Inhaltsverzeichnis

Kapitel 11

Vereinigungen, Durchschnitte und Ketten

Bekanntlich ist der Durchschnitt von (affinen) Unterräumen eines Vektorraumes wieder ein Unterraum (oder die leere Menge), während die Vereinigungsmenge lediglich einen Unterraum aufspannt. Ähnlich ist es im allgemeinen Fall von Substrukturen einer Struktur $\mathcal{A}$:

Durchschnitt

Es sei $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Substrukturen einer Struktur $\mathcal{A}$. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{i\in I}|\mathcal{A}_i|$ entweder $\emptyset$ oder Grundbereich einer Substruktur von $\mathcal{A}$, die mit $\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ bezeichnet wird.

Denn sind die Bedingungen (i) und (ii) von Satz 2.2.2 für alle $|\mathcal{A}_i|$ erfüllt, so auch für deren Durchschnitt. - Wichtiger als der Durchschnitt ist die

Vereinigung

Es sei wieder $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Substrukturen einer Struktur $\mathcal{A}$. Dann *erzeugt* die Vereinigungsmenge $\bigcup_{i\in I}|\mathcal{A}_i|$ eine Substruktur von $\mathcal{A}$, die mit $\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i$ bezeichnet wird, ihr Grundbereich ist $\overline{\bigcup_{i\in I}|\mathcal{A}_i|}$.

Interessanter ist der Fall, daß für eine vorgegebene Familie von Strukturen eine gemeinsame Oberstruktur nicht vorhanden ist, sondern erst gebildet werden soll. Dazu müssen aber die Strukturen bestimmte Verträglichkeitsbedingungen erfüllen.

Ketten von Strukturen

Eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen bildet eine *Kette*, wenn je zwei Strukturen miteinander vergleichbar sind in dem Sinne, daß von zwei Strukturen jeweils eine Struktur eine Substruktur der anderen ist:

$$(K) \quad (\mathcal{A}_i)_{i\in I} \textit{ ist eine } \textbf{Kette} : \iff \forall i,j \in I: \ \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_j \textit{ oder } \mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_i.$$

Damit sind auch je endlich-viele Strukturen der Kette vergleichbar; insbesondere: wenn $\mathcal{A}_{i_1} \dots \mathcal{A}_{i_n}$ Strukturen der Kette sind, so sind alle $\subseteq \mathcal{A}_{i_k}$ für ein k.

Später benötigen wir einen stärkeren Begriff:

$$(\mathcal{A}_i)_{i\in I} \textit{ ist eine } \textbf{elementare Kette} : \iff \forall i,j \in I: \mathcal{A}_i \preccurlyeq \mathcal{A}_j \textit{ oder} \mathcal{A}_j \preccurlyeq \mathcal{A}_i.$$

Die **Vereinigung** $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ einer Kette können wir wie folgt definieren:

(V1) $|\mathcal{A}| := \bigcup_{i\in I} |\mathcal{A}_i|$,

(V2) $R^{\mathcal{A}} := \bigcup_{i\in I} R^{\mathcal{A}_i}$ für jedes Relationszeichen R der Sprache $\mathcal{L}$,

(V3) $f^{\mathcal{A}} := \bigcup_{i\in I} f^{\mathcal{A}_i}$ für jedes Funktionszeichen f der Sprache $\mathcal{L}$,

(V4) $c^{\mathcal{A}} := c^{\mathcal{A}_i}$ für jede Individuenkonstante c der Sprache $\mathcal{L}$.

Das bedeutet also für ein Relationszeichen R und Elemente $a_1,\dots,a_n \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n) \iff R^{\mathcal{A}_i}(a_1,\dots,a_n) \text{ für ein } i \in I \text{ mit } a_1,\dots,a_n \in A_i,$$

wobei es wegen (K) auf die Auswahl des gewählten i nicht ankommt, ähnlich im Falle der Funktionszeichen. Die Individuenkonstanten werden wegen (K) in allen $\mathcal{A}_i$ durch dasselbe Element interpretiert (und damit auch in der Vereinigung).

11.1 Satz über Ketten von Strukturen

Ist $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ die Vereinigung der Kette $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$, so gilt:

(i) *$\mathcal{A}$ ist eine $\mathcal{L}$-Struktur mit $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ für jedes $i \in I$,*

(ii) *$\mathcal{A}$ ist die kleinste derartige $\mathcal{L}$-Struktur.*

(iii) *Ist* $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ *eine elementare Kette, so gilt* $\mathcal{A}_i \preccurlyeq \mathcal{A}$ für jedes $i \in I$.
(**Kettenlemma von Tarski**)

In den meisten Fällen (wie auch in den folgenden Beispielen) kann man sich auf **aufsteigende ω-Ketten** von Strukturen beschränken; in diesen Fällen ist die Indexmenge $I = \omega = \mathbb{N}$ und es gilt:

$$\forall n < m \quad \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_m.$$

Beispiele

1. Es sei $A_n := [1/2^n, 1]$ das abgeschlossene Intervall der reellen Zahlen, $\mathcal{A}_n = (A_n, \leq)$ mit der gewöhnlichen $\leq$-Beziehung auf den reellen Zahlen. Dann ist die Vereinigung dieser Strukturen das halb-offene Intervall $(A, \leq)$ mit $A = (0, 1]$.

2. Es sei $A_n := \{x \in \mathbb{Z} | -n \leq x \leq n\}$, $\mathcal{A}_n = (A_n, \leq)$ mit der gewöhnlichen $\leq$-Beziehung auf den ganzen Zahlen. Dann ist die Vereinigung dieser Strukturen $(\mathbb{Z}, \leq)$.

In beiden Fällen ist die Vereinigung von (dichten) linearen Ordnungen wieder eine (dichte) lineare Ordnung, aber die Existenz von Endpunkten bleibt nicht erhalten! Im ersten Fall haben wir isomorphe, insbesondere elementar-äquivalente Strukturen, aber die Vereinigung hat neue Eigenschaften. Man kann nun aber genau angeben, welche Eigenschaften erhalten bleiben:

$$\sigma \textit{ ist ein } \forall\exists\textit{-Satz:} \iff \sigma = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m \, \varphi$$
$$\textit{für eine quantorenfreie Formel } \varphi$$

Beispiele

1. $\forall x \exists y \, (x \leq y \wedge x \neq y)$ (Unbeschränktheit nach oben) ist ein $\forall\exists$-Satz, nicht aber $\exists x \forall y \, x \leq y$ (Existenz eines kleinsten) bzw. $\exists x \forall y \, y \leq x$ (Existenz eines größten Elementes).

2. Wichtige Sätze der Algebra sind ebenfalls $\forall\exists$-Sätze: $\forall x \exists y \, (x \circ y = e)$ (Existenz eines inversen Elementes) sowie

   $$\forall x_0 \ldots x_n \exists y \, (y^{n+1} + x_n y^n + \ldots + x_0 = 0)$$

   (Existenz von Nullstellen für normierte Polynome vom Grad $n + 1$).

$\forall\exists$-Sätze bleiben bei der Vereinigung von Ketten erhalten:

Erhaltungssatz für Ketten

Ist $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ *die Vereinigung der Kette* $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$*, so gilt für jeden* $\forall\exists$*-Satz* σ*:*

$$\mathcal{A}_i \models \sigma \text{ für alle } i \in I \implies \mathcal{A} \models \sigma.$$

Beweis: Es sei $\sigma = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \ \varphi$ für eine quantorenfreie Formel φ und σ gelte in allen $\mathcal{A}_i$. Um die Gültigkeit in $\mathcal{A}$ nachzuweisen, seien beliebige $a_1, \dots, \ a_n \in A$ gegeben. Nach Definition der Vereinigungsmenge einer Kette können wir ein $i \in I$ finden, so daß alle $a_1, \dots, a_n \in A_i$ sind. Weil σ in $\mathcal{A}_i$ gilt, gibt es $b_1, \dots, b_m \in A_i$ mit

$$\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m].$$

Da φ quantorenfrei ist, sich also aussagenlogisch aus atomaren Formeln zusammensetzt, und da $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$, so gilt die Formel φ mit derselben Belegung auch in $\mathcal{A}$. Die $b_1, \dots, b_m$ sind aber auch in A, so daß dort der Existenzsatz gilt:

$$\mathcal{A} \models \exists y_1 \dots \exists y_m \ \varphi[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]. \qquad \square$$

Das obige Ergebnis ist optimal: Eine Theorie heiße **induktiv** gdw sie abgeschlossen ist unter Vereinigungen von Ketten, d. h. ist $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Kette von Modellen von T, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ein Modell von T.

11.2 Satz von Chang- Łoś-Szusko

Eine Theorie T *ist induktiv gdw sie ein Axiomensystem aus* $\forall\exists$*-Sätzen besitzt.*

Beim Beweis (den wir hier nicht ausführen können) wird für die Induktivität von T nur die Abgeschlossenheit unter aufsteigenden ω-Ketten benötigt, hieraus folgt dann also schon die Abgeschlossenheit unter beliebigen Ketten!

Zahlreiche algebraische Theorien sind induktiv: die Theorie der (ABELschen) Gruppen, der Ringe, der (reell- bzw. algebraisch-abgeschlossenen) Körper, der Vektorräume, etc.