

Inhaltsverzeichnis

I Collegium Logicum	1
1 Die Aussagenlogik	4
1.1 Syntax der Aussagenlogik	5
1.1.1 Definition der aussagenlogischen Formeln	5
1.1.2 Induktion und Rekursion	6
1.1.3 Beweis durch Induktion über den Formelaufbau	8
1.1.4 Definition durch Rekursion über den Formelaufbau	9
1.2 Semantik der Aussagenlogik	10
1.2.1 Wahrheitsfunktionen	10
1.2.2 Interpretation von aussagenlogischen Formeln	11
1.2.3 Definition der wichtigsten semantischen Begriffe	12
1.2.4 Einige wichtige allgemeingültige Formeln	14
1.2.5 Einige wichtige Äquivalenzen	14
1.2.6 Boolesche Gesetze	15
1.2.7 Einsetzungsregel	15
1.2.8 Ersetzungsregel	16
1.3 Normalformen	17
1.3.1 Entscheidungsverfahren für Boolesche Normalformen	19
1.3.2 Boolescher Repräsentationssatz	20
1.3.3 Das Dualitätsprinzip	21
1.4 Der semantische Folgerungsbegriff: Erfüllbarkeit	23
1.4.1 Zusammenhang zwischen Folgerung und Erfüllbarkeit	24
1.5 Der syntaktische Folgerungsbegriff: Beweisbarkeit	25
1.5.1 Axiomensysteme und Beweise	25
1.5.2 Korrektheit und Vollständigkeit	26
1.5.3 Einige Axiomensysteme der Aussagenlogik	27
1.6 Vollständigkeit und Kompaktheit	29

1.6.1	Verallgemeinerte Expansion	31
1.6.2	Lemma über die Negation	32
1.6.3	Tautologiesatz	32
1.6.4	Deduktionstheorem	33
1.6.5	Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit von Theorien	33
1.6.6	Lemma über Beweisbarkeit und Konsistenz	34
1.6.7	Vervollständigung	35
1.6.8	Verallgemeinerter Vollständigkeitssatz	35
1.6.9	Kompaktheitssatz der Aussagenlogik	36
2	Strukturen und formale Sprachen	37
2.1	Strukturen	38
2.1.1	Beispiele	38
2.1.2	Mehrsortige Strukturen	39
2.1.3	Symbole für formale Sprachen	40
2.2	Unterstrukturen und Morphismen	41
2.2.1	Beispiele	43
2.2.2	Satz über Unterstrukturen	44
2.2.3	Homomorphes Bild, Identifizierung	44
2.3	Terme einer Sprache	45
2.3.1	Interpretation von Termen	45
2.3.2	Spracherweiterung durch Namen	46
2.3.3	Erzeugte Unterstrukturen	47
2.4	Formeln einer Sprache	48
2.4.1	Beweis durch Induktion über den Formelaufbau	49
2.4.2	Freie und gebundene Variable	50
2.4.3	Substitution	51
3	Modelle und Theorien	53
3.1	Das Wahrheitsprädikat: Modelle	53
3.1.1	Satz über neue Konstanten	55
3.2	Axiome und Theorien	56
3.3	Der Kompaktheitssatz und einige Folgerungen	57
3.3.1	Kompaktheitssatz	57
3.3.2	Satz über die Existenz unendlicher Modelle	58
3.4	Diagramme	59
3.4.1	Diagrammlemma	59

3.4.2	Universelle Theorien	60
3.4.3	Modellerweiterungssatz von Keisler	61
3.4.4	Erhaltungssatz für universelle Formeln	62
3.4.5	Satz von Łoś-Tarski	62
3.5	Einige mathematische Theorien	63
3.5.1	Ordnungen	63
3.5.2	Gruppen- und Körpertheorie	64
3.5.3	Axiomatisierbarkeit: Elementare Klassen	65
3.5.4	Zahlentheorie	66
3.5.5	Mengenlehre	69
4	Gesetze der Prädikatenlogik	70
4.1	Ein Axiomensystem für die Prädikatenlogik	70
4.1.1	Axiomensystem von Shoenfield	71
4.1.2	Definition eines Beweises	72
4.2	Der Tautologiesatz	73
4.3	Substitution und universeller Abschluß	75
4.3.1	Hintere Generalisierung	76
4.3.2	Satz über die Generalisierung	76
4.3.3	Substitutionsregel	77
4.3.4	Substitutionssatz	77
4.3.5	Abschlußsatz	79
4.4	Ersetzung und Umbenennung, Gleichheit	79
4.4.1	Ersetzungstheorem	79
4.4.2	Eigenschaften des Gleichheitsprädikates	80
4.5	Pränexe Normalformen	82
4.5.1	Umformungen mit der Negation	82
4.5.2	Umformungen mit Konjunktion und Disjunktion	82
4.5.3	Umformungen mit der Implikation	83
4.5.4	Das Dualitätsprinzip für die Prädikatenlogik	85
4.6	Das Deduktionstheorem	87
4.7	Erweiterungen von Theorien, Widerspruchsfreiheit	89
4.7.1	Erweiterungen und Expansionen	89
4.7.2	Satz über rein sprachliche Erweiterungen von Theorien	91
4.7.3	Widerspruchsfrei/widerspruchsvoll	93
4.7.4	Beweisbarkeit und Widerspruchsfreiheit	94
4.8	Termm Modelle	95

4.8.1	Kanonische Struktur einer Theorie, Termstruktur	95
4.8.2	Satz über Termmodelle	96
4.9	Vervollständigung von Theorien	97
4.9.1	Satz von Lindenbaum	98
4.10	Henkin-Theorien	99
4.11	Der Gödelsche Vollständigkeitssatz	102
4.11.1	Vollständigkeit der Prädikatenlogik / Modellexistenz-Satz	102
4.11.2	Satz von Löwenheim	104
4.11.3	Kompaktheitssatz	105
II	Mengenlehre	106
5	Grundlagen der Mengenlehre	107
5.1	Ordinalzahlen	107
5.1.1	Ordnungen	108
5.1.2	Definition der Ordinalzahlen	111
5.1.3	Satz: Charakterisierung von Ordinalzahlen	112
5.1.4	Die Ordnung der Ordinalzahlen	112
5.2	Mengen und Klassen	114
5.2.1	Komprehensionsaxiom	115
5.2.2	Auswege aus den Antinomien	116
5.2.3	Die mengentheoretische Sprache mit Klassentermen	117
5.2.4	Überblick über verschiedene Axiomensysteme	120
5.3	Extensionalität und Aussonderung	122
5.4	Relationen und Funktionen	124
5.5	Vereinigung und Produkt	127
5.5.1	Vereinigung	127
5.5.2	Potenzmenge und allgemeines Produkt	130
5.6	Überblick über die ZF-Axiome	133
6	Mengen von Mengen von ...	135
6.1	Induktion und Rekursion	135
6.1.1	Ordnungen auf Klassen	135
6.1.2	Minimumsprinzip	136
6.1.3	Induktionsprinzip für Wohlordnungen	137
6.1.4	Segmente	138
6.1.5	Rekursionsatz für Wohlordnungen	138

6.1.6	Repräsentationssatz für Wohlordnungen	141
6.1.7	Transfinite Rekursion	143
6.2	Die von-Neumannsche Hierarchie	144
6.3	Die Rolle des Unendlichkeitsaxioms	145
6.3.1	PA in mengentheoretischer Sprache	146
6.3.2	Die Theorie der endlichen Mengen	148
6.3.3	Anwendungen der numerischen Rekursion	148
7	Das Auswahlaxiom	151
7.1	Zermelos Axiom	151
7.1.1	Mengentheoretisch äquivalente Formen	151
7.1.2	Der Zermelosche Wohlordnungssatz	152
7.1.3	Maximumsprinzipien von Zorn und Hausdorff	153
7.2	Anwendungen des Auswahlaxioms	156
7.2.1	Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.	156
7.2.2	Der Satz von Hahn-Banach	156
7.2.3	Nicht-meßbare Mengen	156
7.2.4	Äquivalenz verschiedener Stetigkeitsdefinitionen	158
7.2.5	Satz von Tychonoff	158
7.2.6	Boolesches Primidealtheorem	158
8	Mächtigkeiten und Kardinalzahlen	161
8.1	Endliche und abzählbare Mengen	161
8.2	Abzählbare Mengen	163
8.3	Überabzählbare Mengen	165
8.4	Mächtigkeiten	165
8.4.1	Satz von Cantor-Schröder-Bernstein	166
8.4.2	Vergleichbarkeitssatz von Hartogs	167
8.4.3	Satz von Cantor	167
8.5	Kardinalzahlen	168
8.5.1	Operationen auf den Kardinalzahlen	169
8.5.2	Satz von Hessenberg	170
8.5.3	Satz von Bernstein	171
III	Grundlagen der Modelltheorie	172
9	Hin und her: Vollständigkeit und elementare Äquivalenz	173

9.1	Elementare Äquivalenz	173
9.2	Die Theorie der dichten linearen Ordnung	175
9.3	Kategorizität	178
10	Auf und ab: Elementare Substrukturen	180
10.1	Elementare Substrukturen	180
10.2	Diagrammlemma (Fortsetzung)	181
10.3	Kriterium von Tarski	181
10.4	Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski (abwärts)	182
10.5	Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski (aufwärts)	183
10.6	Test von Vaught	184
11	Vereinigungen, Durchschnitte und Ketten	185
11.1	Satz über Ketten von Strukturen	186
11.2	Satz von Chang- Łoś-Szusko	188
12	Produkte und Ultraprodukte	189
12.1	Direktes Produkt	190
12.2	Filter und Ultrafilter	191
12.3	Ultrafiltersatz, Boolesches Primidealtheorem	192
12.4	Reduziertes Produkt	192
12.5	Satz von Łoś	193
12.6	Kompaktheitssatz	196
13	Modellvollständigkeit	198
13.1	Robinsonscher Test	200
IV	Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit	202
14	Berechenbare Funktionen	205
14.1	Turing-Maschinen	205
14.2	URM-berechenbare Funktionen	207
14.3	Churchsche These	208
14.4	Aufzählbarkeitssätze	209
14.5	Primitiv-rekursive Funktionen	209
14.6	Rekursive und partiell-rekursive Funktionen	212
14.7	Partielle Entscheidbarkeit	214

15 Definierbarkeit berechenbarer Funktionen	215
15.1 Eine endlich-axiomatisierbare Teiltheorie von PA	215
15.2 Arithmetische Formeln	217
15.3 Enderweiterungen	218
15.4 Erhaltungseigenschaften unter Enderweiterungen	220
15.5 Lemma	220
15.6 Gödels Lemma	222
15.7 Definierbarkeitssatz für rekursive Funktionen	223
15.8 Repräsentierbarkeit	224
16 Die Gödelschen Sätze	227
16.1 Gödel-Nummern	227
16.2 Diagonalisierungslemma	228
16.3 Satz von Gödel-Rosser	229
16.4 Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz	230
16.5 Kombinatorische Prinzipien	231
16.6 Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz	233
16.7 Wahrheit ist nicht arithmetisch definierbar	234
16.8 Unentscheidbarkeit	235
17 Literatur	238

Kapitel 11

Vereinigungen, Durchschnitte und Ketten

Bekanntlich ist der Durchschnitt von (affinen) Unterräumen eines Vektorraumes wieder ein Unterraum (oder die leere Menge), während die Vereinigungsmenge lediglich einen Unterraum aufspannt. Ähnlich ist es im allgemeinen Fall von Substrukturen einer Struktur \mathcal{A} :

Durchschnitt

Es sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Substrukturen einer Struktur \mathcal{A} . Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} |\mathcal{A}_i|$ entweder \emptyset oder Grundbereich einer Substruktur von \mathcal{A} , die mit $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ bezeichnet wird.

Denn sind die Bedingungen (i) und (ii) von Satz 2.2.2 für alle $|\mathcal{A}_i|$ erfüllt, so auch für deren Durchschnitt. - Wichtiger als der Durchschnitt ist die

Vereinigung

Es sei wieder $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Substrukturen einer Struktur \mathcal{A} . Dann erzeugt die Vereinigungsmenge $\bigcup_{i \in I} |\mathcal{A}_i|$ eine Substruktur von \mathcal{A} , die mit $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ bezeichnet wird, ihr Grundbereich ist $\overline{\bigcup_{i \in I} |\mathcal{A}_i|}$.

Interessanter ist der Fall, daß für eine vorgegebene Familie von Strukturen eine gemeinsame Oberstruktur nicht vorhanden ist, sondern erst gebildet werden soll. Dazu müssen aber die Strukturen bestimmte Verträglichkeitsbedingungen erfüllen.

Ketten von Strukturen

Eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ von \mathcal{L} -Strukturen bildet eine *Kette*, wenn je zwei Strukturen miteinander vergleichbar sind in dem Sinne, daß von zwei Strukturen jeweils eine Struktur eine Substruktur der anderen ist:

$$(K) \quad (\mathcal{A}_i)_{i \in I} \text{ ist eine } \mathbf{Kette} : \iff \forall i, j \in I : \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_j \text{ oder } \mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_i.$$

Damit sind auch je endlich-viele Strukturen der Kette vergleichbar; insbesondere: wenn $\mathcal{A}_{i_1} \dots \mathcal{A}_{i_n}$ Strukturen der Kette sind, so sind alle $\subseteq \mathcal{A}_{i_k}$ für ein k .

Später benötigen wir einen stärkeren Begriff:

$$(\mathcal{A}_i)_{i \in I} \text{ ist eine } \mathbf{elementare Kette} : \iff \forall i, j \in I : \mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j \text{ oder } \mathcal{A}_j \preceq \mathcal{A}_i.$$

Die **Vereinigung** $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ einer Kette können wir wie folgt definieren:

$$(V1) \quad |\mathcal{A}| := \bigcup_{i \in I} |\mathcal{A}_i|,$$

$$(V2) \quad R^{\mathcal{A}} := \bigcup_{i \in I} R^{\mathcal{A}_i} \quad \text{für jedes Relationszeichen } R \text{ der Sprache } \mathcal{L},$$

$$(V3) \quad f^{\mathcal{A}} := \bigcup_{i \in I} f^{\mathcal{A}_i} \quad \text{für jedes Funktionszeichen } f \text{ der Sprache } \mathcal{L},$$

$$(V4) \quad c^{\mathcal{A}} := c^{\mathcal{A}_i} \quad \text{für jede Individuenkonstante } c \text{ der Sprache } \mathcal{L}.$$

Das bedeutet also für ein Relationszeichen R und Elemente $a_1, \dots, a_n \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \iff R^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n) \text{ für ein } i \in I \text{ mit } a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}_i,$$

wobei es wegen (K) auf die Auswahl des gewählten i nicht ankommt, ähnlich im Falle der Funktionszeichen. Die Individuenkonstanten werden wegen (K) in allen \mathcal{A}_i durch dasselbe Element interpretiert (und damit auch in der Vereinigung).

11.1 Satz über Ketten von Strukturen

Ist $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ die Vereinigung der Kette $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$, so gilt:

- (i) \mathcal{A} ist eine \mathcal{L} -Struktur mit $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ für jedes $i \in I$,
- (ii) \mathcal{A} ist die kleinste derartige \mathcal{L} -Struktur.

(iii) Ist $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine elementare Kette, so gilt $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}$ für jedes $i \in I$.

(Kettenlemma von Tarski)

In den meisten Fällen (wie auch in den folgenden Beispielen) kann man sich auf **aufsteigende ω -Ketten** von Strukturen beschränken; in diesen Fällen ist die Indexmenge $I = \omega = \mathbb{N}$ und es gilt:

$$\forall n < m \quad \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_m.$$

Beispiele

1. Es sei $A_n := [1/2^n, 1]$ das abgeschlossene Intervall der reellen Zahlen, $\mathcal{A}_n = (A_n, \leq)$ mit der gewöhnlichen \leq -Beziehung auf den reellen Zahlen. Dann ist die Vereinigung dieser Strukturen das halb-offene Intervall (A, \leq) mit $A = (0, 1]$.
2. Es sei $A_n := \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$, $\mathcal{A}_n = (A_n, \leq)$ mit der gewöhnlichen \leq -Beziehung auf den ganzen Zahlen. Dann ist die Vereinigung dieser Strukturen (\mathbb{Z}, \leq) .

In beiden Fällen ist die Vereinigung von (dichten) linearen Ordnungen wieder eine (dichte) lineare Ordnung, aber die Existenz von Endpunkten bleibt nicht erhalten! Im ersten Fall haben wir isomorphe, insbesondere elementar-äquivalente Strukturen, aber die Vereinigung hat neue Eigenschaften. Man kann nun aber genau angeben, welche Eigenschaften erhalten bleiben:

$$\sigma \text{ ist ein } \forall\exists\text{-Satz: } \iff \sigma = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \varphi$$

für eine quantorenfreie Formel φ

Beispiele

1. $\forall x \exists y (x \leq y \wedge x \neq y)$ (Unbeschränktheit nach oben) ist ein $\forall\exists$ -Satz, nicht aber $\exists x \forall y x \leq y$ (Existenz eines kleinsten) bzw. $\exists x \forall y y \leq x$ (Existenz eines größten Elementes).
2. Wichtige Sätze der Algebra sind ebenfalls $\forall\exists$ -Sätze: $\forall x \exists y (x \circ y = e)$ (Existenz eines inversen Elementes) sowie

$$\forall x_0 \dots x_n \exists y (y^{n+1} + x_n y^n + \dots + x_0 = 0)$$

(Existenz von Nullstellen für normierte Polynome vom Grad $n + 1$).

$\forall\exists$ -Sätze bleiben bei der Vereinigung von Ketten erhalten:

Erhaltungssatz für Ketten

Ist $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ die Vereinigung der Kette $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$, so gilt für jeden $\forall\exists$ -Satz σ :

$$\mathcal{A}_i \models \sigma \text{ für alle } i \in I \implies \mathcal{A} \models \sigma.$$

Beweis: Es sei $\sigma = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \varphi$ für eine quantorenfreie Formel φ und σ gelte in allen \mathcal{A}_i . Um die Gültigkeit in \mathcal{A} nachzuweisen, seien beliebige $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ gegeben. Nach Definition der Vereinigungsmenge einer Kette können wir ein $i \in I$ finden, so daß alle $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}_i$ sind. Weil σ in \mathcal{A}_i gilt, gibt es $b_1, \dots, b_m \in \mathcal{A}_i$ mit

$$\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m].$$

Da φ quantorenfrei ist, sich also aussagenlogisch aus atomaren Formeln zusammensetzt, und da $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$, so gilt die Formel φ mit derselben Belegung auch in \mathcal{A} . Die b_1, \dots, b_m sind aber auch in \mathcal{A} , so daß dort der Existenzsatz gilt:

$$\mathcal{A} \models \exists y_1 \dots \exists y_m \varphi[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]. \quad \square$$

Das obige Ergebnis ist optimal: Eine Theorie heiße **induktiv** gdw sie abgeschlossen ist unter Vereinigungen von Ketten, d. h. ist $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Kette von Modellen von \mathbb{T} , so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ein Modell von \mathbb{T} .

11.2 Satz von Chang- Łoś-Szusko

Eine Theorie \mathbb{T} ist induktiv gdw sie ein Axiomensystem aus $\forall\exists$ -Sätzen besitzt.

Beim Beweis (den wir hier nicht ausführen können) wird für die Induktivität von \mathbb{T} nur die Abgeschlossenheit unter aufsteigenden ω -Ketten benötigt, hieraus folgt dann also schon die Abgeschlossenheit unter beliebigen Ketten!

Zahlreiche algebraische Theorien sind induktiv: die Theorie der (ABELSchen) Gruppen, der Ringe, der (reell- bzw. algebraisch-abgeschlossenen) Körper, der Vektorräume, etc.