung, da in diesem Fall $S(a,\in) = a$ ist. Die Minimumsbedingung läßt sich auf Klassen übertragen, indem man die **transitive Hülle** von a, d. h. die kleinste transitive Obermenge von a, benutzt:

$$\begin{aligned} TC(a) :\ &= a \cup \bigcup a \cup \bigcup\bigcup a \ldots = \bigcup_{n<\omega} U^n(a) \text{ mit} \\ & U^0(a) = a, U^{n+1}(a) = \bigcup U^n(a). \end{aligned}$$

(Zugleich haben wir hier ein Beispiel einer Funktion, die durch Rekursion auf den natürlichen Zahlen definiert wird.) Noch etwas allgemeiner lassen sich die Prinzipien der Induktion und Rekursion verallgemeinern auf *fundierte* Relationen:

Definition

Eine Relation R auf einer Klasse A ist **fundiert** gdw sie die *Minimalitätsbedingung*

$$Min_R \qquad \emptyset \neq b \subseteq A \to \exists x \in b\, \forall y \in b\, (\neg yRx)$$

sowie die *Mengenbedingung*

$$\forall x \in A\; S(a,R) := \{x \mid xRa\} \text{ ist eine Menge}$$

erfüllt (was im Falle einer *Menge A* ohnehin gilt). Die Mengenbedingung erlaubt es, zu jeder Menge a eine kleinste Obermenge $TC_R(a)$ zu bilden (ähnlich der transitiven Hülle), welche R-transitiv ist (d. h. $\forall x \in TC_R(a)\, S(x,R) \subseteq TC_R(a)$). Damit läßt sich - wie im Falle der Wohlordnung auf den Ordinalzahlen - das Minimumprinzip verstärken für Klassen:

$$Min_R^* \qquad \emptyset \neq B \subseteq A \to \exists x \in B\, \forall y \in B\, (\neg yRx),$$

und umformen in das entsprechende Induktionsprinzip

$$Ind_R \qquad \forall x \in A[\forall y(yRx \wedge \varphi(y) \to \varphi(x))] \to \forall x \in A\, \varphi(x)).$$

Hiermit kann man wiederum ein entsprechendes *Rekursionsprinzip* herleiten:

Zu jeder Funktion G existiert genau eine Funktion $F : A \to V$ mit

$$F(a) = G(a, F \restriction \{x \mid xRa\}) \text{ für alle } a \in A.$$

8.3 Anwendungen des Rekursionsprinzips

(a) *Numerische Rekursion:* Als Beispiel für die Anwendung der Rekursion auf den natürlichen Zahlen haben wir bereits die transitive Hülle einer Menge erwähnt; allgemeiner erhält man zu jeder Menge a und jeder Funktion F den Abschluß von a unter F als

$$\bigcup_{n<\omega} F^n[a] \quad \text{mit } F^0 = id,\ F^{n+1} = F \circ F^n.$$

(b) *Transfinite Rekursion:* Auf den Ordinalzahlen erklärt man z. B. die **ordinale Addition** $\alpha + \beta$ durch Rekursion nach β:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= 0 \\ \alpha + (\beta + 1) &= (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \lambda) &= \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha + \xi \quad \text{für } Lim(\lambda). \end{aligned}$$

Beginnt man mit der leeren Menge, wendet immer wieder die Potenzmengen-operation an und sammelt bei Limeszahlstellen die bisher erreichten Mengen, so erhält man die **Von NEUMANNsche Stufen**:

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \bigcup_{\xi<\lambda} V_\xi \quad \text{für } Lim(\lambda). \end{aligned}$$

(c) ε-*Induktion:* Damit (also wesentlich aufgrund des Fundierungsaxioms) kann man zeigen:

$$V = \bigcup_\alpha V_\alpha.$$

Die Frage nach der "Größe" der Gesamtheit V aller Mengen kann man daher in zwei Teilfragen aufgliedern:

- Wie "lang" ist V, d. h. wie viele Ordinalzahlen gibt es (Axiome über *große Kardinalzahlen* versuchen, diesen Bereich möglichst weit auszudehnen) und
- wie "breit" ist V, d. h. wie groß ist die Potenzmenge einer Menge?

Ein möglichst schmales Universum stellen die konstruktiblen Mengen dar, die wir im nächsten Abschnitt einführen werden zugleich mit einer Anwendung der

(d) *Rekursion für fundierte Relationen:* Isomorphiesatz von MOSTOWSKI (s. 9.5).

8.4 Konstruktible Mengen

Eine Menge a ist *definierbar* gdw

$$a = \{x \mid \varphi(x)\} \text{ gilt für eine Formel } \varphi(x).$$

Definierbare Mengen sind z. B. die Mengen

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \ stetig\} \ldots$$

Es gibt nur abzählbar-viele Formeln (sie werden ja mit Hilfe abzählbar-vieler Symbole gebildet) und somit auch nur abzählbar-viele definierbare Mengen, insbesondere gibt es nicht-definierbare reelle Zahlen. Ebenfalls gibt es überabzählbar-viele Ordinalzahlen, so daß nicht alle Ordinalzahlen definierbar sein können, also muß es eine *kleinste nicht-definierbare* Ordinalzahl α_0 geben. Da diese nicht definierbar ist, kann der Begriff "definierbar" selbst nicht definierbar sein! Tatsächlich ist die obige Definition eine *Meta*-Definition (wegen des Bestandteils "gilt für eine Formel"). Beschränkt man sich jedoch auf den Begriff der in einer Menge *a definierbaren Teilmenge*, so läßt sich dieser Begriff tatsächlich durch eine mengentheoretische Formal *formal* definieren. Dazu muß man

- die Formeln der mengentheoretischen Sprache in geeigneter Weise durch Mengen *kodieren* (man kann ihnen sogar in einfacher Weise natürliche Zahlen, genannt GÖDEL-*Nummern*, zuordnen) und
- die Gültigkeit einer Formel $\varphi(x)$ in einer Menge a (mit der gewöhnlichen Elementbeziehung) als Prädikat über a und die (GÖDEL-Nummer) der Formel mengentheoretisch formalisieren.

Diesen zweiten Schritt durchzuführen ist prinzipiell nicht schwierig, aber es ist technisch mühsam, ihn in allen Einzelheiten auszuführen.[2] Da wir ein Modell der ZF-Axiome erhalten wollen und hierin die Existenz von Mengen gefordert wird, die sich mit Hilfe von *Parametern* definieren lassen, ist es sinnvoll, diese in den Definitionen einer Menge zuzulassen, so daß z. B. die Menge $a \cup b$ definierbar ist in den Parametern a und b.

Wir setzen daher voraus, daß es eine geeignete mengentheoretische Definition von $\mathbf{Def}(a)$ als

Menge der (mit Parametern aus a) definierbaren Teilmengen von a

gibt, d. h. *Def(a)* enthält (inhaltlich) genau die Mengen der Form

$$\{x \in a \mid \varphi^a(x, a_1, \dots, a_n)\} \text{ mit } a_1, \dots, a_n \in a$$

für eine mengentheoretische Formel $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$. Dabei bezeichnet φ^a die nach *a relativierte* Formel, die aus φ entsteht, indem man in dieser Formel sämtliche Quantoren der Form $\forall y, \exists z \dots$ durch $\forall y \in a, \exists z \in a \dots$ ersetzt.

Ersetzt man in der von NEUMANN-Hierarchie die Potenzmenge durch die definierbaren Teilmengen, so erhält man die GÖDELsche Hierarchie der **konstruktiblen Mengen**:

[2]Verwiesen sei auf die Literaturangaben, insbesondere die Bücher von K. DEVLIN, am ausführlichsten: *Aspects of Constructibility*.

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset \\ L_{\alpha+1} &= Def(L_\alpha) \\ L_\lambda &= \bigcup_{\xi<\lambda} L_\xi \quad \text{für } Lim(\lambda) \\ L : &= \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt stets $L_\alpha \subseteq V_\alpha$, sogar $L_n = V_n$ für natürliche Zahlen n und damit auch $L_\omega = V_\omega$, aber $L_{\omega+1} \subset V_{\omega+1}$, da $L_{\omega+1}$ noch abzählbar, $V_{\omega+1}$ dagegen bereits überabzählbar ist.

Es ist leicht zu sehen, daß L ein transitives *Modell* von ZF ist in folgendem Sinne: alle Axiome von ZF gelten "in" L, genauer:

Satz

In ZF *ist beweisbar:*

$$trans(L) \wedge On \subseteq L \wedge \sigma^L \quad \textit{für alle Axiome } \sigma \textit{ von } \mathsf{ZF}.$$

Setzen wir die Axiome von ZF voraus, so können wir sie also relativiert nach L nachweisen und zusätzlich, daß L transitiv ist und alle Ordinalzahlen enthält. Wichtiger ist, daß die Konstruktion von L, und zwar in L durchgeführt, wiederum L ergibt ("Absolutheit" von L): definieren wir für eine Klasse A die **Relativierung** nach einer Klasse M durch

$$\{x \mid \varphi(x)\}^M = \{x \in M \mid \varphi^M(x)\},$$

so ist $L^L = L$ (*Absolutheit* von L, siehe unten). Mit der üblichen Abkürzung

$$T \vdash \sigma :\Longleftrightarrow \sigma \text{ ist aus } T \text{ beweisbar}$$

erhalten wir den

Satz

(i) $\mathsf{ZF} \vdash trans(L) \wedge On \subseteq L \wedge \sigma^L$ *für alle Axiome* σ *von* $\mathsf{ZF} + \mathsf{V} = \mathsf{L}$,

(ii) *ist* ZF *widerspruchsfrei, so auch* $\mathsf{ZF} + \mathsf{V} = \mathsf{L}$.

Damit sind dann auch alle Folgerungen aus dem

Axiom der Konstruktibilität $\mathsf{V} = \mathsf{L}$

widerspruchsfrei (relativ zur Basistheorie ZF).

Satz

(i) $\mathsf{ZF} + \mathsf{V} = \mathsf{L} \vdash \mathsf{AC} \wedge \mathsf{GCH}$, *insbesondere*

(ii) ist ZF widerspruchsfrei, so auch $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC} + \mathsf{GCH}$.

Die Gültigkeit des Auswahlaxioms in L zeigt man durch die Angabe einer einfach definierbaren Wohlordnung $<_L$ von L (aus einer Wohlordnung einer Menge a und einer natürlichen Wohlordnung aller mengentheoretischen Formeln erhält man eine Wohlordnung aller Formeln sowie der endlichen Folgen von Elementen von a und damit eine Wohlordnung aller definierbaren Teilmengen von a), während die Gültigkeit der allgemeinen Kontinuumshypothese schwieriger nachzuweisen ist und vor allem darauf beruht, daß man in der Hierarchie der konstruktiblen Mengen statt der vollen Potenzmenge nur die Menge der definierbaren Teilmengen iteriert.

Für die nähere Untersuchung von L (insbesondere schon für die Absolutheit) benötigt man Aussagen über die Komplexität der Definition von L, welche man zunächst im mengentheoretischen Rahmen nach A. LEVY bestimmt:

Wie üblich benutzen wir als Abkürzungen **beschränkte Quantoren** $\forall x \in a$, $\exists x \in a$:

$$\begin{aligned} \forall x \in a\, \varphi \quad &\text{steht für} \quad \forall x(x \in a \rightarrow \varphi), \\ \exists x \in a\, \varphi \quad &\text{steht für} \quad \exists x(x \in a \wedge \varphi). \end{aligned}$$

Damit wird nun festgelegt:

$$\begin{array}{rcll} \varphi \text{ ist } \Delta_0\text{-Formel:} & \iff & \varphi & \text{enthält höchstens beschränkte Quantoren} \\ \varphi \text{ ist } \Sigma_1\text{-Formel:} & \iff & \varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_m\, \psi & \text{für eine } \Delta_0\text{-Formel } \psi \\ \varphi \text{ ist } \Pi_1\text{-Formel:} & \iff & \varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_m\, \psi & \text{für eine } \Delta_0\text{-Formel } \psi. \end{array}$$

φ ist Δ_1-Formel, wenn sie sowohl Σ_1- wie auch Π_1-Formel ist (genauer zu solchen Formeln logisch äquivalent ist). Oft benötigt man Axiome, um eine gegebene Eigenschaft möglichst einfach ausdrücken zu können. Für eine Formelmenge Γ ist dann Γ^{T} die Menge der Formeln, welche in der Theorie T äquivalent zu einer Formel in Γ sind. Insbesondere ist

$$\begin{array}{rcl} \varphi\ \Delta_1^{\mathsf{T}}\text{-Formel:} & \iff & \mathsf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi_1 \text{ für eine } \Sigma_1\text{-Formel } \psi_1 \text{ und zugleich} \\ & & \mathsf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi_2 \text{ für eine } \Pi_1\text{-Formel } \psi_2. \end{array}$$

Diese Formeln sind wichtig, weil sie gerade noch **absolut** bezüglich aller transitiven Modelle von T sind:

Ist M transitives Modell von T, so gilt für jede Δ_1^{T}-Formel $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$:

$$a_1,\ldots,a_n \in M \to (\varphi(a_1,\ldots,a_n) \leftrightarrow \varphi^M(a_1,\ldots,a_n)).$$

Satz

Die Prädikate bzw. die Aussage

$$\begin{array}{rl} a = Def(b),\ a = L_\alpha,\ a \in L_\alpha & \textit{sind}\ \ \Delta_1^{\mathsf{ZF}}\textit{-definierbar}, \\ a \in L & \textit{ist}\ \ \Sigma_1^{\mathsf{ZF}}\textit{-definierbar}, \\ V = L & \textit{ist}\ \ \Pi_2^{\mathsf{ZF}}\textit{-definierbar}. \end{array}$$

Da wir uns hier für die reellen Zahlen und ihre Teilmengen interessieren, müssen wir die mengentheoretische Komplexität in die Komplexität der projektiven Mengen umrechnen. Dazu läßt sich das obere Ergebnis verfeinern: die Prädikate $a \in L, a <_L b$ sind durch Σ_1^{ZF}-Formeln in der Menge

$$HC := \{x \mid TC(x) \text{ abzählbar}\}$$

der *erblich-abzählbaren* Mengen definierbar. Im nächsten Kapitel (s. 9.5) werden wir zeigen, daß sich jedes so definierte Prädikat in ZF durch Σ_2^1-Formeln über $\mathbb{R}$ definieren läßt, und damit gilt der

Satz

(i) *Die Menge der konstruktiblen reellen Zahlen $\mathbb{R} \cap L$ ist Σ_2^1,*

(ii) *die Wohlordnung $<_L \cap L$ auf den konstruktiblen reellen Zahlen ist eine Σ_2^1-Relation über $\mathbb{R}$; im Falle $V = L$ ist sie sogar Δ_2^1.*

(Dabei kann $\mathbb{R}$ durch $\mathcal{N}$ oder $\mathcal{C}$ ersetzt werden.) Hieraus erhalten wir als

Folgerungen

Falls $\mathsf{V} = \mathsf{L}$, *so gibt es*

(i) *eine* Δ^1_2*-Menge reeller Zahlen, welche nicht* LEBESGUE*-meßbar ist und auch nicht die* BAIRE*-Eigenschaft besitzt,*

(ii) *eine überabzählbare* Π^1_1*-Menge reeller Zahlen ohne die Perfekte-Mengen-Eigenschaft.*

Beweis von (i): Wir zeigen, daß $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x <_L y\}$ eine Teilmenge von R^2 ist, welche weder LEBESGUE-meßbar ist noch die BAIRE-Eigenschaft besitzt:

A ist eine Wohlordnung der reellen Zahlen vom Ordnungstyp ω_1 und somit ist für jede reelle Zahl y die Menge $\{x \mid (x,y) \in A\} = \{x \mid x <_L y\}$ abzählbar, daher ist A eine Nullmenge, falls A LEBESGUE-meßbar ist und eine magere Menge, wenn A die BAIRE-Eigenschaft besitzt. Ebenso gilt für das Komplement $B := \mathbb{R}^2 - A = \{(x,y) \mid y \leq_L x\}$: Für jedes reelle x ist die Menge $\{y \mid (x,y) \in B\}$ abzählbar, also ist auch B eine Nullmenge, falls B LEBESGUE-meßbar ist, und eine magere Menge, wenn B die BAIRE-Eigenschaft besitzt. Somit kann A weder LEBESGUE-meßbar sein noch die BAIRE-Eigenschaft besitzen. □

Aus (ii) folgt, daß der Satz 7.6 über die Perfekte-Mengen-Eigenschaft optimal ist: die Methode des Nachweises der Kontinuumseigenschaft (C) über die Perfekte-Mengen-Eigenschaft (P) läßt sich nur bis zu den analytischen Mengen anwenden und scheitert bereits bei den co-analytischen Mengen. Wir werden dieses Ergebnis im nächsten Kapitel im Rahmen der effektiven Deskriptiven Mengenlehre behandeln.

8.5 Große Kardinalzahlen

Die Annahme $\mathsf{V} = \mathsf{L}$ beantwortet viele offene Fragen über Mengen reeller Zahlen, wird aber oft als zu starke Einschränkung des Mengenbegriffes empfunden; Axiome über die Existenz großer Kardinalzahlen führen dagegen zu einem erweiterten Mengenbegriff und geben neue Antworten auf Fragen der Deskriptiven Mengenlehre, die im Rahmen von ZFC allein nicht entschieden werden können.

Wir erinnern zunächst an die Aufzählung der unendlichen Kardinalzahlen mittels der Aleph-Funktion:

$$\aleph_0 = \omega, \quad \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+, \quad \aleph_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \aleph_\xi \text{ für Limeszahlen } \lambda.$$

Dabei ist κ^+ die kleinste Kardinalzahl $> \kappa$ und für Limeszahlen λ ist $\bigcup_{\xi<\lambda} \aleph_\xi$ tatsächlich eine Kardinalzahl, und zwar das Supremum der kleineren Kardinalzahlen $\aleph_\xi, \xi < \lambda$, so daß hierdurch die unendlichen Kardinalzahlen der Größe nach aufgezählt werden. In der Folge der Kardinalzahlen fallen einige auf, welche Limites von weniger-vielen Kardinalzahlen sind, z. B. ist

$$\aleph_\omega = \bigcup_{n<\omega} \aleph_n$$

nicht mehr abzählbar, aber doch Limes von abzählbar-vielen kleineren Kardinalzahlen. Solche Kardinalzahlen heißen **singulär**, die übrigen **regulär**:

$$reg(\kappa) :\leftrightarrow \forall\alpha < \kappa \,\forall f \, (f : \alpha \to \kappa \;\to\; \bigcup_{\xi<\alpha} f(\xi) < \kappa).$$

Eine reguläre Kardinalzahl κ kann somit nicht durch weniger als κ-viele Schritte erreicht werden. Offensichtlich ist $\aleph_0 = \omega$ regulär (das Supremum endlich-vieler natürlicher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl), und mit Hilfe des Auswahlaxioms zeigt man leicht, daß alle Nachfolgerkardinalzahlen, also alle $\aleph_{\alpha+1}$ ebenfalls regulär sind. Dagegen sind

$$\aleph_\omega, \aleph_{\omega+\omega}, \aleph_{\aleph_\omega}, \aleph_{\aleph_{\aleph_\omega}}, \ldots$$

singulär, und es stellt sich die Frage, ob es reguläre Kardinalzahlen der Form $\aleph_\lambda$ mit Limeszahlindex λ gibt, welche also auch nicht durch die Operation des kardinalen Nachfolgers erreicht werden können:

Definition (HAUSDORFF 1908, TARSKI, ZERMELO 1930)

Es sei $\kappa > \omega$ eine überabzählbare Kardinalzahl.

$$\begin{aligned}
\kappa\ (schwach)\ unerreichbar: &\quad\leftrightarrow\quad reg(\kappa) \wedge \exists\lambda(Lim(\lambda) \wedge \kappa = \aleph_\lambda) \\
&\quad\leftrightarrow\quad reg(\kappa) \wedge \forall\alpha < \kappa\ \alpha^+ < \kappa \\
\kappa\ (stark)\ unerreichbar: &\quad\leftrightarrow\quad reg(\kappa) \wedge \forall\alpha < \kappa\ 2^{\underline{\alpha}} < \kappa
\end{aligned}$$

Bemerkungen

- Manchmal zählt man auch $\aleph_0$ zu den unerreichbaren Kardinalzahlen (diese Zahl ist regulär und erfüllt auch die beiden letzten der obigen Bedingungen), und alle unerreichbaren Zahlen sind auch schwach unerreichbar. Falls man die

  Allgemeine Kontinuumshypothese $\mathsf{GCH} \quad \forall\alpha\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^+$

  voraussetzt (also z. B. unter der Annahme $\mathsf{V} = \mathsf{L}$), stimmen die schwach unerreichbaren mit den (stark) unerreichbaren Zahlen überein.

- Für ein unerreichbares $\kappa > \omega$ muß gelten: $\kappa = \aleph_\kappa$, die erste derartige Zahl ist jedoch singulär, tatsächlich kann κ erst die κ-te Zahl dieser Fixpunkte sein, unter diesen aber auch nicht die erste, sondern erst die κ-te Zahl ...

  Falls die Mengenlehre ZFC widerspruchsfrei ist, kann man in ZFC die Existenz unerreichbarer Zahlen $> \aleph_0$ nicht beweisen, und zwar ist für ein derartiges κ die Menge V_κ (mit der gewöhnlichen $\in$-Beziehung) ein Modell von ZFC.

Erstaunlich ist, daß die Existenz einer derartig großen Zahl Folgerungen für die reellen Zahlen hat, zunächst nur in der Form einer relativen Widerspruchsfreiheit:

Satz von Solovay

Falls eine unerreichbare Zahl existiert, so gilt:

(i) *es gibt ein Modell von* $\mathsf{ZF} + \mathsf{DC}$, *in welchem alle Mengen von reellen Zahlen* LEBESGUE-*meßbar sind und sowohl die* BAIRE-*Eigenschaft wie auch die Perfekte-Mengen-Eigenschaft besitzen,*

(ii) *es gibt ein Modell von* $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC}$, *in welchem alle projektiven Mengen von reellen Zahlen* LEBESGUE-*meßbar sind und sowohl die* BAIRE-*Eigenschaft wie auch die Perfekte-Mengen-Eigenschaft besitzen.*[3]

[3] R.M. Solovay: *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue-measurable*, Annals of Math. 92 (1970), pp. 1-56

Daß man die Voraussetzung der Existenz einer unerreichbaren Zahl tatsächlich benötigt, hat SHELAH[4] 1984 gezeigt. Vorher hatte bereits SPECKER 1957 bewiesen: Besitzt jede CA-Menge die Perfekte-Mengen-Eigenschaft, so ist die erste überabzählbare Kardinalzahl $\aleph_1$ in L eine unerreichbare Zahl, also L ein Modell von ZFC, in welchem eine unerreichbare Zahl existiert, welche "in Wirklichkeit" sehr klein ist! Nach MANSFIELD und SOLOVAY gilt sogar:

Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) *alle Mengen von reellen Zahlen besitzen die Perfekte-Mengen-Eigenschaft,*

(ii) $\aleph_1$ *ist unerreichbare Kardinalzahl in L.*

Dagegen bezieht sich folgendes Ergebnis wiederum nur auf die Konsistenz von Theorien:

Satz

Die Widerspruchsfreiheit folgender Theorien ist äquivalent:

(i) $\mathsf{ZF} + \mathsf{DC}+$ *alle Mengen von reellen Zahlen besitzen die Perfekte-Mengen-Eigenschaft,*

(ii) $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC} + \exists\kappa\ \kappa$ *ist unerreichbare Kardinalzahl.*

Die Annahme, daß alle Mengen reeller Zahlen die BAIRE-Eigenschaft besitzen, ist dagegen schwächer und benötigt für die Widerspruchsfreiheit nicht die Existenz einer unerreichbaren Zahl.

[4] S. Shelah: *Can you take Solovay's inaccessible away?* Israel J. Math, 48 (1984), pp. 1-47

8.6 Meßbarkeit

Die *Lebesgue-meßbaren* Mengen bilden eine Teilmenge $L \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, auf welcher das *Lebesgue-Maß* definiert ist als Abbildung

$$m : L \longrightarrow \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} \cup \{\infty\},$$

so daß gilt:

(L1) L enthält die offenen und abgeschlossenen Intervalle:
$(a,b), [a,b] \in L$ für alle reellen Zahlen $a < b$, und es ist $m([a,b]) = b - a$.

(L2) L ist ein *Mengenring*, d. h. $A, B \in L \rightarrow A \cup B, A \cap B, A - B \in L$.

(L3) $A \subseteq B \rightarrow m(A) \leq m(B)$. *Monotonie*

(L4) Ist $(A_i | i < \omega)$ eine abzählbare Folge von Mengen $\in L$, so ist auch
$\bigcup_{i<\omega} A_i \in L$, und falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so
$m(\bigcup_{i<\omega} A_i) = \sum_{i<\omega} m(A_i)$, *$\sigma$-Additivität*

(L5) $A \in L \wedge r \in \mathbb{R} \rightarrow A + r = \{a + r | a \in A\} \in L$
und $m(A) = m(A + r)$. *Translationsinvarianz*

In seiner Dissertation stellte HENRI LEBESGUE 1902 das *Maßproblem*: *Gibt es ein derartiges Maß auf allen Mengen reeller Zahlen?* Bereits 1905 gab GIUSEPPE VITALI eine negative Antwort:

Satz von Vitali

Es existiert eine Menge reeller Zahlen, die nicht LEBESGUE-*meßbar ist.*

Beweis: Auf den reellen Zahlen im Intervall $[0,1]$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$x \sim y :\leftrightarrow x, y \in [0,1] \ \wedge \ x - y \in \mathbb{Q}.$$

Nach dem Auswahlaxiom existiert hierzu ein Repräsentantensystem S, d. h.

$$S \subseteq [0,1] \ \wedge \ \forall x \in [0,1] \ \exists! y \in S \ (x \sim y).$$

Setzen wir $S_r := \{x + r \mid x \in S\} = S + r$, so ist $\mathbb{R} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}} S_r$, und es ist

$$S_r \cap S_t = \emptyset \quad \text{für } r, t \in \mathbb{Q}, \ r \neq t.$$

Wäre S LEBESGUE-meßbar, also $S \in L$, so erhielte man im Falle $m(S) = 0$: $m(\mathbb{R}) = 0$, und im Falle $m(S) > 0 : 2 = m([0,2]) = \infty$, Widerspruch! Somit ist die Menge S nicht Lebesgue-meßbar. □

(Die Menge S von VITALI besitzt übrigens auch nicht die BAIRE-Eigenschaft.) Abgesehen davon, daß (L3) aus den übrigen Forderungen folgt, zeigt der Beweis, daß die Bedingungen für die Existenz einer nicht-meßbaren Menge noch etwas abgeschwächt werden können: benötigt werden nur (L4), (L5) und die Nicht-Trivialität von m (es gibt eine beschränkte Menge A mit $m(A) \neq 0$). BANACH verallgemeinerte das Problem, indem er die Translationsinvarianz wegließ und triviale Fälle durch die Forderung ersetzte, daß $m(\{x\}) = 0$ ist für alle reellen Zahlen x. Nach BANACH-KURATOWSKI 1929 gibt es aber auch hierfür keine Lösung, wenn man die Kontinuumshypothese annimmt. Benutzt man die Translationsinvarianz, so kann man das Maßproblem auf Mengen $A \subseteq [0,1]$ beschränken, das Einheitsintervall durch eine beliebige Menge I ersetzen und das Maß dort auf 1 normieren. Damit stellt sich die Frage, ob es eine nicht-leere Menge M gibt mit einer Maßabbildung

$$m : \mathcal{P}(M) \to \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\},$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

(M1) $m(M) = 1$ *normiert*

(M2) $\forall x \in M\ m(\{x\}) = 0$ *nicht-trivial*

(M3) ist $(A_i \mid i < \omega)$ eine abzählbare Folge von Mengen $\subseteq M$, so ist $m(\bigcup_{i<\omega} A_i) = \sum_{i<\omega} m(A_i)$, *$\sigma$-additiv*

Hier kommt es nun auf die Struktur auf der Menge M überhaupt nicht mehr an, so daß man M durch eine Kardinalzahl κ ersetzen kann. Eine Funktion m auf $\mathcal{P}(\kappa)$, welche obere Bedingungen erfüllt, heißt **Maß** auf κ. Eine natürliche Verstärkung von (M3) ist die **κ-Additivität**:

Ist $\gamma < \kappa$ und $(A_\xi \mid \xi < \lambda)$ eine Folge disjunkter Teilmengen von κ, so ist

$$m(\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi) = \sum_{\xi<\gamma} m(A_\xi).$$

(Dabei ist unter der transfiniten Summe das Supremum aller Summen von endlichen Teilmengen zu verstehen; ω_1-additiv ist also σ-additiv.) BANACH zeigte nun den

Satz

Ist κ die kleinste Kardinalzahl, welche ein Maß besitzt, so ist jedes Maß auf κ bereits κ-additiv.

Beweis: Angenommen, m wäre ein Maß auf κ, welches nicht κ-additiv ist. dann gibt es also für ein $\gamma < \kappa$ eine Folge $(A_\xi \mid \xi < \gamma)$ disjunkter Teilmengen von κ, so daß $m(\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi) \neq \sum_{\xi<\gamma} m(A_\xi)$. Da ein Maß stets σ-additiv ist, muß $\gamma > \omega$ sein, und man kann leicht zeigen, daß es nur abzählbar-viele A_ξ geben kann mit $m(A_\xi) > 0$. Läßt man diese weg, so kann man wegen der σ-Additivität annehmen, daß stets $m(A_\xi) = 0$, während $\sum_{\xi<\gamma} m(A_\xi) = r > 0$. Dann erhält man aber mittels

$$\overline{m}(X) = \frac{m(\bigcup_{\xi \in X} A_\xi)}{r}$$

ein Maß über $\gamma < \kappa$ im Widerspruch zur Minimalität von κ. □

Bemerkungen und Definitionen

1. Ist m ein Maß auf κ, so ist
   - $I_m := \{x \subseteq \kappa \mid m(x) = 0\}$ ein ω_1-vollständiges Ideal auf κ, welches kein Hauptideal ist,
   - $F_m := \{x \subseteq \kappa \mid m(x) = 1\}$ ein ω_1-vollständiger Filter auf κ, welcher kein Hauptfilter ist.
2. Ein 2-**wertiges Maß** ist ein Maß, welches nur die Werte 0 und 1 annimmt. In diesem Fall ist der entsprechende Filter F_m ein Ultrafilter (und I_m ein Primideal).

   Ist umgekehrt U ein ω_1-vollständiger Filter auf κ, welcher kein Hauptfilter ist, und definiert man eine Abbildung $m : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0,1\}$ durch
   $$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
   so erhält man ein 2-wertiges Maß m auf κ.
3. Ein Filter, welcher kein Hauptfilter ist, heißt **freier** Filter.

4. κ sei eine überabzählbare Kardinalzahl. Dann heißt

$$\begin{aligned} \kappa\ \textbf{reell-wertig meßbar} &: \leftrightarrow \exists m(m\ \kappa\text{-additives Maß auf } \kappa) \\ \kappa\ \textbf{meßbar} &: \leftrightarrow \exists m(m\ \kappa\text{-additives 2-wertiges Maß auf } \kappa) \\ &\quad \leftrightarrow \exists U(U\ \kappa\text{-vollständiger freier Ultrafilter auf } \kappa) \end{aligned}$$

Da man (mit Hilfe des Auswahlaxioms) den FRÉCHET-Filter der co-endlichen Mengen von natürlichen Zahlen zu einem Ultrafilter auf ω erweitern kann, der dann kein Hauptfilter sein kann, erfüllt auch ω die Bedingung, die an eine meßbare Kardinalzahl gestellt werden kann, wird aber i. a. nicht dazugerechnet, da die überabzählbaren meßbaren Zahlen zu den großen Kardinalzahlen gehören, deren Existenz man in ZFC nicht beweisen kann. Tatsächlich gilt:

- jede reell-wertig meßbare Kardinalzahl κ ist schwach unerreichbar,
- jede meßbare Kardinalzahl κ ist (stark) unerreichbar (aber nicht umgekehrt),
- ist κ reell-wertig meßbar, so ist κ meßbar oder $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$
(ist also κ reell-wertig meßbar, aber nicht meßbar, so muß $2^{\aleph_0}$ sehr groß sein).

Die kleinste unerreichbare Zahl ist noch nicht meßbar, tatsächlich liegen unter einer unerreichbaren Zahl κ κ-viele kleinere unerreichbare Zahlen, und während die Existenz einer unerreichbaren Zahl noch mit der Annahme $V = L$ verträglich ist, widerspricht die Existenz einer meßbaren Zahl diesem Axiom, hat dafür aber weitere Konsequenzen für die projektive Hierarchie:

Satz

In der Theorie ZFC + MC : *"es existiert eine meßbare Kardinalzahl" ist beweisbar:*

- $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-Mengen haben die Perfekte-Mengen-Eigenschaft (P) und erfüllen damit auch die Kontinuumshypothese,*
- $\mathbf{\Sigma}^1_2$*- und* $\mathbf{\Pi}^1_2$*-Mengen haben die* BAIRE*-Eigenschaft und sind* LEBESGUE*-meßbar.*

8.7 Zusammenfassung

Wir fassen hier zusammen, welche Eigenschaften von Mengen reeller Zahlen sich in ZFC und möglichen Erweiterungen durch Zusatzaxiome nachweisen lassen. Dazu betrachten wir folgende **Eigenschaften** von Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$:

(P) A abzählbar $\vee$ A enthält eine perfekte Menge,

(C) A abzählbar $\vee$ $|A| = |\mathbb{R}|$,

(B) A besitzt die BAIRE-Eigenschaft,

(L) A ist LEBESGUE-meßbar.

a) In ZFC ist beweisbar:

- Nicht alle Mengen haben die Eigenschaft (P) bzw. (L) bzw. (B),
- $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Mengen haben die Eigenschaft (P) und damit auch (C),
- $\mathbf{\Sigma}^1_1$- und $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen haben die Eigenschaften (B) und (L),
- $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen sind Vereinigung von $\aleph_1$-vielen BOREL-Mengen, und damit gilt für $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen A: falls $|A| > \aleph_1$, so $|A| = |\mathbb{R}|$.
- $\mathbb{R}$ hat keine $\mathbf{\Sigma}^1_1$- und auch keine $\mathbf{\Pi}^1_1$-Wohlordnung.

Diese Ergebnisse sind größtenteils optimal, denn

b) In $\mathsf{ZF} + \mathsf{V} = \mathsf{L}$ ist beweisbar:

- *alle* Mengen haben die Eigenschaft (C) (es gilt die Kontinuumshypothese),
- *nicht alle* $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen haben die Eigenschaft (P),
- *nicht alle* $\mathbf{\Delta}^1_2$- Mengen haben die Eigenschaften (B) und (L),
- $\mathbb{R}$ *hat* eine $\mathbf{\Delta}^1_2$-Wohlordnung.

Mit Hilfe der Existenz großer Kardinalzahlen kann man die positiven Eigenschaften in der projektiven Hierarchie eine Stufe höher nachweisen:

c) In $\mathsf{ZFC} + \mathsf{MC}$: “es existiert eine meßbare Kardinalzahl” ist beweisbar:

- $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen haben die Eigenschaft (P) und damit auch (C),
- $\mathbf{\Sigma}^1_2$- und $\mathbf{\Pi}^1_2$-Mengen haben die Eigenschaften (B) und (L).

Trivial werden dagegen die Ergebnisse unter der Annahme des Axioms der **Determiniertheit** AD (welches dem Auswahlaxiom widerspricht):

d) In $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$: ist beweisbar:

- *alle* Mengen haben die Eigenschaft (B), (P) und (L),
- $\mathbb{R}$ hat keine Wohlordnung.

Da die Menge der reellen Zahlen somit keine Wohlordnung besitzt, ihre Mächtigkeit also kein Aleph ist, macht die Kontinuumseigenschaft (C) hier wenig Sinn. Das Axiom der Determiniertheit werden wir im nächsten Abschnitt behandeln.

Kapitel 9

Effektive Deskriptive Mengenlehre

9.1 Berechenbare Funktionen auf $\mathcal{N}$

Wir setzen hier eine gewisse Vertrautheit mit Begriffen der Theorie der berechenbaren (= rekursiven) Funktionen voraus, wobei es sich um Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ handelt. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist dann rekursiv gdw ihre charakteristische Funktion berechenbar ist. Außerdem benötigen wir den Begriff eines *Programmes mit Orakel a*, welches ein Computerprogramm (geeignet präzisiert, etwa für eine TURING-Maschine) ist, welches zusätzlich zu den üblichen Anweisungen Abfragen nach dem Wert von $a(n)$ vornehmen darf. Eine Funktion

$$f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$$

heißt

- **berechenbar** genau dann, wenn es ein Programm P gibt, so daß für $x \in \mathcal{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ das Programm P mit dem Orakel x und der Eingabe n nach endlich-vielen Schritten stoppt und den Wert $f(x)(n)$ ausgibt,

- **berechenbar in** a genau dann, wenn es ein Programm P für 2 Orakel gibt, so daß für $x \in \mathcal{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ das Programm P mit den beiden Orakeln x und a und der Eingabe n nach endlich-vielen Schritten stoppt und den Wert $f(x)(n)$ ausgibt.

Interessant ist nun der folgende Zusammenhang:

Satz

Eine Funktion $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ ist stetig gdw es ein $a \in \mathcal{N}$ gibt, so daß f berechenbar in a ist.

Beweis: Es sei $X := \{(t,s) \mid f^{-1}(N_t) \subseteq N_s\}$. Ist f stetig, so gilt für $x \in \mathcal{N}, f(x) = y$, daß es für alle n ein m gibt mit $(x \restriction m, y \restriction n) \in X$. Somit ist f berechenbar von X: Gegeben seien die Orakel X und x sowie die Eingabe n. Das Programm besteht darin, X zu durchsuchen, bis ein $(t,s) \in X$ auftaucht, so daß $t \subseteq x$ und $|s| > n$ ist. Es ist dann $f(x)(n) = s(n)$.

Sei nun umgekehrt f berechenbar von einem Programm P mit Orakel a und $f(x) = y$. Zu jedem m gibt es ein n, so daß aus $x \restriction n = a \restriction n$ folgt $f(a) \restriction m = y \restriction m$, denn ein Programm kann bei jeder Berechnung nur jeweils endlich-viele Anfragen an das Orakel stellen. Somit gilt $f[N_{x\restriction n}] \subseteq N_{y\restriction m}$, also ist f stetig. □

9.2 Die arithmetische Hierarchie

In diesem Kapitel betrachten wir Polnische Räume der Form $\mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^l$, welche für $k > 0, l = 0$ homöomorph zu $\mathbb{N}$ und für $l > 0$ homöomorph zu $\mathcal{N}$ sind.
Für $X = \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^l$ sei

$$S_X := \{(m_1, \ldots, m_k, s_1, \ldots s_l) \mid m_1, \ldots m_k \in \mathbb{N} \wedge s_1, \ldots s_l \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$$

und für $s = (m_1, \ldots, m_k, s_1, \ldots s_l) \in S_X$ sei

$$N_s := \{(m_1, \ldots, m_k, a_1, \ldots a_l) \in X \mid \forall i\, (1 \leq i \leq l \to s_i \subseteq a_i)\},$$

so daß $\{N_s | s \in S_X\}$ eine Basis von offen-abgeschlossenen Mengen für die Topologie auf X ist. S_X ist abzählbar und läßt sich rekursiv auf $\mathbb{N}$ abbilden, so daß wir oft S_X mit $\mathbb{N}$ identifizieren, zumindest von (partiell-)rekursiven Funktionen $f : \mathbb{N} \to S_X$ sprechen können.

Im folgenden werden wir uns der Einfachheit halber meistens auf Teilmengen des BAIRE-Raumes $\mathcal{N}$ beschränken. Der Hierarchie der BOREL-Mengen endlicher Stufe entspricht als "effektives" Analogon die *arithmetische Hierarchie*. Während die BORELschen Klassen mit einem "boldface" Symbol $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ bezeichnet werden, verwendet man für die entsprechenden Klassen der arithmetischen Hierarchie (wie auch später der analytischen Hierarchie) das "lightface" Symbol Σ^0_n; alle in den früheren Kapiteln auftretenden Symbole sind also als "boldface" zu lesen.

Zur Definition der Klassen der **arithmetischen Hierarchie** benutzen wir die Charakterisierung durch die logische Komplexität der definierenden Formeln, wobei den *offen-abgeschlossenen Mengen* jetzt die *rekursiven Mengen* entsprechen:
Arithmetische Hierarchie (lightface-Symbole!)

$$\begin{aligned}
\Sigma^0_1 &= \{A \subseteq \mathcal{N} \mid A = \{a \in \mathcal{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\, R(a \restriction n)\} \text{ für ein rekursives } R\},\\
\Pi^0_n &= \neg\Sigma^0_n,\\
\Sigma^0_{n+1} &= \exists^\omega\, \Pi^0_n,\\
\Delta^0_n &= \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n.
\end{aligned}$$

Eine typische Σ^0_3-Teilmenge von $\mathcal{N}$ ist also von der Form

$$A = \{a \in \mathcal{N} \mid \exists n_1\, \forall n_2 \exists n_3\, R(n_1, n_2, a \restriction n_3)\}$$

für ein rekursives R.

Entsprechend sind die Σ^0_1-Teilmengen von N von der Form

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}\, R(m)\}$$

für ein rekursives R; sie werden auch **rekursiv-aufzählbar** (r.e. oder c.e) genannt und können im Falle $A \subseteq \mathbb{N}$ auch als die Mengen charakterisiert werden, die leer oder Wertebereich einer rekursiven Funktion sind.

Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **arithmetisch** gdw sie in einer der Klassen der arithmetischen Hierarchie vorkommt.

Ersetzt man in den obigen Definitionen “rekursiv” durch “rekursiv in a”, so erhält man die entsprechenden *relativierten* Begriffe wie $\Sigma^0_1(a)$ (diese Symbole sind immer “lightface”).

Da jede offene Menge $\Sigma^0_1(a)$ in einem a ist (welches die entsprechende Vereinigung der offen-abgeschlossenen Basismengen kodiert) gilt:

Lemma

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_1 = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Sigma^0_1(a).$$

9.3 Die analytische (KLEENE-) Hierarchie

(analytical hierarchy - nicht zu verwechseln mit den analytischen Mengen (analytic sets)) ist das effektive Analogon der projektiven Hierarchie:

Eine Menge $A \subseteq \mathcal{N}$ ist Σ^1_1 (lightface) gdw es eine rekursive Relation

$$R \subseteq \bigcup_{n<\omega} (\mathbb{N}^n \times N^n)$$

gibt, so daß für alle $x \in \mathcal{N}$ gilt:

$$x \in A \leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, R(x \upharpoonright n, y \upharpoonright n),$$

eine Menge $A \subseteq \mathcal{N}$ ist $\Sigma^1_1(a)$ gdw es eine in a rekursive Relation R gibt, so daß für alle $x \in \mathcal{N}$ gilt:

$$x \in A \leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, R(x \upharpoonright n, y \upharpoonright n, a \upharpoonright n).$$

Wie im Falle der projektiven Hierarchie (boldface) erhält man durch wiederholte Operationen der Komplementbildung und Projektionen längs $\mathcal{N}$ die

Analytische Hierarchie bzw. KLEENE-**Hierarchie** (lightface-Symbole!)

$$\begin{array}{rcl} \Pi^1_n & = & \neg\Sigma^1_n, \\ \Sigma^1_{n+1} & = & \exists^{\mathcal{N}}\, \Pi^1_n, \\ \Delta^1_n & = & \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n. \end{array}$$

Die entsprechenden relativierten Klassen werden wieder mit $\Sigma^1_n(a), \Pi^1_n(a)$ und $\Delta^1_n(a)$ bezeichnet (diese kommen immer nur lightface vor).

Aus obigem Lemma und der Charakterisierung der $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ (boldface= analytische Mengen) als Mengen, die mittels der Operation $\mathcal{A}$ aus den abgeschlossenen Mengen erhalten werden können, erhalten wir somit;

Lemma

$$\boldsymbol{\Sigma}^1_1 = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Sigma^1_1(a).$$

Entsprechende Aussagen gelten auch für die höheren Klassen. Mit Hilfe der früher erwähnten Präfixumformungen erhalten wir die üblichen

Abschlußeigenschaften

(i) *Sind A,B* $\Sigma^1_n(a)$-Relationen, so auch $A \wedge B, A \vee B, \exists^{\mathbb{N}} A, \forall^{\mathbb{N}} A$ und $\exists^{\mathcal{N}} A$,

(ii) *sind A,B* $\Pi^1_n(a)$-Relationen, so auch $A \wedge B, A \vee B, \exists^{\mathbb{N}} A, \forall^{\mathbb{N}} A$ und $\forall^{\mathcal{N}} A$,

(iii) *sind* A,B $\Delta^1_n(a)$-Relationen, so auch $\neg A, A \to B, A \leftrightarrow B, A \wedge B, A \vee B$, und $\exists^{\mathbb{N}} A, \forall^{\mathbb{N}} A$.

Eine genaue Analyse des Parametrisierungssatzes 5.8 ergibt, daß es sogar eine (lightface) Σ^1_n-Menge $A \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ gibt, die universell für die Punktklasse $\mathbf{\Sigma}^1_n$ ist.

9.4 Coanalytische Mengen

In 4.2 haben wir bereits gesehen, daß sich abgeschlossene Mengen von $\mathcal{N}$ in der Form $[T]$ (Menge der unendlicher Zweige des Baumes T) darstellen lassen. Ähnliches gilt für abgeschlossene Mengen von $\mathcal{N}^r$ (wir beschränken uns auf den Fall $r = 2$:

Definition

Eine Menge $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ heißt (2-dimensionaler) **Baum** gdw

(i) $(s,t) \in T \to |s| = |t|$ und

(ii) $(s,t) \in T \wedge n \leq |s| \;\to\; (s \upharpoonright n, t \upharpoonright n) \in T$.

Ein **unendlicher Zweig** von T ist ein Paar $(x,y) \in \mathcal{N}^2$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}\, (x \upharpoonright n, y \upharpoonright n) \in T.$$

Ähnlich wie in 4.2 sei $[T]$ die Menge der unendlichen Zweige von T. Ferner sei für einen Baum $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ und $x \in \mathcal{N}$

$$T(x) := \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} \mid \exists n \in \mathbb{N}\, (x \upharpoonright n, s) \in T\}.$$

Ein Baum T heißt **fundiert** gdw $[T] = \emptyset$, d. h. wenn er keine unendlichen Zweige besitzt.

Jede analytische Menge A ($A \in \mathbf{\Sigma}^1_1$) ist Projektion von $[T]$ für einen 2-dimensionalen Baum T, also für alle $x \in \mathcal{N}$:

$$x \in A \leftrightarrow T(x) \text{ ist nicht fundiert.}$$

Ist $A \in \Sigma^1_1$, so gibt es ein *rekursives* R mit

$$x \in A \leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\; R(x \upharpoonright n, y \upharpoonright n).$$

Ist

$$\begin{aligned} T: &= \{(t,s) \in \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega} \mid \forall n \leq |s|\ R(t \upharpoonright n, s \upharpoonright n)\}, \text{ so ist} \\ T(x) &= \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} \mid \forall n \leq |s|\ R(x \upharpoonright n, s \upharpoonright n)\} \text{ und somit} \\ x \in A &\leftrightarrow T(x) \text{ ist fundiert.} \end{aligned}$$

Damit haben wir den folgenden Satz erhalten:

Normalform von Π^1_1-Mengen

Ist $A \subseteq \mathcal{N}$ eine Π^1_1-Menge, so gibt es einen 2-dimensionalen Baum T, so daß $x \mapsto T(x)$ eine rekursive Abbildung ist, für die gilt:

$$x \in A \leftrightarrow T(x) \text{ ist fundiert.}$$

Entsprechend gilt:

Normalform von $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-Mengen

Ist $A \subseteq \mathcal{N}$ eine $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-Menge, so gibt es einen 2-dimensionalen Baum T, so daß $x \mapsto T(x)$ eine stetige Abbildung ist, für die gilt:

$$x \in A \leftrightarrow T(x) \text{ ist fundiert.}$$

Definition

Sind $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Polnische Räume, $A \subseteq \mathbf{X}, B \subseteq \mathbf{Y}$, so heißt A WADGE-**reduzibel** auf B gdw es eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ gibt mit $\forall x \in X\, (x \in A \leftrightarrow f(x) \in B)$ (abgekürzt: $A \leq_W B$).

Ist Γ eine Punktklasse, so heißt eine Menge A Γ-**vollständig** gdw $A \in \Gamma(\mathbf{X})$ und für alle $B \in \Gamma(\mathbf{X})$ gilt: $B \leq_W A$.

Bemerkungen und Beispiele

(i) Für die Punktklassen Γ der BORELschen Hierarchie und der projektiven Hierarchie gilt: Falls A Γ-vollständig ist, so ist $A \notin \neg\Gamma$.

(Denn wählt man ein $B \in \Gamma - \neg\Gamma$, so ist $B \leq_W A$, da A Γ-vollständig ist. Wäre auch $A \in \neg\Gamma$, so auch $B \in \neg\Gamma$, Widerspruch!)

(ii) Die Mengen

- $\{x \in \mathcal{N} \mid \exists n\, x(n) = 1\}$ ist $\mathbf{\Sigma}^0_1$-vollständig.
- $\{x \in \mathcal{N} \mid \exists n \forall m x(m) = 0\}$ ist $\mathbf{\Sigma}^0_2$-vollständig.
- WF (wird unten definiert) ist nach obigem Satz $\mathbf{\Pi}^1_1$-vollständig.

Wichtige Beispiele von Π^1_1-Mengen erhalten wir durch die Kodierung von Wohlordnungen bzw. fundierten Relationen:

$\langle , \rangle : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ eine rekursive Bijektion (wie etwa am Ende von 7.4). Dann **kodiert** $a \in \mathcal{N}$ die Relation $R_a \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gdw

$$m\, R_a\, n \leftrightarrow a(\langle m,n \rangle) = 0.$$

Eine Relation R auf einer Menge A ist **fundiert** gdw sie die Minimumsbedingung (Min) von 3.1 erfüllt:

$$\text{(Min)} \quad \forall z\, (\emptyset \neq z \subseteq A \rightarrow \exists x \in z\, \forall y \in z\ \neg y R x)$$

(ohne daß R eine Ordnung zu sein braucht).

$$\begin{aligned} WF &:= \{x \in \mathcal{N} \mid x \text{ kodiert eine fundierte Relation}\} \\ WO &:= \{x \in \mathcal{N} \mid x \text{ kodiert eine Wohlordnung}\} \end{aligned}$$

Lemma

WF und WO sind coanalytische, sogar Π^1_1-Mengen.

Beweis: Aus dem Axiom DC folgt, daß die Minimumsbedingung gleichbedeutend ist mit der Nicht-Existenz einer unendlich-absteigenden Folge. Somit gilt:

$$x \in WF \leftrightarrow \forall y \exists k\, \neg(y(k+1) R_x\, y(k)).$$

Somit ist $WF = \forall^{\mathcal{N}} A$ mit

$$A(x,y) \leftrightarrow \exists k\, x(\langle (y(k+1), y(k) \rangle) \neq 0.$$

Also ist $WF \in \Pi^1_1$.

Da $LO := \{x \in \mathcal{N} \mid x \text{ kodiert eine lineare Ordnung}\} \in \Pi^0_1$ ist, ist $WO \in \Pi^1_1$. $\square$

Nach obiger Bemerkung ist keine dieser Mengen analytisch und somit auch nicht BOREL.

Ist $<$ eine Wohlordnung, so ist sie nach 3.2 isomorph zur $\in$-Beziehung auf genau einer Ordinalzahl α, dem *Wohlordnungstyp* von $<$.

Für $a \in WF$ sei

$$\| a \| = \text{ der Wohlordnungstyp von } R_a.$$

Lemma

Für jedes $\alpha < \omega_1$ ist

$$WF_\alpha := \{x \in WF \mid \| x \| \leq \alpha\}$$

eine BOREL*-Menge, ebenso* $\{x \in WF \mid \| x \| < \alpha\}$ *und* $\{x \in WF \mid \| x \| = \alpha\}$.

Beweis: Da

$$\begin{aligned} n \in Feld(R_x) &\leftrightarrow \exists m\,(n E_x m \vee m E_x n) \\ &\leftrightarrow \exists m\,(x(\langle n,m\rangle) = 0 \vee x(\langle m,n\rangle) = 0)) \end{aligned}$$

ist die Menge $\{(x,n) \mid n \in Feld(E_x)\}$ arithmetisch, insbesondere BOREL.
Für $\alpha < \omega_1$ sei

$$B_\alpha := \{(x,n) \mid E_x \restriction \{m|mE_xn\} \text{ ist Wohlordnung vom Typ } \leq \alpha\}.$$

Wir zeigen durch Induktion über α, daß jedes B_α BOREL ist:

Es sei also $\alpha < \omega_1$ und die Behauptung für alle $B_\xi, \xi < \alpha$, bewiesen. Dann ist $\bigcup_{\xi<\alpha} B_\xi$ BOREL und somit auch B_α wegen

$$(x,n) \in B_\alpha \leftrightarrow \forall m(mE_xn \rightarrow (x,m) \in \bigcup_{\xi<\alpha} B_\xi).$$

Damit ist aber wegen

$$x \in WO_\alpha \leftrightarrow \forall n(n \in Feld(E_x) \rightarrow (x,n) \in \bigcup_{\xi<\alpha} B_\xi)$$

auch WO_α eine BOREL-Menge. □

Beschränktheitslemma

Zu jeder Π^1_1*-Menge* $B \subseteq WO$ *gibt es ein abzählbares* α (also $\alpha < \omega_1$), *so daß* $\forall x \in B \ \| x \| < \alpha$.

Beweis: Sonst wäre

$$WO = \{x \in \mathcal{N} \mid \exists z\,(z \in B \wedge \| x \| \leq \| z \|)\}$$

und damit ebenfalls eine analytische Menge, Widerspruch! □

Korollar

(i) *Jede* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-Menge ist Vereinigung von* $\aleph_1$*-vielen* BOREL*-Mengen,*

(ii) *Jede* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-Menge ist entweder abzählbar, von Mächtigkeit von* $\aleph_1$ *oder von Mächtigkeit* $2^{\aleph_0}$.

Beweis: Nach dem Normalform-Satz ist jede analytische Menge $A = f^{-1}[WF]$ für eine stetige Funktion f. Ferner ist $WF = \bigcup_{\alpha<\omega_1} WF_\alpha$ und somit

$$A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} f^{-1}[WF_\alpha],$$

wobei die $f^{-1}[WF_\alpha]$ als stetige Urbilder von BOREL-Mengen ebenfalls BOREL-Mengen sind. □

Tatsächlich gilt das obige Ergebnis sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen.

In 5.7 haben wir die Reduktion-, Separation- und Uniformisierungseigenschaft eingeführt, die wir jetzt nur für den BAIREschen Raum benötigen:
Es sei $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

$$P^* \text{ uniformisiert } P :\leftrightarrow P^* \subseteq P \wedge \forall x \in \mathbf{X}\, [\exists y\, P(x,y) \to \exists! y\, P^*(x,y)]$$

Eine Punktklasse Γ hat die **Uniformisierungseigenschaft** gdw

$$P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N} \wedge P \in \Gamma \to \exists P^* \in \Gamma\, (P^* \text{uniformisiert } P).$$

Ohne Beweis erwähnen wir:

Satz

(i) $\mathbf{\Pi}^1_1$ *hat die Reduktionseigenschaft, aber nicht die Separationseigenschaft.*

(ii) $\mathbf{\Sigma}^1_1$ *hat die Separationseigenschaft.*

(iii) $\mathbf{\Pi}^1_1$ *hat die Uniformisierungseigenschaft* (Satz von KONDO).

(Diese Ergebnisse gelten auch für die entsprechenden lightface-Klassen.)

9.5 Eine Π^1_1-Menge ohne die Perfekte-Mengen-Eigenschaft

Vielfach benötigt man statt Modellen von ZF nur Modelle endlich-vieler Teilaxiome, und in diesen Fällen kann man sich häufig auf *abzählbare* Modelle beschränken. Ist M ein abzählbar-unendliches Modell (gewisser Axiome), so gibt es eine Bijektion $f : \omega \leftrightarrow M$, bei welcher die $\in$-Beziehung von M übergeht in eine entsprechende Relation $E = \{(m,n) | f(m) \in f(n)\}$ auf ω, d. h. die Struktur $(M, \in)$ ist isomorph zur Struktur (ω, E). Umgekehrt kann man diejenigen Strukturen (ω, E) charakterisieren, die isomorph zu Strukturen der Form $(M, \in)$ sind, wobei M transitiv ist (*transitive Standardmodelle*). Mit $\varphi^{(A,R)}$ bezeichnen wir die Formel, die aus φ hervorgeht, indem wir die Quantoren $\forall x$ bzw. $\exists y$ durch die relativierten $\forall x \in A$ bzw. $\exists y \in A$ und die $\in$-Beziehung durch die Relation R ersetzen; $\varphi^{(A,R)}$ gibt also die Bedeutung von φ in der Struktur (A, R) wieder (und für $R = \in$ erhalten wir einfach die frühere nach A relativierte Formel). So besagt z. B. für das Extensionalitätsaxiom

$$\begin{aligned} Ext &= \forall x \forall y \, [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y] : \\ Ext^{(A,R)} &\leftrightarrow \forall x \in A \, \forall y \in A \, [\forall z \in A (zRx \leftrightarrow zRy) \rightarrow x = y] \end{aligned}$$

Eine Relation R auf A heißt **extensional** gdw $Ext^{(A,R)}$ (also wenn das Extensionalitätsaxiom in (A, R) gilt.

Isomorphiesatz von Mostowski

R sei eine fundierte und extensionale Relation auf a. Dann existiert genau eine Abbildung f und eine transitive Menge b, so daß:

$$\begin{gathered} f \textit{ ist ein Isomorphismus: } (a,R) \cong (b, \in), \; d.h. \\ f : a \longleftrightarrow b \quad \textit{mit} \\ xRy \leftrightarrow f(x) \in f(y) \quad \textit{für alle } x, y \in a. \end{gathered}$$

Beweis: Falls ein solches f mit transitivem $b = Bild(f)$ existiert, muß offensichtlich gelten:

$$(*) \quad \forall x \in a \; f(x) = \{f(y) \mid yRx\},$$

und damit haben wir die Eindeutigkeit. Zum Beweis der Existenz benötigen wir das Rekursionsprinzip für fundierte Relationen, welches eine Abbildung f mit der

Eigenschaft (*) liefert. Wir setzen dann $b := Bild(f)$. Offenbar gilt dann $trans(b)$ und

$$f : A \twoheadrightarrow b \wedge \forall x,y \in a(xRy \to f(x) \in f(y)).$$

Als nächstes zeigen wir die Injektivität von f, indem wir für jedes $x \in a$ durch R-Induktion zeigen:

$$\forall y \in a\ (F(x) = F(y) \to x = y).$$

Die Induktionsvoraussetzung besagt, daß obige Behauptung über x für alle zRx gilt, also

$$\forall z\ (zRx \to \forall y \in a(F(z) = F(y) \to z = x)).$$

und wir haben zu zeigen, daß sie für x gilt. Sei also $F(x) = F(y)$ für ein $y \in a$. Dann:

$$\begin{aligned} cRx &\to F(c) \in F(x) = F(y) \\ &\to F(c) = F(z) \ \text{ für ein } zRy \\ &\to c = z \ \text{ nach Ind.vor., da } cRx \\ &\to cRy. \end{aligned}$$

Ganz analog erhalten wir $cRy \to cRx$, also die gewünschte Aussage $x = y$ wegen der Extensionalität von R. Schließlich ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned} f(x) \in f(y) &\to f(x) = f(c) \ \text{ für ein } cRy \\ &\to x = c \ \text{ wegen der Injektivität von } f \\ &\to xRy. \end{aligned}$$

□

Damit können wir bestimmte mengentheoretische Eigenschaften über $\mathcal{N}$, die in HC gelten, umwandeln in Formeln der projektiven Hierarchie, wie wir es bei der Behandlung der konstruktiblen Mengen in 8.4 wir angedeutet haben:

Lemma

Ist $A \subseteq \mathcal{N}$ Σ_1-definierbar über HC, so ist A eine Σ^1_2-Menge.

Beweis: Die Voraussetzung bedeutet, daß es eine Δ_0-Formel φ gibt, so daß

$$\begin{aligned} x \in A &\leftrightarrow (\exists u\, \varphi(u,x))^{HC} \\ &\leftrightarrow \exists u \in HC\ \varphi(u,x), \text{ da } \varphi\ \Delta_0 \text{ -Formel} \\ &\leftrightarrow \exists v \in HC\ (trans(v) \wedge \exists u \in v\, \varphi(u,x)^v), \\ &\leftrightarrow \exists v\ (trans(v) \wedge v \sim \omega \wedge \exists u \in v\, \varphi(u,x)^v), \end{aligned}$$

wobei man etwa $v = TC(\{u,x\})$ wählen könnte. Mit Hilfe des Isomorphiesatzes von MOSTOWSKI erhalten wir weiter:

$$x \in A \leftrightarrow \exists E\ (E \text{ fundiert und extensional auf } \omega \wedge \\ \exists n \exists m (f_E(m) = x \wedge \varphi(n,m)^{(\omega,E)}),$$

wobei $f_E : (\omega, E) \cong (M, \in)$. Die Relation E wird nun kodiert durch ein $z \in \mathcal{N}$, so daß

$$x \in A \leftrightarrow \exists z \in \mathcal{N}\ (z \in WF \wedge Ext^{(\omega,E_x)} \wedge \\ \exists n \exists m (f_{E_x}(m) = x \wedge \varphi(n,m)^{(\omega,E_x)}).$$

Damit erhält man nun eine Σ^1_2-Definition von A, wobei man noch nachzuprüfen hat, daß die Relationen $f_E(m) = x$ und $\varphi(n,m)^{(\omega,E)}$ arithmetisch in E sind. □

Es gilt übrigens auch die Umkehrung des obigen Lemmas, und allgemein sind die Σ^1_{n+1}-Mengen genau diejenigen, die Σ_n über HC definierbar sind.

Mit einem ähnlichen Argument wie in obigem Lemma kann man zeigen, daß nicht nur die Relation $<_L$ Σ^1_2 ist, sondern auch:

Lemma

Die folgende Relation $R \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ ist Σ^1_2:

$$(z,x) \in R \leftrightarrow \{(z)_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{y \mid y <_L x\}.$$

Satz

Falls $V = L$, so existiert eine überabzählbare Π^1_1-Menge ohne perfekte Teilmenge $\neq \emptyset$.

Beweis: Zunächst definieren wir eine überabzählbare Σ^1_2-Menge A ohne perfekte Teilmenge $\neq \emptyset$:

$$x \in A \leftrightarrow x \in WO \wedge \forall y <_L x (\| y \| \neq \| x \|).$$

(a) A ist überabzählbar: Für jedes $\alpha < \omega_1$ gibt es genau ein $x \in A$ mit $\| x \| = \alpha$.

(b) A ist Σ^1_2: R sei die Σ^1_2-Relation des obigem Lemmas, somit

$$x \in A \leftrightarrow x \in WO \wedge \exists z\,(R(z,x) \wedge \forall n\,(\| (z)_n \| \neq \| x \|).$$

Da $\| (z)_n \| \neq \| x \|$ Π^1_1-definierbar ist, ist A Σ^1_2.

(c) A hat keine nicht-leere perfekte Teilmenge, tatsächlich keine überabzählbare Π^1_1-Teilmenge: für jede Π^1_1-Menge $X \subseteq A$ ist die Menge $\{\| x \| \mid x \in X\}$ beschränkt (Beschränktheits-Lemma), also abzählbar.

Als Σ^1_2-Menge ist A die Projektion einer Π^1_1-Teilmenge von $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, und nach dem Uniformisierungs-Satz von KONDO läßt sich B durch eine Funktion f uniformisieren, welche Π^1_1 ist und ebenfalls A als Projektion besitzt. f ist ebenfalls überabzählbar, enthält aber keine perfekte Teilmenge $P \neq \emptyset$: Ist nämlich $P \subseteq f$ eine derartige Menge, so ist P ebenfalls eine Funktion, als perfekte Menge überabzählbar und $\exists^{\mathcal{N}} P$ wäre eine überabzählbare Π^1_1-Teilmenge von A, Widerspruch zu (c)! $\square$

Kapitel 10

Spiele und Determiniertheit

10.1 Vom intuitiven zum mathematischen Spielbegriff

Sucht man in den gemeinhin bekannten Spielen nach einer gemeinsamen Struktur, so wird man wohl auf Folgendes stoßen:

1. **Spieler:** Ein Spiel wird von Spielern gespielt. Dies kann ein Spieler sein (z.B. Solitär-Kartenspiele), zwei oder eine endliche Anzahl von Spielern (trifft für die gängigen Gesellschaftsspiele zu), oder auch eine unendliche Anzahl von Spielern (in ökonomischen Simulationen etwa). Es gibt auch *Spiele ohne Spieler*, z.B. Conways Game of Life

2. **Spielraum:** Ein Spiel findet gewöhnlich in einem *fest umrissenen Bereich*. Das ist im einfachsten Fall tatsächlich ein räumlicher Bereich (Spielbrett), und das Spiel besteht aus Abfolgen von *Konfigurationen* in diesem Spielraum (z.B. Stellungen auf einem Schachbrett). In den meisten Fällen wird dieser Spielraum jedoch abstrakt sein, und es liegt nahe, ihn mathematisch als *Menge* zu modellieren.

3. **Regeln:** Ein Spiel folgt vorgefassten Regeln. Regeln fixieren die *erlaubten* Züge oder Handlungen. Abstrakt gesehen legen die Regeln fest, in welche anderen Konfigurationen eine gegebene Konfiguration überführt werden kann.

4. **Gewinnbedingung:** Die meisten Spiele haben eine Gewinnbedingung. Oft ist das eine Bedingung, anhand derer man einem gegebenen Spielstand (Konfiguration) ansehen kann, ob einer der beteiligten Spieler das Spiel ge-

winnt. Manchmal ist eine solche Gewinnbedingung auch mit einer *Zeitangabe* (z.B. Anzahl der zu spielenden Runden) kombiniert.

Wir werden uns im folgenden auf **Zwei-Personen-Spiele** (mit perfekter Information) beschränken. Die grobe Skizzierung des intuitiven Spielbegriffs legt folgende Formalisierung nahe.

Definition 10.1
Sei X eine beliebige Menge.

1. Ein **endliches Zwei-Personen-Spiel** $G(X,T,A)$ über X besteht aus einem fundierten Baum $T \subseteq X^{<\omega}$ sowie einer Teilmenge A der Blätter von T.

2. Ein **unendliches Zwei-Personen-Spiel** $G(X,T,A)$ über X besteht aus einem gestutzten Baum $T \subseteq X^{<\omega}$ sowie einer Teilmenge $A \subseteq [T]$.

Die Interpretation dieser Definition ist folgende: In einer Partie ziehen zwei Spieler (Spielerin I und Spieler II) abwechselnd, indem sie Elemente x_n aus X wählen.

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathrm{I} & x_1 & & x_3 & & \\ & & & & & \dots \\ \mathrm{II} & & x_2 & & x_4 & \end{array}$$

Erlaubt sind nur solche Züge, die Knoten in T entsprechen (Regeln!). Formal heißt dies: Für alle n muss die Folge $x_1^\frown x_2^\frown \dots ^\frown x_n$ in T liegen.

In einem endlichen Spiel ist T fundiert, d.h. nach endlich vielen Zügen ist ein Blatt (Endknoten) erreicht. Spielerin I gewinnt die Partie von $G(X,T,A)$, wenn das Blatt in A liegt.

In einem unendlichen Spiel ist das Ergebnis einer Partie von $G(X,T,A)$ eine Folge $(x_n) \in [T]$. Spielerin I gewinnt in diesem Fall, wenn $(x_n) \in A$.

T^{I} bezeichne die Elemente $t \in T$ mit gerader Länge, also diejenigen Situationen, in denen Spielerin I am Zug ist. Entsprechend ist T^{II} die Menge der Spielsituationen, in denen Spieler II ziehen muss, also die Menge der Knoten in T mit ungerader Länge.

Im Fall $X = \{0,1\}$ bzw. $X = \omega$ sowie $T = X^{<\omega}$ schreiben wir vereinfacht $G(\mathcal{C},A)$ für $G(\{0,1\},\{0,1\}^{<\omega},A)$ bzw. $G(\mathcal{N},A)$ für $G(\omega,\omega^{<\omega},A)$.

10.1.1 Strategien

Sieht man einmal von Glücksspielen ab, so bestreiten die meisten Spieler ein Spiel mit einer mehr oder weniger ausgeklügelten *Strategie*. Sinn und Zweck einer Strategie liegt darin, jeden möglichen Zug des Gegners mit einem *eindeutig bestimmten* eigenen Zug so beantworten zu können, dass man die Partie siegreich beendet. Es liegt nahe, Strategien mathematisch als *Funktionen* zu modellieren.

Definition 10.2
Eine **Strategie** für Spielerin I in einem Spiel $G(X,T,A)$ ist eine Funktion

$$\begin{array}{rccl} \phi: & T^{\mathrm{I}} & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & \phi(t) = x \end{array}$$

Ist $G(X,T,A)$ ein endliches Spiel, so muss für ϕ gelten, dass

$$\forall t (t \in T^{\mathrm{I}},\ t \text{ kein Endknoten}) \rightarrow t^\frown\phi(t) \in T.$$

Ist $G(X,T,A)$ unendlich, so vereinfacht sich diese Bedingung folglich zu

$$\forall t (t \in T^{\mathrm{I}}) \rightarrow t^\frown\phi(t) \in T.$$

Eine Strategie für Spieler II definiert sich analog.

Man kann eine Strategie auch als einen Teilbaum $T_\phi \subseteq T$ ansehen, der folgendermaßen definiert ist:

(i) Die leere Folge ε ist in T_ϕ.

(ii) Ist $s = (a_0, \ldots, a_{2j}) \in T_\phi$, so sind alle Erweiterungen von s, die in T liegen auch in T_ϕ:

$$\forall a \left((a_0, \ldots, a_{2j}, a) \in T \rightarrow (a_0, \ldots, a_{2j}, a) \in T_\phi\right).$$

(Alle möglichen Züge von Spieler II müssen von der Strategie berücksichtigt werden.)

(iii) Für alle $t = (a_0, \ldots, a_{2j-1}) \in T_\phi$ gibt es eine *eindeutige* Fortsetzung, d.h.

$$(a_0, \ldots, a_{2j-1}) \in T_\phi \rightarrow \exists! a (a_0, \ldots, a_{2j-1}, a) \in T_\phi$$

(Bei endlichen Spielen muss man noch die Bedingung hinzufügen, dass nur Nicht-Endknoten erweitert werden müssen.)

Wiederum definiert sich ein Strategiebaum T_ψ für eine Strategie ψ für Spieler II analog.

Eine **Gewinnstrategie** für Spielerin I (bzw. Spieler II) ist eine Strategie ϕ, mit der er jede Partie des Spiels $G(X,T,A)$ gewinnt, d.h. die Endknoten von T_ϕ liegen in A (im Falle endlicher Spiele), bzw. es gilt $[T_\phi] \subseteq A$ im Falle unendlicher Spiele.

Eine zentrale Fragestellung bei der Untersuchung von Spielen besteht darin, ob es für einen Spieler eine Gewinnstrategie gibt. Solche Spiele heißen **determiniert**.

Im folgenden werden wir sehen, dass es hier große Unterschiede zwischen endlichen und unendlichen Spielen gibt. Während alle endlichen Spiele determiniert sind, gilt dies (in ZFC) bei unendlichen Spielen nur für „relative einfache“ Gewinnmengen, nämlich für Borelmengen. Determiniertheit für komplexere Mengen ist kein Theorem von ZFC mehr (es gibt Modelle, in denen dies nicht mehr gilt), sondern kann nur unter Hinzunahme von geeigneten Axiomen zu ZF bewiesen werden. Unter Annahme des Auswahlaxioms gibt es jedoch immer Mengen, die nicht determiniert sind.

10.2 Determiniertheit endlicher Spiele

Satz 10.3 (Zermelo)
Alle endlichen Zwei-Personen-Spiele (mit perfekter Information) sind determiniert.

Beweis: Sei $G(X,T,A)$ ein endliches Spiel über X. Wir färben den Baum T nach folgender rekursiven Vorschrift ein:

(1) Färbe alle Endknoten grau, die eine Gewinnposition für Spielerin I sind, d.h. alle Knoten in A. Die Gewinnknoten für Spieler II lasse man weiß.

(2) Wurden bereits alle Nachfolger eines Knotens $t \in T$ bearbeitet, so färbe man t grau, wenn eine der folgenden Bedingungen zutrifft:

   (i) Spielerin I ist bei t am Zug (t ist Knoten gerader Tiefe) und es gibt einen Nachfolger $t^\frown a$ von t, der grau eingefärbt ist.

   (ii) Spieler II ist bei t am Zug (t ist Knoten ungerader Tiefe) und alle Nachfolger $t^\frown b$ von t sind grau eingefärbt.

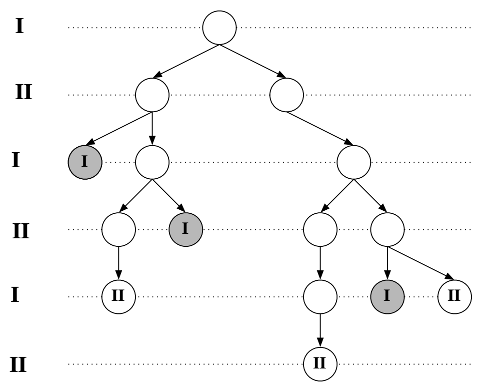


Abbildung 10.1: *
Anfangsfärbung

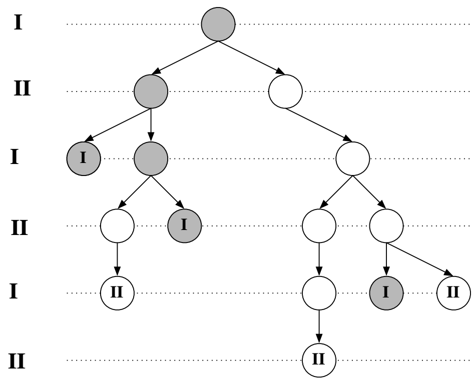


Abbildung 10.2: *
Endfärbung (Gewinnstrategie für Spielerin I)

Nun kann man per Induktion leicht zeigen, dass, wenn ein Knoten t grau gefärbt ist, Spielerin I eine Gewinnstrategie für das (Teil-)Spiel besitzt, welches in t startet. Umgekehrt kann man sich überlegen, dass, falls ein Knoten s nicht grau gefärbt ist, Spieler II von s ausgehend stets einen nicht grau gefärbten Endknoten erreichen kann. Somit gilt:

> Ist die Wurzel des Baumes T (der eindeutig bestimmte Knoten der Tiefe 0) grau eingefärbt, so hat Spielerin I eine Gewinnstrategie. Andernfalls besitzt Spieler II eine Gewinnstrategie.

□

10.3 Unendliche Spiele

Im Falle unendlicher Spiele ist die Situation gänzlich anders. Setzt man das Auswahlaxiom voraus, so gibt es stets nicht-determinierte unendliche Spiele.

Satz 10.4 (AC)
Sei X eine abzählbare Menge mit $|X| \geq 2$. Unter Benutzung des Auswahlaxioms kann man zeigen, dass eine Teilmenge $A \subseteq X^\omega$ existiert derart, dass $G(X, X^{<\omega}, A)$ nicht determiniert ist.

Beweis: Jede Strategie entspricht einem Teilbaum $T \subseteq X^{<\omega}$. Ein Baum ist eine Menge von endlichen Folgen über X, welche durch geeignete Kodierung wiederum mit einer Menge von natürlichen Zahlen identifiziert werden kann. Also gibt es insgesamt $2^{\aleph_0}$ Strategien.

Außerdem induziert jeder Strategiebaum T_ϕ eine *perfekte Teilmenge* von X^ω, nämlich die Menge der unendlichen Pfade in T_ϕ, $[T_\phi]$. ϕ ist genau dann eine Gewinnstrategie für Spielerin I, wenn $[T_\phi] \subseteq A$ gilt. (Analog ist ψ Gewinnstrategie für Spieler II genau dann, wenn $[T_\psi] \subseteq \neg A$.

Wir zeigen nun unter Benutzung des Auswahlaxioms die Existenz einer Teilmenge $B \subseteq X^\omega$, so dass weder B noch das Komplement $\neg B$ eine perfekte Teilmenge enthalten. Eine solche Menge heißt **Bernstein-Menge**. Nach obigen Ausführungen kann dann das Spiel $G(X, X^{<\omega}, B)$ für eine Bernstein-Menge B nicht determiniert sein.

Jede perfekte Teilmenge von X^ω entspricht eineindeutig den unendlichen Pfaden eines gestutzten Baumes. Somit gibt es $2^{\aleph_0}$ perfekte Teilmengen von X^ω. Sei $(P_\xi : \xi < 2^{\aleph_0})$ eine (transfinite) Aufzählung der nichtleeren perfekten Teilmengen von X^ω. Mittels transfiniter Rekursion können wir aus jedem P_ξ zwei Elemente a_ξ, b_ξ auswählen, so dass alle a_ξ, b_ξ, $\xi < 2^{\aleph_0}$, verschieden sind. (Jede nichtleere perfekte Teilmenge von X^ω hat Kardinalität $2^{\aleph_0}$.) Schließlich definieren wir $B = \{b_\xi : \xi < 2^{\aleph_0}\}$. Offensichtlich ist dann $P_\xi \not\subseteq B$ für alle $\xi < 2^{\aleph_0}$, ebenso wie $P_\xi \not\subseteq \neg B$. $\square$

Die im Beweis konstruierte Bernstein-Menge B kann übrigens nicht die Baire-Eigenschaft besitzen (Übungsaufgabe).

Eine der zentralen Fragen der mengentheoretischen Spieltheorie besteht nun darin, diejenigen Mengen zu charakterisieren, für welche das entsprechende Spiel determiniert ist. Wir werden zunächst zeigen, dass alle Spiele, die auf offenen oder abgeschlossenen Mengen beruhen, determiniert sind. Dies wurde von GALE und STEWART bewiesen (1953). 1975 gelang es MARTIN dann nachzuweisen, dass alle Borel-Spiele determiniert sind. Ein Nachweis für umfassendere Punktklassen, so z.B. analytische oder projektive Mengen, ist im Rahmen von ZFC nicht mehr möglich. Es wird sich zeigen, dass hier tiefe Verbindungen zur Existenz großer Kardinalzahlen bestehen.

10.3.1 Determiniertheit abgeschlossener Spiele

Satz 10.5 (GALE und STEWART)
Sei X eine nichtleere Menge, und sei $T \subseteq X^{<\omega}$ ein gestutzter Baum auf X. Ist $A \subseteq [T]$ abgeschlossen, so ist $G(X,T,A)$ determiniert.

Beweis: Sei $A \subseteq [T]$ abgeschlossen. Wir nehmen an, Spieler II hat keine Gewinnstrategie für $G(X,T,A)$. Wir zeigen, dass dann Spielerin I eine Gewinnstrategie besitzt.

Ist $p = (p_0, \dots, p_{2k-1}) \in T^{\mathrm{I}}$ eine Spielposition, in der Spielerin I am Zug ist, so nennen wir p *nicht verloren* für Spielerin I, wenn Spieler II von hier an keine Gewinnstrategie besitzt, d.h. wenn er keine Gewinnstrategie für das Spiel $G(X,T_p,A_p)$ besitzt, wobei

$$T_p := \{s \mid p\frown s \in T\} \quad \text{und} \quad A_p := \{x \mid p\frown x \in A\}.$$

Folglich ist $\emptyset$ eine nicht verlorene Position für I. Offensichtlich gilt auch:

> Ist $p = (p_0, \dots, p_{2k-1})$ nicht verloren für I, so gibt es ein p_{2k} für das gilt:
>
> (1) $(p_0, \dots, p_{2k-1}, p_{2_k}) \in T$ und
>
> (2) für alle p_{2k+1} mit $p' = (p_0, \dots, p_{2k-1}, p_{2k}, p_{2k+1}) \in T$ ist p' ebenfalls nicht verloren für I.

Auf diese Weise kann man somit einen Strategiebaum T_ϕ für I definieren, in dem alle $p \in T^{\mathrm{I}}$ nicht verlorene Positionen für I sind.

Wir behaupten nun, dass T_ϕ sogar eine Gewinnstrategie für I definiert. Denn angenommen, dass $x = (x_n) \in T_\phi$ aber $x \notin A$. Dann existiert, da $X^\omega - A$ offen in $[T]$ ist, ein $s \in T_\phi$ mit

$$N_s \cap [T] \subseteq X^\omega - A.$$

Ab diesem s hat II aber eine triviale Gewinnstrategie, da er nicht mehr aus $X^\omega - A$ „herausspielen“ kann, im Widerspruch zur Wahl von T_ϕ. □

Ist A offen statt abgeschlossen, so kann man obigen Beweis mit vertauschten Rollen von I und II führen. Somit ergibt sich:

Satz 10.6 (GALE und STEWART)
Sei X eine nichtleere Menge, und sei $T \subseteq X^{<\omega}$ ein gestutzter Baum auf X. Ist $A \subseteq [T]$ offen oder abgeschlossen, so ist $G(X,T,A)$ determiniert.

10.4 Borel-Determiniertheit

1975 gelang MARTIN der Nachweis, dass alle Borel-Spiele determiniert sind. Wir geben hier einen von MARTIN 1985 veröffentlichten, rein induktiven Beweis, in seiner Darstellung dem Buch von KECHRIS entnommen.

Satz 10.7 (MARTIN)
Ist $T \subseteq X^{<\omega}$ ein nichtleerer, gestutzter Baum auf X und ist $A \subseteq [T]$ Borel, so ist $G(X,T,A)$ determiniert.

Der Beweis benutzt die Methode des *Entwirrens* von Spielen, welche darin besteht, dass man ein Spiel auf ein anderes zurückführt, von welchem die Determiniertheit bereits bekannt ist, also zumeist ein offenes oder abgeschlossenes Spiel. Man stellt dann sicher, dass eine Gewinnstrategie in dem Hilfsspiel in einfacher Weise auf eine Gewinnstrategie des ursprünglichen Spiels *projiziert* werden kann.

Definition 10.8
Sei T ein nichtleerer, gestutzter Baum. Eine **Überdeckung** von T ist ein Tripel $(\tilde{T}, \pi, f)$, für das gilt:

(i) $\tilde{T}$ ist ein nichtleerer, gestutzter Baum (über Menge $\tilde{X}$).

(ii) $\pi : \tilde{T} \to T$ ist eine monotone, längenerhaltende Abbildung, d.h. es gilt

$$\forall s,t \in \tilde{T} \ (s \subseteq t \ \rightarrow \ \pi(s) \subseteq \pi(t)),$$

und

$$\forall s \in \tilde{T} \ (|s| = |\pi(s)|).$$

Wie man leicht sieht (Übung), induziert π eine eindeutig bestimmte, stetige Abbildung von $[\tilde{T}]$ nach $[T]$, welche wir hier auch mit $\pi : [\tilde{T}] \to [T]$ bezeichnen.

(iii) f bildet Strategien für Spielerin I (bzw. Spieler II) in $\tilde{T}$ auf Strategien in T ab, und zwar so, dass die Strategie $f(\phi)$ bis zum n-ten Zug nur von der Strategie ϕ bis zum n-ten Zug abhängt. Formal bedeutet dies, dass f einen Strategiebaum $\tilde{T}_\phi$ in $\tilde{T}$ auf einen Strategiebaum $T_{f(\phi)}$ in T abbildet. Dabei darf $T_{f(\phi)}|n$, also der endliche Teilbaum von $T_{f(\phi)}|n$, der nur Folgen bis zur Länge n enthält, nur von $\tilde{T}_\phi|n$ abhängen.

(iv) Ist ϕ eine Strategie für Spielerin I (bzw. Spieler II) in $\tilde{T}$, und wird $x \in [T]$ gemäß $f(\phi)$ gespielt, d.h. $x \in [T_{f(\phi)}]$, so gibt es ein $\tilde{x} \in [\tilde{T}_\phi]$ derart, dass $\pi(\tilde{x}) = x$.

Es ist klar, dass, falls $(\tilde{T}, \pi, f)$ eine Überdeckung von T ist, und das Spiel $G(\tilde{X}, \tilde{T}, \pi^{-1}(A))$ determiniert ist, auch $G(X,T,A)$ determiniert ist. Denn in diesem Fall erhält man (wegen (iii) und (iv)) durch Anwendung von f eine Gewinnstrategie für $G(X,T,A)$.

Definition 10.9
Eine Überdeckung $(\tilde{T}, \pi, f)$ von T **entwirrt** $A \subseteq [T]$, falls $\pi^{-1}(A)$ offen-abgeschlossen in $[\tilde{T}]$ ist.

Somit genügt es zum Beweis der Borel-Determiniertheit folgendes zu zeigen.

Satz 10.10 (MARTIN)
Ist $T \subseteq X^{<\omega}$ ein nichtleerer, gestutzter und ist $A \subseteq [T]$ Borel, so existiert eine Überdeckung $(\tilde{T}, \pi, f)$, die A entwirrt.

Wir werden sogar noch eine etwas allgemeinere Aussage beweisen. Hierzu verfeinern wir den Begriff der Überdeckung noch etwas. Eine Überdeckung $(\tilde{T}, \pi, f)$ von T heißt k-**Überdeckung**, $k \in \mathbb{N}$, wenn gilt $\tilde{T}|2k = T|2k$ und $\pi|(\tilde{T}|2k)$ ist die Identität, d.h. für die ersten k Züge beider Spieler stimmen das Spiel auf T und das entsprechende Spiel auf $\tilde{T}$ überein.

Es soll nun die Aussage

> Zu jedem nichtleeren, gestutzten Baum $T \subseteq X^{<\omega}$, zu jeder Borelmenge $A \subseteq [T]$ und zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert eine k-Überdeckung $(\tilde{T}, \pi, f)$, die A entwirrt.

bewiesen werden. Der Beweis erfolgt induktiv für alle Stufen $\xi < \omega_1$ der Borel-Hierarchie. Zur Durchführung der Induktion benötigt man zwei Lemmata. Das erste stellt den Induktionsanfang sicher, indem man zeigt, dass abgeschlossene Spiele stets entwirrt werden können. Man sieht leicht, dass eine Überdeckung von T, die A entwirrt, auch $\neg A$ entwirrt. Somit gilt die Behauptung für $\mathbf{\Sigma}^0_1$ bzw. $\mathbf{\Pi}^0_1$.

Lemma 10.11
Ist $T \subseteq X^{<\omega}$ ein nichtleerer, gestutzter Baum auf X und ist $A \subseteq [T]$ abgeschlossen, so existiert eine Überdeckung $(\tilde{T}, \pi, f)$, die A entwirrt.

Für den Induktionsschritt benötigt man ein Lemma, dass erlaubt, von einer Folge entwirrender Bäume (mit zugehörigen Abbildungen) zu einem einzigen entwirrenden Baum (mit entsprechenden Abbildungen) überzugehen. Dieser Baum ermöglicht dann, eine Entwirrung der Vereinigung von abzählbar vielen $\mathbf{\Pi}^0_\eta$-Mengen, $\eta < \xi$, zu definieren.

Lemma 10.12
Sei $((T_i, \pi_i, f_i))_{i<\omega}$ eine Folge von Tripeln derart, dass $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, f_{i+1})$ eine i-Überdeckung von T_i ist. Dann gibt es einen gestutzten Baum T_∞, sowie zu jedem $i \in \mathbb{N}$ Abbildungen $\pi_{\infty,i}$ und $f_{\infty,i}$ mit der Eigenschaft, dass für jedes i

(i) *$(T_\infty, \pi_{\infty,i}, f_{\infty,i})$ eine i-Überdeckung von T_i ist, sowie*

(ii) *$\pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1} = \pi_{\infty,i}$ und $f_{i+1} \circ f_{\infty,i+1} = f_{\infty,i}$ gilt.*

Wir zeigen hier lediglich, wie sich Satz 10.7 induktiv aus den beiden Lemmata herleiten lässt. Die Beweise der Lemmata (insbesondere von Lemma 10.11) sind recht kompliziert, so dass wir an dieser Stelle auf ihre Darstellung verzichten und auf das Buch von KECHRIS verweisen.

Der Beweis von Satz 10.7 erfolgt induktiv. Der Induktionsanfang folgt, wie gesehen, aus Lemma 10.11 der Induktionsanfang für $\mathbf{\Sigma}^0_1([T])$.

Nehmen wir nun an, die Behauptung sei für alle $\eta < \xi$ bereits bewiesen. Somit existiert zu jeder $\mathbf{\Pi}^0_\eta$-Menge B und jedem l eine l-Überdeckung, welche $\neg B$ und somit auch B entwirrt.

Sei nun A aus $\mathbf{\Sigma}^0_\xi([T])$, d.h. $A = \bigcup_{i<\omega} A_i$, mit $A_i \in \mathbf{\Pi}^0_{\xi_i}([T])$, $\xi_i < \xi$. Sei A_0 eine k-Überdeckung (T_1, π_1, f_1) von $T_0 = T$, welche A_0 entwirrt. Da Borel-Punktklassen unter stetigen Urbildern abgeschlossen sind, ist auch $\pi_1^{-1}(A_i)$ eine $\mathbf{\Pi}^0_{\xi_i}([T])$-Menge für alle $i \geq 1$. Somit gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine $k+1$-Überdeckung (T_2, π_2, f_2) von T_1, die $\pi_1^{-1}(A_1)$ entwirrt. Man kann dies rekursiv fortführen und erhält eine Folge $((T_i, \pi_i, f_i))_{i<\omega}$, wobei jedes $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, f_{i+1})$ eine $(k+i)$-Überdeckung von T_i ist, die

$$\pi_i^{-1} \circ \pi_{i-1}^{-1} \circ \cdots \circ \pi_1^{-1}(A_i)$$

entwirrt.

Sei nun, zu jedem $i \in \mathbb{N}$, $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, f_{\infty,i})$ wie in Lemma 10.12. Man rechnet leicht nach, dass $(T_\infty, \pi_{\infty,0}, f_{\infty,0})$ jedes A_i entwirrt. Somit ist

$$\pi_{\infty,0}^{-1}(A) = \bigcup_{i<\omega} \pi_{\infty,0}^{-1}(A_i)$$

offen (in $[T_\infty]$). Also findet man (mit Lemma 10.11) eine k-Überdeckung $(\tilde{T}, \pi, f)$ von T_∞, die $\pi_{\infty,0}^{-1}(A)$ entwirrt. Dann ist schließlich $(\tilde{T}, \pi_{\infty,0} \circ \pi, f_{\infty,0} \circ f)$ eine k-Überdeckung von T, die A entwirrt.

10.5 Determiniertheit Analytischer Mengen

Die Determiniertheit von Borel-Mengen legt natürlich die Frage nahe, ob noch umfassendere Punktklassen, wie z.B. analytische oder sogar alle projektiven Mengen ebenfalls determiniert sind.

Es zeigte sich aber, noch bevor MARTIN die Borel-Determiniertheit nachweisen konnte, angestoßen durch Arbeiten von MYCIELSKI (teilweise gemeinsam mit STEINHAUS), dass diese Fragen im Rahmen von ZFC nicht mehr beantwortbar sind.

Wie wir bereits im Beweis von Satz 10.4 sahen, muss eine Menge $A \subseteq \mathcal{N}$, für die ein Spieler eine Gewinnstrategie in $G(\mathcal{N}, A)$ besitzt, eine perfekte Teilmenge enthalten.

Außerdem überlegt man sich leicht, dass für alle Stufen der projektiven Hierarchie gilt: $\mathbf{\Sigma}^1_n$ ist determiniert genau dann, wenn $\mathbf{\Pi}^1_n$ determiniert ist.

Sei nämlich $A \in \mathbf{\Sigma}^1_n$, und angenommen, es existierte keine Gewinnstrategie für I in $G(\mathcal{N}, A)$. Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{N}$ ist auch $A_{(x_0)} = \{x \mid (x_0)^\frown x \in A\}$ ebenfalls in $\mathbf{\Sigma}^1_n$, und folglich ist $\neg A_{(x_0)}$ $\mathbf{\Pi}^1_n$. Spieler II kann in dem Spiel $G(\mathcal{N}, \neg A_{(x_0)}$ keine Gewinnstrategie haben, denn sonst könnte I diese Strategie verwenden, um eine Gewinnstrategie für $G(\mathcal{N}, A)$ zu erhalten, indem er als ersten Zug x_0 spielt. Setzt man die Determiniertheit von $\mathbf{\Pi}^1_n$ voraus, muss also Spielerin I eine Gewinnstrategie ϕ_{x_0} für $G(\mathcal{N}, \neg A_{(x_0)})$ besitzen. Aber dann ist die Vereinigung aller ϕ_x, $x \in \mathbb{N}$, eine Gewinnstrategie für II in $G(\mathcal{N}, A)$. Analog folgt die Determiniertheit von $\mathbf{\Pi}^1_n$ aus der Determiniertheit von $\mathbf{\Sigma}^1_n$.

Wäre also die Determiniertheit analytischer Mengen in ZFC beweisbar, so auch die Determiniertheit coanalytischer Mengen. Wir haben aber in Kapitel 9 gesehen, dass es ein Modell von ZF gibt ($V = L$), in welchem AC gilt aber die Perfekte-Mengen-Eigenschaft für überabzählbare $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen nicht gilt. Somit kann für $V = L$ auch die Determiniertheit von $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen nicht gelten. Folglich ist die Determiniertheit (co)analytischer Mengen kein Theorem von ZFC (natürlich immer unter der Voraussetzung, dass ZFC konsistent ist).

Die Determiniertheit von Borel-Mengen ist also im Rahmen von ZFC das bestmögliche Resultat. Wir werden im folgenden sehen, dass $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Determiniertheit bereits zur Existenz großer Kardinalzahlen äquivalent ist.

10.5.1 Determiniertheit und große Kardinalzahlen

MARTIN gelang es bereits 1969, eine hinreichende Bedingung für die Determiniertheit von analytischen Spielen in Form von Aussagen über die Existenz großer Kardinalzahlen zu geben, und zwar

$$\text{Für alle } a \in \mathcal{N} \text{ existiert } a^\sharp.$$

HARRINGTON zeigte dann 1978, dass diese Bedingung auch notwendig für die $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Determiniertheit ist.

Eine Behandlung von $a^\sharp$ würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, wir verweisen auf die Bücher von JECH oder KANAMORI. Statt dessen wollen wir eine abgeschwächte Form von MARTINs Resultat beweisen.

Satz 10.13
Wenn es eine messbare Kardinalzahl gibt, so sind alle analytischen Mengen determiniert.

Dass messbare Kardinalzahlen $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Determiniertheit beweisen können, ist eine Folge der starken **Homogenitätseigenschaften**, über die diese Zahlen verfügen.

Homogenitätseigenschaften sind Verallgemeinerungen des bekannten **Schubfachprinzips**: Verteilt man $n+1$ Objekte auf n Schubladen, so gibt es eine Schublade, in der mindestens zwei Objekte stecken. Für unendliche Mengen wiederum ist es klar, dass eine endliche Partition eine unendliche Teilmenge enthalten muss.

Formal kann man eine Partition einer Menge S als eine Abbildung $F : S \to I$ von S in eine Menge I ansehen, die zugehörige Partition definiert man dann als $\{X_i \mid i \in I\}$, wobei $X_i = \{x \in S \mid F(x) = i\}$.

Wir betrachten nicht nur „einfache“ Partitionen einer Menge S, sondern Partitionen einer Menge von Teilmengen von S. Hierzu bezeichne, für gegebenes $n \in \mathbb{N}$,

$$[S]^n := \{X \subseteq S \mid |X| = k\}$$

die Menge aller n-elementigen Teilmengen von S. Für Kardinalzahlen κ, λ, steht dann Ausdruck

$$\kappa \to (\lambda)^n_k$$

für die Eigenschaft, dass jede Partition $F:[S]^n \to \{1,\ldots,k\}$ mit $|S|=\kappa$ eine F-**homogene Menge** der Kardinalität λ besitzt, d.h. eine Menge H, $|H|=\lambda$, mit der Eigenschaft

$$F|_{[H]^n} \equiv \text{ konstant.}$$

Der **Satz von RAMSEY** (1929/39) besagt, dass für beliebige $n,k \in \mathbb{N}$,

$$\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^n_k$$

gilt. (Der Fall $n=1$ entspricht hier der anfangs erwähnten Tatsache, dass jede Partition einer unendlichen Menge in endlich viele Teile eine unendliche Teilmenge enthalten muss.)

Es liegt nahe, Homogenitätseigenschaften auch für größere Kardinalzahlen als $\aleph_0$ zu betrachten. So nennt man z.B. eine Kardinalzahl κ **schwach kompakt**, wenn sie überabzählbar ist und $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ gilt. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass jede schwach kompakte Kardinahlzahl unerreichbar ist.

Messbare Kardinahlzahlen haben noch stärkere Homogenitätseigenschaften. $[S]^{<\omega}$ bezeichne die Menge aller endlichen Teilmengen einer Menge S. Ist $F:[S]^{<\omega} \to I$ eine Partition dieser Menge, so heißt $H \subseteq S$ F-homogen, falls

$$F|_{[H]^n} \equiv \text{ konstant}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 10.14
Sei κ eine messbare Kardinalzahl und sei $F:[\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ eine Partition von $[\kappa]^{<\omega}$ in $\lambda < \kappa$ Stücke. Dann gibt es eine F-homogene Menge $H \subseteq \kappa$ mit $|H|=\kappa$.

Ein Beweis findet sich z.B. im Buch von JECH. Wir benutzen nun diese Homogenitätseigenschaft messbarer Kardinalzahlen, um die Determiniertheit analytischer Mengen abzuleiten.

Beweis von Satz 10.13 Sei κ eine messbare Kardinalzahl und $A \subseteq \mathcal{N}$ analytisch. Es ist zu zeigen, dass $G(\mathcal{N},A)$ determiniert ist.

Wir benutzen die Baumdarstellung analytischer Mengen. Sei also T ein zweidimensionaler Baum über ω derart, dass

$$x \in A \;\leftrightarrow\; T(x) := \{s \,|\, (x \restriction |s|, s) \in T\} \text{ ist nicht fundiert.}$$

Wir erweitern die übliche partielle Ordnung $\subset$ auf $\omega^{<\omega}$ (die „Anfangsstückordnung“) zu einer linearen Ordnung $\prec$, die man als „invertierte“ lexikographische Ordnung bezeichnen könnte.

$$\begin{aligned} s \prec t \ :\leftrightarrow\ & s \supset t \text{ oder} \\ & s \text{ und } t \text{ inkompatibel, und } s(n) < t(n), \text{ mit } n = \min\{k|\, s(k) \neq t(k)\} \end{aligned}$$

Für $s \in \omega^{<\omega}$ bezeichne $T_s := \{t|\, \exists u \subseteq s\, (u,t) \in T\}$. Außerdem sei $t_0, t_1, \ldots$ eine Aufzählung von $\omega^{<\omega}$. Für $|s| = 2n$ setzen wir

$$K_s := \{t_0, \ldots, t_{n-1}\} \cap T_s, \quad \text{sowie } k_s := |K_s| < \omega.$$

Wir definieren nun ein Hilfsspiel G^*:

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_1 & & \\ & & & & & \ldots \\ \mathrm{II} & & (b_0,h_0) & & (b_1,h_1) & \end{array}$$

wobei gelten muss: $a_i, b_i \in \mathbb{N}$, und für alle $s = (a_0, b_0, \ldots, a_i, b_i)$ ist $h_i : (K_s, \prec) \to \kappa$ ist eine ordnungserhaltende Abbildung, die h_{i-1} erweitert. Spieler II gewinnt eine Partie in G^*, wenn er „durchspielen“ kann, d.h. wenn er in jeder Runde einen regelkonformen Zug machen kann.

Es ist eine einfache Beobachtung, dass G^* determiniert ist: Wenn I keine Gewinnstrategie hat, kann sie II nicht davon abhalten, in jeder Runde einen gültigen Zug zu machen, und somit verfügt Spieler II über eine einfache Gewinnstrategie – eine Position zu erreichen, in der I keine Gewinnstrategie hat. (Dies ähnelt dem Beweis der Determiniertheit offener/abgeschlossener Spiele (s. Satz 10.5). In der Tat kann man G^* als offenes Spiel über einer entsprechenden Menge formulieren, wovon wir hier aber Abstand nehmen, um den Beweis nicht mit formalen Darstellungen zu überlasten.)

Gewinnt Spieler II eine Partie des Spiels G^*, so hat er insbesondere eine ordnungserhaltende Abbildung

$$h : (T(x), \prec) \to \kappa$$

konstruiert, wobei $x = (a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$. Somit ist $\prec$ eine Wohlordnung auf $T(x)$, woraus wiederum (nach Definition von $\prec$) folgt, dass $T(x)$ fundiert, also $x \notin A$ gilt. G^* ist also für Spieler II noch schwerer als $G(\mathbb{N}, A)$ da er neben $x \notin A$ noch

$(T(x), \prec)$ in κ einbetten muss. Somit ist klar, dass, falls II über eine Gewinnstrategie in G^* verfügt, auch eine Gewinnstrategie in $G(\mathcal{N}, A)$ besitzt: Er spielt seine Züge einfach „ohne die h_i“.

Da G^* determiniert ist, bleibt zu zeigen, dass auch Spielerin I eine Gewinnstrategie für $G(\mathcal{N}, A)$ aus einer Gewinnstrategie für G^* ableiten kann.

Sei also σ^* eine Gewinnstrategie für I in G^*. Nach $2n+2$ Zügen wurden also eine Folge $s = (a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n)$, sowie Abbildungen $h_0 \subset \cdots \subset h_n$ gespielt. Sei $E := \mathrm{Bild}(h_n)$. Es ist nun von entscheidender Bedeutung, dass es genau eine Möglichkeit für I gegeben hat, $h_0, \ldots, h_n$ so zu konstruieren, dass $E = \mathrm{Bild}(h_n)$. Da $|E| = k_s$ endlich ist, gibt es nur eine ordnungserhaltende Abbildung $(K_s, \prec) \leftrightarrow E$. Somit können wir σ^* als Funktion von (s, E) auffassen und definieren

$$\begin{array}{rccc} F_s: & [\kappa]^{k_s} & \to & \mathbb{N} \\ & E & \mapsto & \sigma^*(s, E) \end{array}$$

Jedes F_s ist eine Partition von $[\kappa]^{k_s}$ in ω-viele Teile. Nun ist κ messbar, also gibt es nach Satz 10.14 eine Menge $H \subseteq \kappa$, $|H| = \kappa$ mit $F_s|_{[H]^{k_s}} \equiv c_s$ konstant für alle s. Nun ist es naheliegend,

$$\sigma(s) := c_s$$

zu setzen. Wir behaupten, dass σ eine Gewinnstrategie für Spielerin I für $G(\mathcal{N}, A)$ ist.

Sei also $x = (a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$ der Ausgang einer Partie von $G(\mathcal{N}, A)$, in der I gemäß σ gespielt hat. Angenommen, $x \notin A$. Dann ist $(T(x), \prec)$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $< \omega_1$. Da $H \subseteq \kappa$ überabzählbar ist, existiert eine Einbettung $h : (T(x), \prec) \rightarrowtail H$.

Betrachte nun folgende Partie in G^*:

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_1 & & \\ & & & & & \cdots, \\ \mathrm{II} & & (b_0, h_0) & & (b_1, h_1) & \end{array}$$

wobei

$$h_i = h|_{K_{x \restriction 2i}}.$$

Nun gilt aber sicherlich

$$a_0 = \sigma(\emptyset) = \sigma^*(\emptyset, \emptyset) \text{ und } a_1 = \sigma(a_0, b_1) = \sigma^*((a_0, b_0), h(K_{(a_0, b_0)})),$$

nach der Definition von σ und der Tatsache, dass $h\, T(x)$ nach H einbettet. Induktiv ergibt sich

$$a_{n+1} = \sigma(x \restriction 2n) = \sigma^*(x \restriction 2n, h(K_{x \restriction 2n})),$$

d.h. I spielt gemäß σ^*, aber II gewinnt die Partie, im Widerspruch zu der Tatsache, dass σ^* eine Gewinnstrategie für I in G^* ist. Folglich muss $x \in A$ gelten, und σ ist eine Gewinnstrategie für Spielerin I in $G(\mathcal{N}, A)$. □

10.6 Das Determiniertheitsaxiom

Man kann nun natürlich die Determiniertheit für noch umfassendere Punktklassen der projektiven Hierarchie untersuchen. Wie sich zeigte, implizieren Determiniertheitsannahmen für höhere Stufen der projektiven Hierarchie auch stärkere Existenzaussagen über große Kardinalzahlen. 1962 untersuchten MYCIELSKI und STEINHAUS die Auswirkungen der Determiniertheit aller Spiele, welche sie in dem **Determiniertheitsaxiom** AD fassten.

(AD) Jede Teilmenge von $\mathcal{N}$ (bzw. $\mathcal{C}$) ist determiniert.

Wie bereits gesehen, ist AD nicht mit dem Auswahlaxiom AC verträglich. AD impliziert jedoch die abzählbare Variante AC_ω.

Satz 10.15
AD *impliziert, dass jede abzählbare Familie von nichtleeren Mengen reeller Zahlen eine Auswahlfunktion besitzt.*

Beweis: Sei $\{X_n\}_{n<\omega}$ eine abzählbare Familie von nichtleeren Mengen, $X_n \subseteq \mathcal{N}$. Wir definieren folgendes Spiel

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_1 & & \\ & & & & & \dots \\ \mathrm{II} & & b_0 & & b_1 & \end{array}$$

wobei Spieler II gewinnt, wenn $(b_0, b_1, \dots) \in X_{a_0}$. Offensichtlich kann I keine Gewinnstrategie besitzen, denn nach Wahl von a_0 kann II $b \in X_{a_0}$ spielen. AD impliziert, dass somit II eine Gewinnstrategie σ haben muss. Damit erhält man durch

$$f(X_n) = \text{ Folge, die II gemäß } \sigma \text{ spielt, wenn I } (n, 0, 0, \dots) \text{ spielt}$$

die gewünschte Auswahlfunktion. □

Das Determiniertheitsaxiom hat weitreichende Regularitätseigenschaften für Mengen reeller Zahlen zur Folge.

Satz 10.16
Setzt man AD *voraus, so gilt:*

(i) Jede Menge reeller Zahlen ist Lebesgue-messbar.

(ii) Jede Menge reeller Zahlen hat die Baire-Eigenschaft.

(iii) Jede überabzählbare Menge reeller Zahlen besitzt eine perfekte Teilmenge.

Wir werden die Aussage (i) in einem gesonderten Abschnitt beweisen. Für (ii) und (iii) zieht man die sogenannten *Banach-Mazur-Spiele* bzw. eine einfache Variante hiervon heran, welche in zahlreichen Büchern behandelt werden (z.B. KECHRIS, KANAMORI).

10.6.1 Determiniertheit und Messbarkeit

In Abschnitt 8.6 haben wir bereits die **Lebesgue-messbaren Mengen** sowie das **Maßproblem** kennengelernt. Letzteres fragt nach der Existenz eines σ-additiven Maßes auf den reellen Zahlen; anders gesagt: Gibt es ein Maß auf den reellen Zahlen, so dass jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ messbar ist?

Bevor wir zeigen, dass aus der Annahme von AD die Existenz eines solchen Maßes folgt, müssen wir den Begriff der *Messbarkeit* noch ein wenig eingehender betrachten.

In Abschnitt 8.6 wurden Mengen als *messbar* definiert, wenn sie Mitglied der Menge L sind, welche die Eigenschaften (L1)-(L5) besitzt. Diese Definition ist aber für unsere Zwecke sehr unhandlich, weshalb wir hier eine alternative Definition geben.

Man kann zeigen, dass die Lebesgue-messbaren Mengen eine σ-Algebra bilden, die die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ umfasst. Da die Borelmengen die kleinste σ-Algebra bilden, welche die offenen Mengen enthält, so ist jede Borelmenge messbar (also insbesondere die offenen und abgeschlossenen Mengen).

Für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ kann man ein **äußeres** bzw. **inneres Lebesgue-Maß**, λ^* bzw. λ_*, betrachten:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\, \lambda(U) : A \subseteq U, U \text{ offen}\},$$
$$\lambda^*(A) = \sup\{\, \lambda(C) : A \supseteq C, C \text{ abgeschlossen}\}.$$

Man versucht also, das Maß einer Menge von innen wie außen zu approximieren. A heißt **(Lebesgue) messbar**, falls

$$\lambda^*(A) = \lambda_*(A).$$

In diesem Fall schreibt man $\lambda(A)$ für den Wert $\lambda^*(A)$.

Man kann nun zeigen, dass die auf diese Weise definierten messbaren Mengen alle Eigenschaften (L1)-(L5) aus Abschnitt 8.6 besitzen, und dass insbesondere für Borelmengen gilt $\lambda^*(B) = \lambda_*(B)$.

Wir zeigen nun, dass unter Annahme von AD alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ messbar in diesem Sinne sind. Der Beweis ist sehr elementar und stammt von MARTIN (2003). Das Resultat wurde zuerst von MYCIELSKI und SWIERCZKOWSKI (2004) bewiesen. HARRINGTON fand einen einfacheren Beweis. Beide Beweise benutzen die Tatsache, dass analytische Mengen messbar sind.

Wir arbeiten nicht auf den reellen Zahlen, sondern dem Cantorraum $\mathcal{C}$. Hier ist das Lebesgue-Maß dadurch definiert, dass man jedem Zylinder $N(s)$ das Maß $2^{-|s|}$ zuordnet. Das durch (L1)-(L5) induzierte Maß ist maßtheoretisch äquivalent zum Lebesgue-Maß auf $[0,1]$ (indem man die Zylinder mit dyadischen Intervallen mit rationalen Endpunkten identifiziert). Durch die Translationsinvarianz (L5) hat ein Maß auf $[0,1]$ eine eindeutige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$.

Ein maßtheoretisches Spiel

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren zu jeder reellen Zahl $v \in (0,1]$ ein Spiel G_v:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & h_0 & & h_1 & & & \\ & & & & & & \dots \\ \mathrm{II} & & e_0 & & e_1 & & \end{array}$$

Die Bedingungen für dieses Spiel sind wie folgt: Wir setzen $v_0 = v$. Für alle i muss h_i eine Funktion von $\{0,1\}$ nach $[0,1]$ sein, für welche gilt:

$$\tfrac{1}{2}h_i(0) + \tfrac{1}{2}h_i(1) \geq v_i.$$

Für alle i muss $e_i \in \{0,1\}$ derart sein, dass $h_i(e_i) > 0$. Abschließend setzt man $v_{i+1} = h_i(e_i)$.

Ist p^* eine Position in G_v, so bezeichne $\pi(p^*)$ die Folge aller bis dahin von II getätigten Züge. Für eine komplette Partie x^* bezeichne $\pi(x^*) \in \mathcal{C}$ die unendliche Binärfolge aller von II getätigten Züge.

$$\text{Spielerin I gewinnt } x^* \text{ dann und nur dann, wenn } \pi(x^*) \in A.$$

Die Intuition hinter diesem Spiel ist folgende. Spielerin I versucht zu zeigen, dass das innere Maß von A mindestens v ist, $\lambda_*(A) \geq v$. Sie beginnt damit, dass sie zwei untere Schranken für $\lambda_*(\{x : (0)^\frown x \in A\})$ und $\lambda_*(\{x : (1)^\frown x \in A\})$ aufstellt, welche groß genug sind, um $\lambda_*(A) \geq v$ zu implizieren (Bedingung für I). Diese beiden Schranken sind die Werte von h_0. Spieler II kann nun eine dieser Schranken „anzweifeln“. Dies ist seine Wahl e_0, vorausgesetzt die untere Schranke ist nicht trivial ($= 0$). I fährt dann mit unteren Schranken für $\lambda_*(\{x : (e_0,0)^\frown x \in A\})$ und $\lambda_*(\{x : (e_0,1)^\frown x \in A\})$ fort; etc.

Lemma 10.17
Besitzt I eine Gewinnstrategie für G_v, so gilt $\lambda_*(A) \geq v$.

Beweis: Es sei σ eine Gewinnstrategie für I. Wir finden eine abgeschlossene Teilmenge C von A, für die $\lambda(C) \geq v$ gilt.

Zu diesem Zwecke definieren wir induktiv eine Menge von *zulässigen* Folgen in $2^{<\omega}$. Die leere Folge $\emptyset$ sei zulässig. Ist $s \in 2^{<\omega}$ zulässig, so bezeichne p_s die eindeutig bestimmten ersten $2|s|$ Züge einer Partie von G_v, in der I gemäß σ spielt und II mit s antwortet. In der nächsten Runde spielt nun I die Funktion $h_{|s|}$. Ist $e \in \{0,1\}$, so ist $s^\frown(e)$ zulässig, wenn $h_{|s|}(e) \neq 0$.

Offensichtlich ist die Menge der zulässigen Folgen ein Baum $T \subseteq 2^\omega$. (Ist s zulässig, so ist auch jedes Anfangsstück zulässig.) Da σ eine Gewinnstrategie ist und jede unendliche zulässige Folge x Züge von II in einer mit σ gespielten Partie darstellt, ist jeder unendliche Pfad dieses Baumes in A enthalten. Somit ist $[T]$ eine abgeschlossene Teilmenge von A.

Es bleibt zu zeigen, dass $\lambda([T]) \geq v$. Wir zeigen, dass für alle n gilt:

$$\lambda(\{x : x \restriction n \text{ zulässig}\}) \geq v.$$

Dazu definieren wir eine Hilfsfunktion $f : 2^{<\omega} \to [0,1]$:

$$f(s) = \begin{cases} v_{|s|} & \text{falls } p \text{ zulässig,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist $v_{|s|}$ gemäß der Partie, in der I anhand σ und II s spielt. Für zulässige s gilt dann:

$$\tfrac{1}{2}f(s^\frown(0)) + \tfrac{1}{2}f(s^\frown(1)) \;=\; \tfrac{1}{2}h_{|s|}(0) + \tfrac{1}{2}h_{|s|}(1) \;\geq\; v_{|s|} \;=\; f(s).$$

Offensichtlich gilt die Ungleichung $\frac{1}{2}f(s^\frown(0)) + \frac{1}{2}f(s^\frown(1)) \geq f(s)$ auch für nicht-zulässige s. Induktiv schließt man hieraus, dass für alle n

$$\sum_{|s|=n} 2^{-n} f(s) \geq v.$$

Nun folgt aber die Behauptung sofort aus der Tatsache, dass $f(s) \leq 1$ für alle s und $f(s) = 0$ für alle nicht-zulässigen s. $\square$

Lemma 10.18
Besitzt II eine Gewinnstrategie für G_v, so gilt $\lambda^*(A) \leq v$.

Beweis: Sei τ eine Gewinnstrategie für II. Zu gegebenem $\delta > 0$ finden wir eine offene Menge $U \supseteq A$ mit $\mu^*(U) \leq v + \delta$.

Wiederum definieren wir eine Baum zulässiger Folgen. Zusätzlich dazu konstruieren wir einen mit s und τ kompatiblen Spielverlauf $\psi(s)$. Wiederum ist $\emptyset$, und wir setzen $\psi(\emptyset) = \emptyset$.

Ist s zulässig, und sind $\psi(s)$ sowie $v_{|s|}$ gegeben, so definieren wir für $e \in \{0,1\}$

$$u^s(e) = \inf\{h(e) : h \text{ ist ein erlaubter Zug und } \tau(\psi(s)^\frown(h)) = e\}.$$

(O.B.d.A. setzen wir $\inf\emptyset = 1$.)

Zunächst sieht man, dass

$$\tfrac{1}{2}u^s(0) + \tfrac{1}{2}u^s(1) \leq v_{|s|},$$

denn andernfalls wäre ja noch etwas „Luft“ in der Definition von u^s.

Wir sagen, $s^\frown(e)$ ist *zulässig*, falls $u^s(e) \neq 1$. Ist $s^{(}e)$ zulässig, so wählen wir ein h, das genügend nahe an u^s liegt und von II „korrekt“ beantwortet wird:

$$h^{s,e}(e) \leq u^s(e) + 2^{-(|s|+1)}\delta \text{ mit } \tau(\psi(s)^\frown(h^{s,e})).$$

Dann setzen wir

$$\psi(s^{(}e)) = \psi(s)^\frown(h^{s,e}, e).$$

Ist $s^\frown(e)$ nicht zulässig, so setzen wir $h^{s,e} = 1$. Man beachte, dass in diesem Fall ebenfalls $h^{s,e} \leq u^s(e) + 2^{-(|s|+1)}\delta$ gilt.

Erneut definieren wir eine Funktion $f : 2^{<\omega} \to [0,1]$:

$$f(s) = \begin{cases} v_{|s|} & \text{falls } p \text{ zulässig,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diesmal gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}f(s^\frown(0)) + \tfrac{1}{2}f(s^\frown(1)) &= \tfrac{1}{2}h^{s,0}(0) + \tfrac{1}{2}h^{s,1}(1) \\ &\leq \tfrac{1}{2}u^s(0) + 2^{-(|s|+1)}\delta + \tfrac{1}{2}u^s(1) + 2^{-(|s|+1)}\delta \\ &\leq v_{|s|} + 2^{-(|s|+1)}\delta \;=\; f(s) + 2^{-(|s|+1)}\delta. \end{aligned}$$

Wiederum gilt die Abschätzung $\frac{1}{2}f(s^\frown(0)) + \frac{1}{2}f(s^\frown(1)) \leq f(s) + 2^{-(|s|+1)}\delta$ auch für nicht-zulässige s.

Wie im Beweis von Lemma 10.17 bilden die zulässigen Folgen einen Baum T, dessen unendlichen Pfade τ-kompatiblen Partien von G_v entsprechen. Da II eine Gewinnstrategie besitzt, liegt die abgeschlossene Menge der unendlichen Pfade im Komplement von A.

Um eine untere Schranke für das Maß dieser Pfade zu erhalten (und somit eine obere Schranke für das äußere Maß von A), beweist man induktiv die Ungleichung

$$\sum_{|s|=n} 2^{-n}f(s) \geq v + (2^n - 1)\delta/2^n.$$

Da $f(s) \geq 0$ für alle s und $f(s) = 1$ für nicht-zulässige s, folgt für alle n

$$\lambda(\{x : x \restriction n \text{ zulässig}\}) \leq v + (2^n - 1)\delta/2^n.$$

Hieraus folgt $\lambda([T]) \geq 1 - v - \delta$ und somit $\lambda^*(A) \leq v + \delta$. □

Nun können wir Satz 10.16 einfach herleiten. Zunächst halten wir fest, dass man o.B.d.A. in von G_v verlangen könnte, dass die Funktionen h_i rationalwertig sind. Somit ließe sich jedes Spiel G_v als Spiel auf $\omega^{<\omega}$ kodieren. Da nach Annahme von AD alle Spiele G_v determiniert sind, gilt nach den beiden Lemmata:

$$\begin{aligned} \lambda_*(A) &= \sup\{v : \text{ I hat Gewinnstrategie für } G_v\} \\ &= \inf\{v : \text{ II hat Gewinnstrategie für } G_v\} = \lambda^*(A), \end{aligned}$$

und somit ist A Lebesgue-messbar.

10.6.2 Determiniertheit vs. Auswahlaxiom

Der bestechende Vorzug des Axioms der Determiniertheit ist, daß sich hieraus einheitliche Eigenschaften für die Mengen der reellen Zahlen nachweisen lassen (s. 10.16), die aber notwendigerweise im Widerspruch zum Auswahlaxiom stehen. Darüber hinaus folgen aus dem Axiom der Determiniertheit weitere Ergebnisse, die den gewohnten Vorstellungen widersprechen, die wir aufgrund des Auswahlaxioms über die unendlichen Kardinalzahlen und Mächtigkeiten haben:

Mächtigkeit der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen besitzen keine Wohlordnung und damit auch keine Kardinalzahl, sondern nur eine Mächtigkeit, $\underline{c} = 2^{\aleph_0}$.

(i) Diese Mächtigkeit ist einerseits *klein*, denn $\mathbb{R}$ enthält nun keine Teilmenge vom O.T. ω_1. Jede wohlgeordnete Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist somit abzählbar, und damit ist $\underline{c}$ mit $\aleph_1$ (und damit mit *allen* überabzählbaren Kardinalzahlen) unvergleichbar. Insbesondere gibt es keine Mächtigkeit $\underline{m}$ mit

$$\aleph_0 < \underline{m} < 2^{\aleph_0},$$

eine Aussage, die in diesem Rahmen wohl am ehesten der Kontinuumshypothese nahekommt.

(ii) Sehr groß ist dagegen die Zahl

$$\Theta := \sup\{\xi \mid \exists f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \xi\}$$

(welche unter AC mit der Kardinalzahl von $(2^{\aleph_0})^+$ übereinstimmt), z. B. gilt $\Theta = \omega_\Theta$, also ist Θ eine Limeskardinalzahl, möglicherweise sogar regulär und damit schwach unerreichbar. Die Bestimmung von Θ kann man in einer Mengenlehre, in welcher das Auswahlaxiom falsch ist, als das Kontinuumsproblem ansehen (s. Kanamori pp. 396ff).

(iii) Die reellen Zahlen besitzen eine Darstellung

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\xi<\omega_1} A_\xi$$

mit paarweise disjunkten nicht-leeren Mengen A_ξ (für die es nach (i) also keine Auswahlfunktion geben kann). Während aus AD das Auswahlaxiom für abzählbar-viele nicht-leere Mengen reeller Zahlen folgt, gilt es also bereits nicht mehr für überabzählbar-viele solcher Mengen.

Vergleich von Mächtigkeiten

Mächtigkeiten kann man auf verschiedene Weise vergleichen:

$$\begin{aligned} a \preccurlyeq b : &\quad\leftrightarrow\quad \exists f\ (f : a \rightarrowtail b) \\ a \preccurlyeq^* b : &\quad\leftrightarrow\quad \exists g\ (g : b \twoheadrightarrow a)\ \vee\ a = \emptyset. \end{aligned}$$

Das Auswahlaxiom bewirkt, daß diese beiden Beziehungen übereinstimmen. Den zweiten Begriff haben wir bereits benutzt: es ist

$$\Theta = \sup\{\xi \mid \xi \preccurlyeq^* \mathcal{N}\},$$

also die Nachfolgerkardinalzahl $(2^{\aleph_0})^+$ im Falle des Auswahlaxioms, jedoch eine Limeskardinalzahl im Falle des Axioms AD. Noch deutlicher fallen beide Beziehungen in folgendem Beispiel auseinander:

Ist I das Ideal der endlichen Teilmengen von natürlichen Zahlen, so läßt sich zeigen, daß die Menge der Restklassen $\mathcal{P}(\omega)/I$ *nicht* geordnet werden kann. Insbesondere ist

$$\mathbb{R} \prec \mathcal{P}(\omega)/I$$

(denn $\mathbb{R}$ läßt sich ja ordnen), aber zugleich ist

$$\mathcal{P}(\omega)/I \preccurlyeq^* \mathbb{R},$$

denn es gibt ja eine kanonische Abbildung $f : \mathcal{P}(\omega) \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\omega)/I$. Das Bild einer Menge kann somit eine größere Mächtigkeit haben als das Urbild!

Die Theorie der Mächtigkeiten unter AD ist ohnehin bizarr: während es zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ keine weitere Mächtigkeit gibt, so gibt es genau 3 Mächtigkeiten zwischen $2^{\aleph_0}$ und $2^{(2^{\aleph_0})}$: Setzen wir nämlich $\underline{k}$ =Mächtigkeit von $\mathcal{P}(\omega)/I$), so ist

$$2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_0} + \aleph_1 < 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_1} + \underline{k} < 2^{\underline{k}} = 2^{(2^{\aleph_0})}.$$

Meßbare Zahlen

Die meßbaren Kardinalzahlen gelten als sehr große unerreichbare Kardinalzahlen, die - im Gegensatz zu den "kleineren" großen Zahlen (wie etwa die schwachkompakten Zahlen von 10.5.1) - sogar das Axiom V=L verletzen. Ohne das Auswahlaxiom kann man *meßbare* Zahlen kaum als große Kardinalzahlen ansehen, da nach Solovay unter AD ω_1 und ω_2 bereits meßbar (aber natürlich nicht einmal schwach unerreichbar) sind. Dagegen sind alle ω_n mit $2 < n < \omega$ dann singulär, und zwar mit Konfinalität ω_2, während ω nun nicht meßbar ist, da es keinen freien UF auf ω gibt!

Kapitel 11

Literatur

Übersichtsartikel

KECHRIS, A.S.: *New directions in descriptive set theory*.
Bull. J .Symb. Logic 5,2 (1999), 161-174
MARTIN, D.A.: *Descriptive Set Theory: Projective Sets* in:
BARWISE (ed.) *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam 1977, 783-815.

Standardwerke über Deskriptive Mengenlehre

KECHRIS, A.S.: *Classical Descriptive Set Theory.* Springer 1995
MOSCHOVAKIS, Y.N.: *Descriptive Set Theory.* NHPC Amsterdam 1980
JUDAH-JUST-WOODIN: *Set Theory of the Continuum.* Springer 1992

Bücher über allgemeine Mengenlehre

DEISER, O.: *Einführung in die Mengenlehre.* Springer 2004
DEVLIN, K.: *Aspects of Constructibility.* Springer 1984
HERRLICH, H.: *Axiom of Choice.* Springer 2006
JECH, TH.: *Set Theory.* Springer 2003
KANAMORI, A.: *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings.* Springer 2003
KURATOWSKI-MOSTOWSKI: *Set Theory.* NHPC Amsterdam 1976

MOORE, G.H.: *Zermelo's Axiom of Choice.* Springer 1982
LEVY, A.: *Basic Set Theory.* Springer 1979

Bücher über Topologie

CHRISTENSEN, J.P.R.: *Topology and Borel Structures.* NHPC Amsterdam 1974
KUNEN-VAUGHAN (ed.) *Handbook of Set-Theoretic Topology.* NHPC Amsterdam 1984
KURATOWSKI, K.: *Topology I, II.* Academic Press 1966 (besonders Teil I)
OXTOBY, J.: *Maß und Kategorie.* Springer 1971
QUERENBURG, B.V.: *Mengentheoretische Topologie.* Springer 1973 (+ Neuaufl.)
SIERPINSKI, W.: *General Topology.* Toronto 1952

Zur Einordnung und Vergleich mit den Hierarchien der Rekursionstheorie

HINMAN, P.G.: *Recursion-Theoretic Hierarchies.* Springer 1978
MANSFIELD-WEITKAMP: *Recursive aspects of descriptive set theory.* Oxford Logic Guides 1985

Von historischem und allgemeinem Interesse

BAIRE, R.: *Leçons sur les fonctions discontinues.* Paris 1930
CANTOR, G.: *Gesammelte Abhandlungen.* Springer 1980
FELGNER, U. (Herausgeber) *Mengenlehre.* Wiss. Buchgesellschaft 1979
HAUSDORFF, F.: *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig 1914, s.a.
HAUSDORFF, F.: *Gesammelte Werke Band II: Grundzüge der Mengenlehre.* Springer 2002
HAUSDORFF, F.: *Mengenlehre.* Berlin 1935
LUSIN, N.N.: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications.* Paris 1930
MESCHKOWSKI, H.: *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors* vieweg 1967

MESCHKOWSKI, H.: *Hundert Jahre Mengenlehre.* dtv 1973
SIERPINSKI, W.: *Les ensembles projectifs et analytiques.* Paris 1950

Zeitschriftenartikel

BERNSTEIN, FELIX
Zur Theorie der trigonometrischen Reihe. Berichte Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathem.-Phys. Klasse 60 (1908), pp. 325-338
CANTOR, GEORG
Beiträge zu Begründung der transfiniten Mengenlehre. Math. Ann. 46, (1895), 481 - 512, Math. Ann. 49, (1897), 207 - 246
SOLOVAY, ROBERT M.
A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue-measurable. Annals of Math. 92 (1970), pp. 1-56
SPECKER, ERNST
Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiom). Z Math Logik Grundlagen Math 3 (1957), pp. 173-210
SHELAH, S.
Can you take Solovay's inaccessible away? Israel J. Math, 48 (1984), pp. 1-47
MARTIN, D.A.
Borel determinacy. Ann. of Math. (2) 102 (1975), no. 2, 363–371

Varia

Bibliographie

G.H. MÜLLER und V. LENSKI ed. Ω-*Bibliography of Mathematical Logic.*
Vol. I-VI. Springer 1987, fortgesetzt im internet unter:
http://www-logic.uni-kl.de/BIBL/index.html
Weitere links auch über http://www.math.uni-heidelberg.de/logic/wwwlinks.html

Skripten im Internet über die links
http://www.math.uni-heidelberg.de/logic/skripten.html
http://www.uni-bonn.de/logic/world.html

Biographien
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/BiogIndex.html