Lehrbuch der Mathematik

Zum Studium

und Selbststudium

Claus Gerhardt

Analysis I

Claus Gerhardt
Ruprecht-Karls-Universität
Institut für Angewandte Mathematik
Im Neuenheimer Feld 294
69120 Heidelberg

gerhardt@math.uni-heidelberg.de
http://www.math.uni-heidelberg.de/studinfo/gerhardt/

Mathematics Subject Classification (2000): 26Axx, 26Bxx, 26-01

Die Deutsche Bibliothek - CIP- Einheitsaufnahme

Ein Titelsatz für diese Publikation ist bei der Deutschen Bibliothek erhältlich

ISBN 3 - 8311 - 4256 - 4

Verlag Claus Gerhardt, Heidelberg

Herstellung: Books on Demand GmbH, Norderstett

Dies ist Teil 1 einer zweibändigen Einführung in die Analysis, hervorgegangen aus meinen Vorlesungen Analysis I–III, die ich im Laufe der Jahre in Heidelberg gehalten habe.

Die Analysis Vorlesungen sind ohne Zweifel die wichtigsten Anfängervorlesungen für Studenten der Mathematik und Physik. Sie bilden das Fundament für weiterführende Vorlesungen aus fast allen Gebieten der Mathematik wie z.B. Topologie, Funktionalanalysis, Partielle Differentialgleichungen und Differentialgeometrie, sowie für Vorlesungen aus dem Bereich der theoretischen Physik.

In meinen Analysis Vorlesungen habe ich mich daher immer bemüht, neben den klassischen Bestandteilen einer solchen Vorlesung auch Elemente der Funktionalanalysis, der Gewöhnlichen Differentialgleichungen und der Tensoranalysis zu behandeln, damit die Studenten schon in den Anfangssemestern mit den Konzepten und Inhalten der modernen Analysis vertraut werden. Speziell für Studenten der Physik halte ich eine solche Vorgehensweise für hilfreich, werden sie doch schon frühzeitig in den physikalischen Vorlesungen mit mathematischen Techniken konfrontiert, die—ohne Beweis und oft auch ohne richtige Erklärung—als „Kochrezepte“ von ihnen akzeptiert werden sollen.

Das vorliegende Lehrbuch umfasst etwa den Stoff einer eineinhalbsemestrigen Vorlesung. Nachdem die Grundbegriffe der Logik, Mengenlehre und der reellen Zahlen erklärt worden sind, fängt mit Kapitel 1 die eigentliche Analysis an. Die Konvergenz von Folgen und Reihen wird zunächst im Reellen besprochen, dann auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinert und anschließend eingehend in metrischen Räumen bzw. Banachräumen behandelt.

Die darauf folgenden Kapiteln beschäftigen sich sehr ausführlich mit topologischen Begriffen—Stetigkeit, Kompaktheit, Zusamenhang—(Kapitel 2) bzw. mit der Differentialrechnung in einer Variablen (Kapitel 3).

Kapitel 4 fällt etwas aus dem üblichen Rahmen. In ihm werden u.a. die Sätze von Arzelà-Ascoli und Stone-Weierstraß bewiesen, die Grundlage vieler analytischer Beweise sind. Mir scheint es nicht zu früh, Studenten im zweiten Semester mit diesen Ergebnissen vertraut zu machen.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit dem Riemannschen Integral. Es wird für Banachraum-wertige Funktionen eingeführt—an den Definitionen und Beweisen ändert sich hierdurch nichts und man erspart sich die Einführung des Regelintegrals, das oft benutzt wird, um die Integration vektorwertiger Funktionen zu definieren.

Dieses Lehrbuch kann begleitend zu einer Vorlesung gelesen werden, oder aber, unabhängig davon, allein zum Selbststudium. Das Buch richtet sich natürlich primär an die Studenten in den Anfangssemestern, doch sind Teile hieraus, etwa Kapitel 4, auch für Studenten in den mittleren Semestern interessant.

Heidelberg, im August 2002 Claus Gerhardt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0. Grundlagen 1

0.1. Elemente der Logik 1
0.2. Elemente der Mengenlehre 7
0.3. Kartesisches Produkt, Funktionen, Relationen 15
0.4. Natürliche und reelle Zahlen 30

Kapitel 1. Konvergenz 51

1.1. Konvergenz in $\mathbb{R}$ 51
1.2. Unendliche Reihen in $\mathbb{R}$ 62
1.3. Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ 71
1.4. Metrische Räume 75
1.5. Reihen in Banachräumen 80
1.6. Gleichmäßige Konvergenz 89
1.7. Komplexe Zahlen 95

Kapitel 2. Stetigkeit 101

2.1. Topologische Grundbegriffe 101
2.2. Stetige Abbildungen 110
2.3. Kompaktheit 121
2.4. Der Tietze-Urysohnsche Fortsetzungssatz 131
2.5. Zusammenhang 135
2.6. Produkträume 143
2.7. Stetige lineare Abbildungen 151
2.8. Halbstetige Funktionen 154

Kapitel 3. Differentiation in einer Variablen 159

3.1. Differenzierbare Funktionen 159
3.2. Der Mittelwertsatz und seine Folgerungen 168
3.3. Die Regeln von de l'Hospital 175
3.4. Differentiation von Funktionenfolgen 181
3.5. Die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ 185
3.6. Die elementaren Funktionen 190

3.7. Polynome 207
3.8. Taylorsche Formeln 216

Kapitel 4. Räume stetiger Funktionen 225
4.1. Satz von Dini 225
4.2. Satz von Arzelà-Ascoli 226
4.3. Satz von Stone-Weierstraß 232
4.4. Analytische Funktionen 240

Kapitel 5. Integration in einer Variablen 255
5.1. Das Riemannsche Integral 255
5.2. Integrationsregeln 261
5.3. Monotone und stetige Funktionen sind integrierbar 267
5.4. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 269
5.5. Integralsätze und Transformationsregeln 272
5.6. Integration rationaler Funktionen 275
5.7. Lebesguesches Integrabilitätskriterium 280
5.8. Uneigentliche Integrale 284
5.9. Parameterabhängige Integrale 296

Literaturverzeichnis 309

Verzeichnis der Symbole 311

Index 315

KAPITEL 0

Grundlagen

0.1. Elemente der Logik

0.1.1. Aussagen, Aussageformen und Quantoren. Eine *Aussage* ist z.B.

$$5 \textit{ ist eine Primzahl.}$$

oder

Hans ist ein männlicher Vorname.

Charakteristisch an Aussagen ist, daß über gewisse Dinge etwas behauptet wird. In obigen Beispielen werden Behauptungen über „5“ und „Hans“ geäußert. Wir nehmen immer an, daß eine Aussage entweder wahr oder falsch ist (*tertium non datur*).

Aussageformen sind Behauptungen der Art

$$x \textit{ ist eine Primzahl.}$$

oder

$$x \textit{ ist ein männlicher Vorname.}$$

Im Unterschied zu einer Aussage enthalten Aussageformen eine oder mehrere *Variablen*, sog. *freie* Variablen. Der Wahrheitswert einer Aussageform läßt sich i. allg. erst ermitteln, wenn die Variablen durch—wie wir sagen wollen—*Konstanten* ersetzt sind. Es gibt natürlich auch Aussageformen, die schon formal richtig oder falsch sind, z.B.

$$\textit{Entweder ist } x = y \textit{ oder } x \neq y.$$

bzw.

$$x \textit{ ist eine Primzahl und irrational.}$$

Aussageformen nennt man oft auch *Bedingungen*.

Neben den eben behandelten Aussageformen kommen noch Bedingungen mit einer Quantifizierung vor, z.B.

Es gibt eine relle Zahl x, so daß $x^2 = 2$ ist.

(Existenzaussage)

oder

Für alle reellen Zahlen x gilt, daß $x^2 \geq 0$ ist.

(Allaussage)

Die in solchen Aussageformen auftretenden Variablen heißen *gebunden*.

Den in der Existenzaussage vorkommenden Quantor „es gibt“ nennen wir *Existenzquantor* und entsprechend den Quantor „für alle“ der Allaussage *Allquantor*.

0.1.2. Aussagenkalkül. Aussagen und Aussageformen bezeichnen wir unterschiedslos mit $p, q, \ldots$ Manchmal schreiben wir auch $p(x, y, \ldots)$, um die Abhängigkeit von den Variablen $x, y, \ldots$ anzudeuten.

Der *Aussagenkalkül* beinhaltet die logischen *Elementarverknüpfungen* zwischen *semantischen Variablen* $p, q, \ldots$, also zwischen Aussagen bzw. Aussageformen.

Beispiel:

9 *ist ungerade* **und** *durch* 3 *teilbar.*

In diesem Beispiel lernen wir die logische **Konjunktion** kennen: p **und** q, in Zeichen,

$$p \wedge q.$$

Die Aussage $p \wedge q$ ist genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind. Den Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage kann man am besten an Hand einer sog. *Wahrheitstafel* ermitteln. Wir machen dies am Beispiel der Konjunktion klar:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die Buchstaben ‚w' und ‚f' stehen hier für **wahr** bzw. **falsch**.

Die anderen Elementarverknüpfungen sind:

Die **Disjunktion**: p **oder** q, in Zeichen,

$$p \vee q.$$

In der Logik bedeutet **oder** das nicht ausschließende „oder“ (lateinisch *vel*, daher auch das Symbol $\vee$ für die Disjunktion). Die Disjunktion $p \vee q$ ist wahr, wenn wenigstens eine der Aussagen p oder q wahr ist. Die Wahrheitstafel lautet

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die **Implikation**: p **impliziert** q, in Zeichen,

$$p \implies q.$$

In der Umgangssprache gebraucht man die Implikation meist, wenn q aus p deduzierbar ist, d.h. wenn eine gewisse Abhängigkeit zwischen p und q besteht

Wenn $x > y$ ist, dann ist $2x > 2y$.

Hingegen wird er Satz

Wenn es morgen regnet, werden die Steuern gesenkt.

weithin auf Unverständnis stoßen. Nicht so in der Logik. Die Logik gebraucht nicht die **formale** Implikation der Umgangssprache, sondern die sog. **materielle** Implikation: Der Wahrheitswert von $p \implies q$ hängt ausschließlich von den Wahrheitswerten von p und q ab und von sonst nichts. p heißt auch **Voraussetzung** oder **Prämisse** und q die **Behauptung**. Für die Wahrheitstafel gilt

p	q	$p \implies q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Implikation ist daher *immer* wahr, wenn p falsch ist. Eine auf den ersten Blick verblüffende Festlegung, die sich jedoch als sehr sinnvoll erwiesen hat.

Die **Negation**: **non** p, in Zeichen,

$$\neg p$$

$\neg p$ ist wahr, wenn p falsch ist und falsch, wenn p wahr ist, d.h. die Wahrheitstafel lautet

p	$\neg p$
w	f
f	w

Die **Äquivalenz**: p **äquivalent** q, in Zeichen,

$$p \Longleftrightarrow q.$$

Darunter verstehen wir

$$(p \implies q) \wedge (q \implies p).$$

Den Äquivalenzpfeil gebrauchen wir auch als metasprachliches Symbol, z.B. in der

0.1.3. Aufgabe. Bitte beweisen Sie, daß

$$(p \implies q) \Longleftrightarrow \neg p \vee q.$$

Für logische Allaussagen wie

$$\textit{Für alle } x \textit{ aus } A \textit{ gilt } p(x).$$

schreiben wir abkürzend

$$\underset{x \in A}{\forall} p(x) \qquad \text{oder auch} \qquad \bigwedge_{x \in A} p(x).$$

Das Symbol $\forall x$ steht „für alle x“, es bezeichnet den Allquantor; wir haben uns hier auch einen kleinen Vorgriff auf die Schreibweise der Mengenlehre erlaubt, vgl. den folgenden Abschnitt.

Den Existenzquantor kürzen wir mit $\exists$ ab, d.h. die Aussage

$$\textit{Es gibt } x \textit{ in } A\textit{, so daß } p(x) \textit{ gilt.}$$

entspricht der Formel

$$\underset{x \in A}{\exists} p(x),$$

gelegentlich verwendet man auch die Schreibweise

$$\bigvee_{x \in A} p(x).$$

0.1.4. Beispiel.

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall}\; x^2 \geq 0$$

bedeutet

Das Quadrat einer jeden reellen Zahl ist nicht-negativ.

Es ist auch folgende Schreibweise üblich, wenn nicht sogar die Regel,

$$x^2 \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

doch sollte gerade der Anfänger sich klar machen, daß dies nur eine Kurzschreibweise und keine strenge mathematische Formel ist.

Die Existenzaussage

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\exists}\; x^2 = 2$$

ist gleichbedeutend mit

Es gibt eine relle Zahl x, *so daß* $x^2 = 2$ *ist.*

0.1.5. Bemerkung. Der Existenzquantor behauptet nur die *Existenz* eines Objekts, das die Aussage erfüllt. Es muß nicht *eindeutig* bestimmt sein. So gibt es z.B. zwei reelle Zahlen, die die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllen.

0.1.6. Proposition. *Die logischen Elementarverknüpfungen genügen folgenden Regeln*

$$p \wedge p \Longleftrightarrow p \qquad \text{(Idempotenz)} \tag{0.1.1}$$

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \wedge r &\Longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \\ (p \vee (q \vee r) &\Longleftrightarrow p \vee (q \vee r) \end{aligned} \qquad \text{(Assoziativität)} \tag{0.1.2}$$

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &\Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned} \qquad \text{(Distributivität)} \tag{0.1.3}$$

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{aligned} \qquad \text{(De Morgansche Regeln)} \tag{0.1.4}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Für das Operieren mit Quantoren gelten folgende Regeln, die als *Axiome* postuliert werden

0.1.7. Axiom (Quantorenregeln)**.**

$$\forall_{x\in A}\forall_{y\in B}\, p(x,y) \Longleftrightarrow \forall_{y\in B}\forall_{x\in A}\, p(x,y) \tag{0.1.5}$$

$$\exists_{x\in A}\exists_{y\in B}\, p(x,y) \Longleftrightarrow \exists_{y\in B}\exists_{x\in A}\, p(x,y) \tag{0.1.6}$$

$$\exists_{x\in A}\forall_{y\in B}\, p(x,y) \Longrightarrow \forall_{y\in B}\exists_{x\in A}\, p(x,y) \tag{0.1.7}$$

$$\begin{aligned} \neg(\forall_{x\in A}\, p(x)) &\Longleftrightarrow \exists_{x\in A}\, \neg p(x) \\ \neg(\exists_{x\in A}\, p(x)) &\Longleftrightarrow \forall_{x\in A}\, \neg p(x) \end{aligned} \tag{0.1.8}$$

Die Regeln (0.1.8) heißen die *De Morganschen Gesetze.*

0.1.8. Bemerkung. In der Regel (0.1.7) gilt i. allg. nicht das Äquivalenzzeichen, wie sich am Beispiel der Aussageform

$$p(x,y) \Longleftrightarrow x+y=0$$

in der Menge der reellen Zahlen ablesen läßt.

0.1.9. Aufgaben.

1 Man beweise Proposition 0.1.6.

2 Man verneine die Aussage

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in\mathbb{R}}\quad |x-y|<\delta \Longrightarrow |x^2-y^2|<\epsilon.$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Welche Aussage ist richtig, die verneinte oder die ursprüngliche?

0.2. Elemente der Mengenlehre

Was eine Menge ist können wir nicht mehr näher definieren. Der Mengenbegriff ist so elementar, daß er sich jeder Definition versagt. Von G. Cantor, dem Begründer der Mengenlehre, stammt folgende Beschreibung einer Menge M als „eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens—welche die Elemente von M genannt werden—zu einem Ganzen."

Der naive Umgang mit Mengen birgt jedoch einige Gefahren in sich, wie man zu Beginn des letzten Jahrhunderts festgestellt hat (*Russelsche Antinomie*). Deshalb ist eine strenge, axiomatische Begründung der Mengenlehre unerläßlich. Dieses Unterfangen würde natürlich den Rahmen eines Anfängerlehrbuches „Analysis I" bei weitem sprengen, so daß wir uns darauf beschränken, einen „halbaxiomatischen" Zugang zu wählen, der jedoch für die Bedürfnise eines jeden Mathematikers, der sich nicht auf dem Gebiet der Mengenlehre spezialisieren will, völlig ausreicht.

0.2.1. Bezeichnungen. Wir bezeichnen Mengen i. allg. mit großen Buchstaben $A, B, \ldots$ Je „komplizierter" die Mengen sind, desto typographisch ausgefallener sollen auch die Symbole sein, die sie bezeichnen, z. B. verwenden wir in der Regel Skriptbuchstaben $\mathcal{S}, \mathcal{T}, \ldots$, um Mengen von Mengen zu kennzeichnen. Die Elemente von Mengen werden meist mit kleinen Buchstaben $a, b, \ldots$ oder $x, y, \ldots$ benannt. Objekte $a, b, \ldots$ fassen wir zu einer Menge zusammen, indem wir sie in sog. *Mengenklammern* einschließen, $\{a, b, \ldots\}$.

0.2.2. Elementbeziehung. Der Hauptbegriff der Mengenlehre ist die Elementbeziehung, in Zeichen

$$x \in A.$$

Wir sagen hierfür „x Element (von) A" und verwenden ein stilisiertes griechisches ϵ, um dies kenntlich zu machen.

Der zweite wichtige Begriff ist der der **Gleichheit** zweier Mengen A, B, in Zeichen,

$$A = B$$

und wir postulieren

0.2.3. Axiom (Extensionalitätsaxiom)**.** Zwei Mengen A, B sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

Dieses Axiom besagt daher, daß, wenn das gleiche Element mehrmals in einer Menge vorkommt, es nur einmal gezählt wird. So sind die Mengen $\{1,2,3\}$ und $\{1,2,3,1,3\}$ gleich; sie bestehen aus den natürlichen Zahlen $1,2$ und 3. Aus diesem Grund wollen wir die Vereinbarung treffen, Elemente einer Menge nur einmal aufzuführen.

0.2.4. Definition (Teilmenge)**.** Sind A und B zwei Mengen, so heißt A *Teilmenge* von B, falls jedes Element von A auch Element von B ist. Wir schreiben hierfür

$$A \subset B$$

und lesen diese Formel als „A enthalten (in) B“. B heißt auch *Obermenge* von A. Ist A Teilmenge von B und gilt A ungleich B, so nennen wir A *echte* Teilmenge von B, in Zeichen,

$$A \subsetneq B.$$

Die Beziehung „$\subset$“ heißt *Inklusion.*

0.2.5. Proposition. *Die Inklusion genügt folgenden Regeln*

$$A \subset A \qquad \text{(Reflexivität)} \tag{0.2.1}$$

$$A \subset B \subset C \implies A \subset C \qquad \text{(Transitivität)} \tag{0.2.2}$$

und i. allg. gilt

$$A \subset B \not\Longrightarrow B \subset A \qquad \text{(Antisymmetrie)} \tag{0.2.3}$$

Beweis. Klar.

0.2.6. Bemerkung. Offensichtlich gilt für zwei Mengen A, B genau dann $A = B$, falls $A \subset B$ und $B \subset A$. Aus diesem Grund weist man in der Regel, um die Gleichheit zweier Mengen zu verifizieren, das Bestehen der wechselseitigen Inklusion nach.

Eine Möglichkeit Teilmengen zu bilden, steckt in dem Prinzip aus den Elementen einer vorgegebenen Menge A diejenigen auszusondern, die eine bestimmte Bedingung erfüllen, z.B. sei A die Menge aller Frauen und betrachten wir die Teilmenge B aller verheirateten Frauen. Die Menge B können wir so beschreiben

$$B = \{\, x \in A \colon x \text{ ist verheiratet} \,\}.$$

Allgemein sieht dieser Prozeß so aus: sei A irgendeine Menge und p irgendeine Aussageform (Bedingung), dann erwarten wir, daß der Ausdruck

$$B = \{\, x \in A \colon p(x) \,\}$$

eine „sinnvolle“ Menge ist. Diesen Sachverhalt, so offenkundig er auch im Einzelfalle sein mag, fassen wir als Axiom

0.2.7. Axiom (Aussonderungsaxiom)**.** Zu jeder Menge A und jeder Bedingung p gibt es eine Menge B, deren Elemente genau jene x aus A sind, für die $p(x)$ wahr ist, in Zeichen,

$$B = \{\, x \in A \colon p(x) \,\}.$$

0.2.8. Die Tragweite dieses Axioms erkennen wir an folgender Überlegung: Sei A eine beliebige Menge und p die Bedingung $x \notin x$. Wir bilden nun

$$B = \{\, x \in A \colon p(x) \,\}. \tag{0.2.4}$$

Kann $B \in A$ gelten? Offensichtlich nicht, denn

$$y \in B \iff y \in A \wedge y \notin y, \tag{0.2.5}$$

und es gilt ferner die Alternative

$$B \in B \quad \text{oder} \quad B \notin B. \tag{0.2.6}$$

Wäre nun $B \in A$, so müßte, falls der erste Teil der Alternative zuträfe,

$$B \in A \wedge B \in B \tag{0.2.7}$$

gelten, im Widerspruch zu (0.2.5), und falls der zweite Teil der Alternative richtig wäre, so erhielten wir ebenfalls aus (0.2.5) einen Widerspruch, da dann $B \in B$ folgen würde.

Aus dieser Überlegung schließen wir

0.2.9. Corollar (Nichtexistenz einer Allmenge)**.** *Es existiert keine Allmenge, d.h. es gibt keine Menge, die alle Mengen umfaßt, und die man als „Menge aller Mengen“ beschreiben könnte.*

Beweis. Sei A eine solche Allmenge, so müßte sie alle Mengen enthalten, also auch die Menge B in (0.2.4), die wir jetzt mittels der Allmenge A definieren. Dies führt aber zu einem Widerspruch, wie wir gerade gesehen haben. □

In den Anfängen der Mengenlehre hatte man die Existenz einer Allmenge als unmittelbar evident angesehen, gemäß der damaligen Überzeugung, daß jede Eigenschaft immer eine „Erfüllungsmenge“ besitze. Die Allmenge ist dann „Erfüllungsmenge“ der Bedingung „x ist Menge“.

0.2.10. Russelsche Antinomie. Die bereits erwähnte Russelsche Antinomie erhält man, wenn man in (0.2.4) B definiert, ohne den Zusatz $x \in A$ zu verlangen, d.h.

$$B = \{\, x \colon p(x) \,\} \tag{0.2.8}$$

setzt. Die Frage, ob $B \in B$ oder $B \notin B$ gilt, offenbart dann einen Widerspruch in der Theorie.

Mit Hilfe des Aussonderungsaxioms können wir zu einer gegebenen Ausgangsmenge A Teilmengen bilden, die sich in der Form

$$B = \{\, x \in A \colon p(x) \,\} \tag{0.2.9}$$

schreiben lassen, wobei p eine Aussageform ist.

Können wir jede Menge B in dieser Form schreiben?

0.2.11. Bemerkung. Zu jeder Menge B existiert eine Menge A und eine Aussageform p, so daß

$$B = \{\, x \in A \colon p(x) \,\}. \tag{0.2.10}$$

Beweis. Sei A eine beliebige Obermenge von B, setze z.B. $A = B$, und wähle als Aussageform $p(x) =$ „$x \in B$“. □

Die Bedeutung dieser Bemerkung werden wir erkennen, wenn wir *Durchschnitt, Vereinigung* und *Komplement* von Mengen definiert haben. Die Beziehungen, die zwischen diesen „Operationen“ bestehen, lassen sich dann mittels der Identifikation

$$\textit{Aussageform} \quad \longleftrightarrow \quad \textit{Menge}$$

auf den Aussagekalkül zurückführen.

0.2.12. Proposition (Existenz der leeren Menge)**.** *Es existiert eine Menge $\emptyset$, die kein Element enthält, und die daher die leere Menge genannt wird. Sie genügt folgenden Bedingungen*

$$\emptyset \subset A \qquad \forall\,\text{Mengen } A, \tag{0.2.11}$$

$$\emptyset \ \text{ ist eindeutig bestimmt.} \tag{0.2.12}$$

Beweis. Sei B eine beliebige Menge. Wir definieren

$$\emptyset = \{\, x \in B \colon x \neq x \,\}. \tag{0.2.13}$$

Nach dem Aussonderungsaxiom ist $\emptyset$ eine wohldefinierte Menge.

Zum Beweis der ersten Behauptung, erinnern wir uns an die Definition einer Teilmenge

$$\emptyset \subset A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall_{x \in \emptyset}\, x \in A. \tag{0.2.14}$$

Da die leere Menge aber kein Element enthält, ist die rechte Seite von (0.2.14) wahr, folglich auch die linke.

Wem dieser Schluß Schwierigkeiten bereiten sollte, dem sei geraten, die Aussage (0.2.14) zu verneinen

$$\emptyset \not\subset A \quad \Longleftrightarrow \quad \exists_{x \in \emptyset}\, x \notin A. \tag{0.2.15}$$

Jetzt ist es vielleicht leichter einzusehen, daß, da die rechte Seite von (0.2.15) falsch ist—es gibt kein Element $x \in \emptyset$ mit $x \notin A$, da $\emptyset$ überhaupt kein Element enthält—und folglich auch die linke, die Behauptung (0.2.11) stimmt.

Die Behauptung (0.2.12) folgt aus (0.2.11), denn gäbe es zwei leere Mengen $\emptyset_1$ und $\emptyset_2$, so müßte wegen (0.2.11) gelten

$$\emptyset_1 \subset \emptyset_2 \quad \text{und} \quad \emptyset_2 \subset \emptyset_1, \tag{0.2.16}$$

d.h. $\emptyset_1 = \emptyset_2$. □

0.2.13. Axiom (Existenz einer Obermenge)**.** Sei $\mathcal{S}$ ein beliebiges nichtleeres Mengensystem, dann existiert eine Menge X, die alle Mengen von $\mathcal{S}$ als Teilmengen enthält, d.h.

$$A \subset X \quad \forall A \in \mathcal{S}. \tag{0.2.17}$$

0.2.14. Definition (Vereinigung und Durchschnitt)**.** (i) Seien A und B Mengen und sei X eine nach Axiom 0.2.13 existierende gemeinsame Obermenge von A und B.

(a) Wir definieren dann die *Vereinigung* von A und B, in Zeichen, $A \cup B$, durch

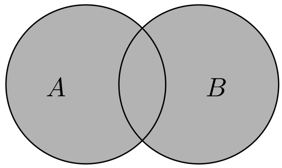
$$A \cup B = \{\, x \in X : x \in A \vee x \in B \,\}. \tag{0.2.18}$$

Wenn A und B in der Form

$$A = \{\, x \in X : p_{A}(x) \,\} \quad \text{und} \quad B = \{\, x \in X : p_{B}(x) \,\}$$

gegeben sind—nach Bemerkung 0.2.11 ist eine solche Schreibweise immer möglich—, dann gilt

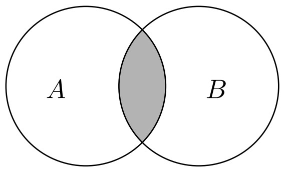
$$A \cup B = \{\, x \in X : p_{A}(x) \vee p_{B}(x) \,\}. \tag{0.2.19}$$



$A \cup B$

(b) Der *Durchschnitt* von A und B, in Zeichen, $A \cap B$, ist definiert durch

(0.2.20) $$A \cap B = \{\, x \in X \colon x \in A \wedge x \in B \,\}.$$



$A \cap B$

Ähnlich wie in (a) gilt auch hier

(0.2.21) $$A \cap B = \{\, x \in X \colon p_{_A}(x) \wedge p_{_B}(x) \,\}.$$

(ii) Sei $\mathcal{S}$ eine nichtleere Mengenfamilie und X eine gemeinsame Obermenge, dann definieren wir entsprechend

(a) die Vereinigung der Mengen aus $\mathcal{S}$, in Zeichen, $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$, durch

(0.2.22) $$\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \{\, x \in X \colon \underset{A \in \mathcal{S}}{\exists}\, x \in A \,\}$$

bzw.

(0.2.23) $$\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \{\, x \in X \colon \underset{A \in \mathcal{S}}{\exists}\, p_{_A}(x) \,\}$$

und

(b) den Durchschnitt der Mengen aus $\mathcal{S}$, in Zeichen, $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$, durch

(0.2.24) $$\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \{\, x \in X \colon \underset{A \in \mathcal{S}}{\forall}\, x \in A \,\}$$

bzw.

(0.2.25) $$\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \{\, x \in X \colon \underset{A \in \mathcal{S}}{\forall}\, p_{_A}(x) \,\}.$$

(c) Ist $\mathcal{S} = \emptyset$, so setzen wir $\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A = \emptyset$.

(d) Den Durchschnitt über ein leeres Mengensystem können wir bilden, wenn gewährt ist, daß alle betrachteten Mengen in einer festen Obermenge X liegen. Wir vereinbaren dann den Durchschnitt über ein leeres Mengensystem $\mathcal{S}$ als $\bigcap_{A\in\mathcal{S}} = X$.

0.2.15. Definition (Disjunkte Mengen)**.** (i) Wir nennen zwei Mengen A, B *disjunkt*, wenn ihr Durchschnitt leer ist. Für die Vereinigung zweier disjunkter Mengen schreiben wir gelegentlich $A \mathbin{\dot\cup} B$ und deuten die Disjunktheit durch den Punkt über dem Vereinigungszeichen an. Wir lesen diese Formel als *disjunkte Vereinigung* von A und B.

(ii) Die Elemente eines Mengensystem $\mathcal{S}$ heißen *paarweise disjunkt*, wenn

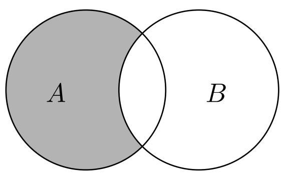
$$A \cap B = \emptyset \quad \forall\, A, B \in \mathcal{S} \text{ mit } A \neq B. \tag{0.2.26}$$

Die disjunkte Vereinigung der Mengen aus $\mathcal{S}$ bezeichnen wir entsprechend mit

$$\dot{\bigcup_{A\in\mathcal{S}}} A \tag{0.2.27}$$

0.2.16. Definition (Komplementmenge)**.** (i) Seien A und B Mengen. Das *Komplement* von B in A ist die Menge

$$A\backslash B = \{\, x \in A \colon x \in A \wedge x \notin B \,\}. \tag{0.2.28}$$



$A\backslash B$

(ii) Ist X eine feste Obermenge von A, so bezeichnen wir das Komplement von A (in X) mit

$$\complement A = X\backslash A. \tag{0.2.29}$$

Läßt sich A in der Form

$$A = \{\, x \in X : p(x) \,\} \tag{0.2.30}$$

ausdrücken, so ist

$$\complement A = \{\, x \in X : \neg p(x) \,\}. \tag{0.2.31}$$

0.2.17. Proposition. *Vereinigung, Durchschnitt und Komplement von Mengen genügen folgenden Relationen*

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \qquad \text{(Kommutativität)} \tag{0.2.32}$$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned} \qquad \text{(Assoziativität)} \tag{0.2.33}$$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned} \qquad \text{(Distributivität)} \tag{0.2.34}$$

$$\begin{aligned} \complement(A \cup B) &= \complement A \cap \complement B \\ \complement(A \cap B) &= \complement A \cup \complement B \end{aligned} \qquad \text{(De Morgansche Regeln)} \tag{0.2.35}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Als letztes Axiom erwähnen wir

0.2.18. Axiom (Existenz der Potenzmenge)**.** Zu jeder Menge A existiert eine Menge $\mathcal{P}(A)$, *Potenzmenge* von A genannt, die genau alle Teilmengen von A enthält. Gelegentlich bezeichnet man die Potenzmenge auch mit 2^A.

0.2.19. Beispiel. Sei $A = \{1, 2, 3\}$, dann ist

$$\mathcal{P}(A) = \{A, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

0.2.20. Bezeichnungen. Die gebräuchlichen Mengen werden wie folgt abgekürzt

$\mathbb{N}$	(Menge der natürlichen Zahlen)
$\mathbb{Z}$	(Menge der ganzen Zahlen)
$\mathbb{Q}$	(Menge der rationalen Zahlen)
$\mathbb{R}$	(Menge der reellen Zahlen)
$\mathbb{C}$	(Menge der komplexen Zahlen)

Spezielle Teilmengen sind

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}^* &= \mathbb{N}\backslash\{0\}\\
\mathbb{R}^* &= \mathbb{R}\backslash\{0\}\\
\mathbb{R}_+ &= \{\, x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0 \,\}
\end{aligned}$$

0.2.21. Aufgaben.

1 Man beweise Proposition 0.2.17.

2 Sei M eine Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(M)$, dann gilt

$$\complement \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} \complement A,$$

$$\complement \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} \complement A.$$

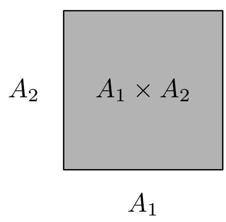
3 Sei M eine Menge. Was ist $M\backslash M$?

0.3. Kartesisches Produkt, Funktionen, Relationen

0.3.1. Definition (Kartesisches Produkt)**.** Unter dem *kartesischen Produkt* $A_1 \times A_2$ zweier Mengen A_1, A_2 verstehen wir die Menge aller geordneten Paare (x_1, x_2) mit $x_1 \in A_1$ und $x_2 \in A_2$

$$A_1 \times A_2 = \{\, (x_1, x_2) \colon x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \,\}.$$

x_1 bzw. x_2 nennt man die erste bzw. zweite Komponente des Paares (x_1, x_2). Wählt man zur graphischen Veranschaulichung die Mengen A_i als Teil einer (reellen) Koordinatenachse, so entspricht das kartesische Produkt einem Rechteck mit den Seiten A_1 und A_2.



0.3.2. Beispiel. Die Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ läßt sich daher darstellen als

$$\mathbb{R}^2 = \{\, (x^1, x^2) \colon x^i \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \,\}.$$

Wenn die Komponenten des kartesisches Produkts reelle Zahlen sind, indizieren wir die Komponenten mit oben stehenden Indizes, aus Gründen, die wir im Augenblick nicht erläutern können.

Wir wollen jetzt den Begriff *Abbildung* einführen. Anschaulich gesprochen ist eine Abbildung eine *eindeutige* Zuordnung von Elementen x einer Menge A zu Elementen y einer Menge B, in Zeichen $x \to y$. *Eindeutig* heißt hierbei, daß einem x *genau* ein y entspricht. Statt Abbildung sagen wir auch oft *Funktion* und verwenden die Symbole $f, g, h, \ldots$, um Abbildungen zu bezeichnen.

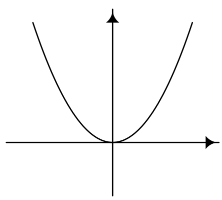
Bevor wir den Begriff Funktion oder Abbildung ausführlich definieren, möchten wir an einige sicherlich bekannte Beispiele erinnern.

0.3.3. Beispiele. (i) $f(x) = x^2$.

$$f : x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}. \tag{0.3.1}$$

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ihre graphische Veranschaulichung durch den sog. *Graphen* von f, in Zeichen, $\operatorname{graph} f$, ist die *Parabel*

$$\operatorname{graph} f = \{\, (x, f(x)) \colon x \in \mathbb{R} \,\} \tag{0.3.2}$$



Graph von $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = \sqrt{x}$.

$$g : x \in \mathbb{R}_+ \to \sqrt{x} \in \mathbb{R}. \tag{0.3.3}$$

g ist nur auf $\mathbb{R}_+$ erklärt.

0.3.4. Definition (Funktion, Abbildung)**.** (i) Seien A, B nichtleere Mengen. Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von A nach B

$$f : A \to B \tag{0.3.4}$$

ist eine Beziehung (Vorschrift), die jedem Element $x \in A$ *genau ein* Element $y \in B$ zuordnet. Wir schreiben auch

$$y = f(x). \tag{0.3.5}$$

A heißt *Definitionsbereich* von f, $A = D(f)$, B ist die *Zielmenge* und

$$f(A) = \{\, f(x) \colon x \in A \,\} = \{\, y \in B \colon \underset{x \in A}{\exists}\, y = f(x) \,\} \tag{0.3.6}$$

ist das *Bild* von f. Wir schreiben für das Bild von f gelegentlich auch $R(f)$.

Allgemein setzen wir für $\emptyset \neq M \subset A$

$$f(M) = \{ f(x) \colon x \in M \} \tag{0.3.7}$$

und $f(\emptyset) = \emptyset$.

(ii) Die mit $f : A \to B$ assoziierte *Urbildabbildung* $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ ist definiert durch

$$f^{-1}(M) = \{ x \in A \colon f(x) \in M \} \qquad \forall\, M \subset B. \tag{0.3.8}$$

$f^{-1}(M)$ heißt das *Urbild* von M.

(iii) Unter dem *Graphen* von f verstehen wir die Menge

$$\operatorname{graph} f = \{ (x, f(x)) \colon x \in A \} \subset A \times B. \tag{0.3.9}$$

(iv) $f : A \to B$ heißt

(a) *injektiv*, falls

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2, \tag{0.3.10}$$

(b) *surjektiv*, falls $f(A) = B$ und

(c) *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

(v) Sei $f : A \to B$ injektiv, dann definieren wir die *Inverse* von f durch die Festsetzung

$$\begin{aligned} f^{-1} : \ R(f) &\to A, \\ f(x) &\to x, \end{aligned} \tag{0.3.11}$$

wobei wir das gleiche Symbol wie für die Urbildabbildung wählen, wegen der Beziehung $\{f^{-1}(f(x))\} = f^{-1}(\{f(x)\})$.

0.3.5. Beispiele. (i) Die Abbildung $f(x) = x^3$ von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

(ii) Die Abbildung $f(x) = x^2$ von $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Wählten wir als Definitionsbereich von f ganz $\mathbb{R}$, so wäre f auch nicht injektiv.

0.3.6. Definition (Komposition von Abbildungen)**.** Seien

$$\begin{aligned} f &: A \to B, \\ g &: B \to C \end{aligned} \tag{0.3.12}$$

Abbildungen, dann definieren wir die *Komposition* von f und g, in Zeichen, $g \circ f$, als Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C, \\ x &\to g(f(x)). \end{aligned} \tag{0.3.13}$$

Wir können dies in einem sog. *kommutativen Diagramm* veranschaulichen

(0.3.14)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

0.3.7. Beispiele. (i) Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}_+, \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}, \\ x &\to \log x, \end{aligned}$$

dann ist $g \circ f(x) = 2 \log|x|$.

(ii) Sei $f : A \to B$ bijektiv, dann ist

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$$

und

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A,$$

wobei id_X die *identische Abbildung* einer Menge X auf sich ist, d.h. $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.

0.3.8. Definition (Inklusionsabbildung, Restriktion einer Abbildung)**.** (i) Sei $A' \subset A$. Dann ist die (natürliche) *Inklusion* j von A' nach A definiert durch

$$\begin{aligned} j : A' &\hookrightarrow A, \\ x &\to x. \end{aligned}$$

j ist injektiv.

Wenn eine Menge durch eine injektive Abbildung in eine andere Menge *eingebettet* ist, so heben wir diesen Sachverhalt manchmal mit diesem speziellen Pfeil „$\hookrightarrow$“ hervor.

(ii) Sei $f : A \to B$ und $A' \subset A$, dann ist die *Restriktion* von f auf A', in Zeichen, $f_{|_{A'}}$, definiert durch

$$\begin{aligned} f_{|_{A'}} : A' &\to B, \\ x &\to f(x). \end{aligned}$$

Wenn j die natürliche Inklusion von A' ist, so gilt $f_{|_{A'}} = f \circ j$.

0.3.9. Bemerkung. Aus den Definitionen folgt unmittelbar

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(ii) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Die zweite Formel gilt sowohl für die Urbildabbildungen als auch für den Fall, daß die inversen Abbildungen von f und g definiert sind.

0.3.10. Definition (Familie, Folge)**.** (i) Seien I, X nichtleere Mengen. Manchmal bezeichnen wir eine Abbildung $f : I \to X$ als *Familie* und schreiben hierfür $(x_i)_{i\in I}, (x_i)$ oder $i \to x_i$. I heißt *Indexmenge.*

Ist $I = \mathbb{N}$, so nennen wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folge.*

(ii) Ist $\emptyset \neq J \subset I$, so nennen wir $(x_i)_{i\in J}$ eine *Teilfamilie* zu $(x_i)_{i\in I}$.

Wenn $I = \mathbb{N}$ und J unendlich ist, so sprechen wir von *Teilfolge*, wobei wir betonen, daß eine Folge (oder Teilfolge) immer abzählbar sein soll, d.h. bei einer endlichen Indexmenge sprechen wir nicht von Folge.

(iii) Eine endliche Familie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ heißt *n-tupel* (*Paar* für $n = 2$ und *Tripel* für $n = 3$) und wir schreiben hierfür auch $(x_1, \dots, x_n)$.

0.3.11. Bemerkung. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, so fassen wir diese Familie als Mengensystem auf und definieren entsprechend $\bigcup_{i\in I} A_i$ und $\bigcap_{i\in I} A_i$.

0.3.12. Definition (Kartesisches Produkt bez. einer Indexmenge)**.**

(i) Sei $I \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, dann ist das *kartesische Produkt* definiert durch

$$\begin{aligned} \prod_{i\in I} A_i &= \{\, (x_i)_{i\in I} \colon \underset{i\in I}{\forall}\, x_i \in A_i \,\} \\ &= \{\, f \colon I \xrightarrow{f} \bigcup_i A_i \text{ und } \underset{i\in I}{\forall}\, f(i) \in A_i \,\}. \end{aligned} \tag{0.3.15}$$

(ii) Für jedes $j \in I$ definieren wir die j-te *Projektion* durch

$$\mathrm{pr}_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j, \quad \mathrm{pr}_j((x_i)) = x_j. \tag{0.3.16}$$

0.3.13. Beispiel. Sei $I = \{1, \dots, n\}$ und $A_i = \mathbb{R}$, so ist

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i\in I} A_i = \mathbb{R}^n = \{\, (x^1, \dots, x^n) \colon x^i \in \mathbb{R}\ \forall\, i \,\}$$

und $\mathrm{pr}_i(x^1, \dots, x^n) = x^i$ ist die i-te Komponente des n-tupels.

0.3.14. Axiom (Auswahlaxiom)**.** Sei $I \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen, dann ist $A = \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, d.h. es existiert eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ mit

$$x_i \in A_i \quad \forall\, i \in I, \tag{0.3.17}$$

oder anders ausgedrückt, es existiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : I &\to \bigcup_{i\in I} A_i,\\ i &\to f(i) = x_i \in A_i. \end{aligned} \tag{0.3.18}$$

f heißt *Auswahlfunktion.*

Ist I ein endliche oder eine „abzählbare“ Indexmenge, so kann man immer eine Auswahlfunktion finden. Für beliebige Indexmengen jedoch ist die Konstruktion einer Auswahlfunktion unmöglich. In vielen mathematischen Schlüssen wird die Existenz einer Auswahlfamilie oft unwissentlich benutzt. *E. Zermelo* erkannte dies Anfang des letzten Jahrhunderts und postulierte daher die Existenz einer Auswahlfamilie als Axiom. Vielen Mathematikern war seinerzeit das Auswahlaxiom suspekt und sie versuchten, es aus anderen Axiomen der Mengenlehre herzuleiten, jedoch vergeblich. Die Sinnlosigkeit solcher Versuche hat *P. Cohen* (1963) nachgewiesen, indem er zeigte, daß die Negation des Auswahlaxioms mit den übrigen Axiomen der Mengenlehre verträglich ist. Früher schon, 1938, hat umgekehrt *K. Gödel* festgestellt, daß das Auswahlaxiom mit den anderen Axiomen der Mengenlehre verträglich ist. Wir nehmen daher zusammen mit den meisten Mathematikern die Gültigkeit des Auswahlaxioms an.

0.3.15. Proposition. *Sei $I \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, dann gilt*

$$\prod_{i\in I} A_i = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{i\in I}{\exists}\, A_i = \emptyset. \tag{0.3.19}$$

Beweis. Die eine Richtung folgt aus dem Auswahlaxiom, der umgekehrte Schluß ist offensichtlich. □

0.3.16. Definition (Mächtigkeit)**.** (i) Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig*, in Zeichen, $A \sim B$, falls eine Bijektion $f : A \to B$ existiert.

(ii) B heißt *mächtiger* als A, in Zeichen, $A \prec B$, falls A gleichmächtig ist zu einer Teilmenge C von B. Eine äquivalente Formulierung ist, daß eine Injektion $f : A \to B$ existiert.

(iii) A heißt *abzählbar*, falls $A \sim \mathbb{N}$, *höchstens abzählbar* (h.a.), falls $A \sim M, M \subset \mathbb{N}$. Abzählbare Mengen kann man als Folgen schreiben.

0.3.17. Bemerkung. (i) Die Relation „$\prec$“ entspricht der Relation „$\leq$“.

(ii) Auch wenn A eine echte Teilmenge von B ist, kann $A \sim B$ sein; die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist z.B. gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen.

0.3.18. Theorem (Schröder-Bernstein)**.** *Sei $A \prec B$ und $B \prec A$, so ist $A \sim B$.*

Beweis. Die Beweisidee ist folgende: Wir zerlegen die Mengen A, B in je drei disjunkte Teilmengen

$$A = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} A_3 \quad \text{und} \quad B = B_1 \dot{\cup} B_2 \dot{\cup} B_3 \tag{0.3.20}$$

und zeigen, daß $A_i \sim B_i$, $i = 1, 2, 3$, d.h., daß bijektive Abbildungen

$$f_i : A_i \to B_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \tag{0.3.21}$$

existieren. Hieraus erhält man dann sofort eine bijektive Abbildung f von A nach B durch die Festsetzung

$$f_{|A_i} = f_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{0.3.22}$$

Konstruktion von A_i, B_i und f_i.

Nach Voraussetzung existieren injektive Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to A$. Sei $x \in A$, dann bilden wir die Folge

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))), \ldots \tag{0.3.23}$$

solange es möglich ist. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

(i) Die Folge bricht nach einer *ungeraden* Anzahl von Schritten ab, d.h. wir haben nur x oder

$$x, g^{-1}(x), \ldots, f^{-1}(\cdots). \tag{0.3.24}$$

(ii) Die Folge bricht nach einer *geraden* Anzahl von Schritten ab.

$$x, g^{-1}(x), \ldots, g^{-1}(\cdots). \tag{0.3.25}$$

Insbesondere ist $x \in R(g)$.

(iii) Die Folge läßt sich *ad infinitum* fortsetzen.

Wir definieren entsprechend

$$A_{f^{-1}} = \{\, x \in A \colon \text{(i) trifft zu} \,\},$$
(0.3.26) $$A_{g^{-1}} = \{\, x \in A \colon \text{(ii) trifft zu} \,\},$$
$$A_{\infty} = \{\, x \in A \colon \text{(iii) trifft zu} \,\}.$$

Es gilt

(0.3.27) $$A = A_{f^{-1}} \mathbin{\dot\cup} A_{g^{-1}} \mathbin{\dot\cup} A_{\infty}.$$

Zu $y \in B$ betrachten wir völlig analog die Folge

(0.3.28) $$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), \ldots$$

und definieren

$$B_{f^{-1}} = \{\, x \in B \colon \text{(ii) trifft zu} \,\},$$
(0.3.29) $$B_{g^{-1}} = \{\, x \in A \colon \text{(i) trifft zu} \,\},$$
$$B_{\infty} = \{\, x \in A \colon \text{(iii) trifft zu} \,\}.$$

Auch hier gilt wieder

(0.3.30) $$B = B_{f^{-1}} \mathbin{\dot\cup} B_{g^{-1}} \mathbin{\dot\cup} B_{\infty}.$$

Beachte, daß der Index angibt mit welchem Urbild die Folge aufhört, falls sie abbricht.

1. *Behauptung:* $f_{|A_{f^{-1}}}$ bildet $A_{f^{-1}}$ bijektiv auf $B_{f^{-1}}$ ab.

Beweis: Da f injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß $f(A_{f^{-1}}) = B_{f^{-1}}$.

a) Sei $x \in A_{f^{-1}}$, so existiert die Sequenz

(0.3.31) $$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), \ldots, f^{-1}(\cdots)$$

mit einer ungeraden Anzahl von Gliedern. Ersetzen wir x durch $f^{-1}(f(x))$ und fügen am Anfang noch den Term $f(x)$ hinzu, so erhalten wir

(0.3.32) $$f(x), f^{-1}(f(x)), g^{-1}(f^{-1}(f(x))), \ldots, f^{-1}(\cdots)$$

mit einer geraden Anzahl von Gliedern, d.h. $f(x) \in B_{f^{-1}}$.

b) Sei $y \in B_{f^{-1}}$, so existiert die Folge

(0.3.33) $$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), \ldots, f^{-1}(\cdots)$$

mit einer geraden Anzahl von Gliedern. Insbesondere ist $x = f^{-1}(y)$ wohldefiniert. Ersetze nun $f^{-1}(y)$ durch x und lasse am Anfang den Term y weg, so erhalten wir

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), \ldots, f^{-1}(\cdots) \tag{0.3.34}$$

mit einer ungeraden Anzahl von Gliedern.

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

2. *Behauptung:* $g_{|B_{g^{-1}}}$ bildet $B_{g^{-1}}$ bijektiv auf $A_{g^{-1}}$ ab.

Beweis: Vertausche im Beweis der ersten Behauptung die Rollen von A und B sowie von f und g.

3. *Behauptung:* $f_{|A_\infty}$ bildet A_∞ bijektiv auf B_∞ ab.

Beweis: Es genügt wieder $f(A_\infty) = B_\infty$ nachzuweisen.

a) Sei $x \in A_\infty$, so existiert die nicht abbrechende Folge

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), \ldots \tag{0.3.35}$$

Ersetze x durch $f^{-1}(f(x))$ und füge am Anfang den Term $f(x)$ hinzu, so sehen wir, daß $f(x) \in B_\infty$.

b) Sei $y \in B_\infty$, so existiert die Folge

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), \ldots \tag{0.3.36}$$

Dann ist wieder $x = f^{-1}(y)$ wohldefiniert. Ersetze $f^{-1}(y)$ durch x und lasse am Anfang den Term y weg, so folgt $x \in A_\infty$.

Damit ist die dritte Behauptung und das ganze Theorem bewiesen. □

0.3.19. Proposition. *Seien A, B nichtleere Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann gilt*

(i) $\quad f$ surjektiv $\iff$ $\exists\, g : B \to A$ injektiv mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

(ii) $\quad f$ injektiv $\iff$ $\exists\, g : B \to A$ surjektiv mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Beweis. Übungsaufgabe.

0.3.20. Definition. Eine Menge A heißt *endlich*, wenn sie leer ist, oder wenn eine injektive Abbildung $f : A \to \mathbb{N}$ und eine natürliche Zahl m existieren, so daß

$$f(x) \le m \quad \forall\, x \in A.$$

Mengen, die nicht endlich sind, heißen *unendlich.*

Für endliche Mengen A definieren wir die *Kardinalzahl*

$$\operatorname{card} A = \text{Anzahl der Elemente von } A,$$

wobei wir $\operatorname{card}\emptyset = 0$ setzen. Für unendliche Mengen A setzen wir $\operatorname{card} A = \infty$.

Im nächsten Abschnitt, Ziffer 0.4.15, werden wir folgenden Satz beweisen

0.3.21. Proposition. *Sei A eine unendliche Menge, so enthält A eine abzählbare Teilmenge.*

0.3.22. Lemma. *Sei A eine nichtleere Menge, dann gilt*

$$A \quad \text{h.a.} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist endlich oder } A \sim \mathbb{N} \tag{0.3.37}$$

Beweis. Wenn A endlich oder abzählbar ist, dann ist A h.a., wie man sich leicht überlegt, so daß wir annehmen wollen, A sei h.a.

Sei $C \subset \mathbb{N}$ und $A \sim C$. Wir unterscheiden dann zwei Fälle

(i) C ist endlich, dann ist auch A endlich.

(ii) C ist unendlich, dann enthält A nach Proposition 0.3.21 eine abzählbare Teilmenge $\tilde{A}$, d.h. es existiert eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \tilde{A}$, woraus nach dem Satz von Schröder-Bernstein $A \sim \mathbb{N}$ folgt. □

0.3.23. Lemma. *Sei A eine nichtleere Menge, dann gilt*

$$A \quad \text{h.a.} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, f : \mathbb{N} \to A,\ f \text{ surjektiv} \tag{0.3.38}$$

Beweis. Folgt aus Proposition 0.3.19. □

0.3.24. Proposition. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Wir geben zwei Beweise an.

1. *Das Cauchysche Diagonalverfahren.*

Wir schreiben $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als unendliche Matrix

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\, (i,j) : i, j \in \mathbb{N} \,\} \tag{0.3.39}$$

und durchlaufen die Matrix nach dem folgenden Schema

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[d] & (0,1) \arrow[r] & (0,2) \arrow[dl] & (0,3) \arrow[r] & {} \\
(1,0) \arrow[ur] & (1,1) \arrow[dl] & (1,2) \arrow[ur] & & \\
(2,0) \arrow[d] & (2,1) \arrow[ur] & & & \\
(3,0) \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Hierbei treffen wir jedes Paar (i,j) genau einmal. Analytisch läßt sich diese Abzählung durch die Funktion beschreiben

$$f(i,j) = \begin{cases} 0, & (i,j) = (0,0), \\ \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j, & (i+j) \text{ ist ungerade}, \\ \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i, & (i+j) \text{ ist gerade}. \end{cases} \tag{0.3.40}$$

f ist bijektiv. Zum Beweis des Lemmas genügt es aber, lediglich die Injektivität von f nachzuweisen, denn dann ist $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ h.a. und natürlich unendlich.

Zeigen Sie die Injektivität von f als Übungsaufgabe.

2. *Beweis*

Wir werden eine weitere injektive Abbildung $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ angeben, indem wir definieren

$$g(i,j) = 2^i 3^j. \tag{0.3.41}$$

Die Injektivität von g sieht man so ein: Sei

$$2^i 3^j = 2^m 3^n \tag{0.3.42}$$

und gelte *ohne Beschränkung der Allgemeinheit* (o.B.d.A.) $i \le m$, dann folgt

(i) $\quad i = m \iff j = n,$

(ii) $\quad i < m \implies 3^{j-n} = 2^{m-i}.$

Letzteres ist ein Widerspruch, da auf der rechten Seite der Gleichung eine gerade Zahl steht und links eine ungerade bzw. eine gebrochene. □

0.3.25. Proposition. *$\prod_{i=1}^k \mathbb{N} = \mathbb{N}^k$ ist abzählbar.*

Beweis. Ähnlich wie im vorangehenden Satz (2. Beweis) oder per Induktion; Übungsaufgabe.

0.3.26. Lemma. *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen, dann ist auch $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ abzählbar.*

Beweis. Schreibe A_i als Folge $(x^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$; dann liefert uns diese Darstellung eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ auf die Vereinigung und wir schließen mit Lemma 0.3.23 und Proposition 0.3.24 weiter, daß $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ h.a. ist und damit abzählbar, da $A_0 \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ abzählbar, vgl. Lemma 0.3.22. □

0.3.27. Bemerkung. Der Satz ist auch richtig, wenn wir überall abzählbar durch h.a. ersetzen, d.h. die abzählbare Vereinigung h.a. Mengen ist wieder h.a..

Beweis. Übungsaufgabe.

Die unendlichen Mengen, die wir bis jetzt kennen gelernt haben, waren alle abzählbar. Gibt es auch welche, die nicht abzählbar sind und somit—wegen Proposition 0.3.21 —*überabzählbar*?

Der nächste Satz zeigt, daß $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

0.3.28. Theorem (Cantor)**.** *Sei A eine Menge, so ist $\mathcal{P}(A)$ strikt mächtiger als A, d.h. es existiert eine injektive aber keine surjektive Abbildung von A nach $\mathcal{P}(A)$, falls $A \neq \emptyset$.*

Beweis. (i) Sei $A = \emptyset$, so enthält A kein Element und $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$.

(ii) Sei $A \neq \emptyset$, dann wird durch die Zuordnung

$$x \in A \to \{x\} \in \mathcal{P}(A) \tag{0.3.43}$$

A injektiv nach $\mathcal{P}(A)$ abgebildet.

Wir werden durch einen Widerspruchsbeweis zeigen, daß keine surjektive Abbildung von A nach $\mathcal{P}(A)$ existiert.

Sei $f : A \to \mathcal{P}(A)$ surjektiv. Definiere

$$M = \{\, x \in A \colon x \notin f(x) \,\}, \tag{0.3.44}$$

Da $M \in \mathcal{P}(A)$, existiert $a \in A$, so daß $f(a) = M$. Es gilt nun $a \in M$ oder $a \notin M$ und wir werden sehen, daß beides zu einem Widerspruch führt.

(a) Sei $a \in M$, so folgt nach Definition von M $a \notin f(a) = M$; Widerspruch.

(b) Sei $a \notin M = f(a)$, so folgt ebenfalls aus (0.3.44) $a \in M$; Widerspruch. □

Relationen

Ein wichtiger Begriff in der Mathematik ist der sog. *Relationsbegriff*, der—durchaus wörtlich zu verstehenden—Beziehung zwischen zwei Größen x und y.

Bevor wir die genaue Definition angeben, erläutern wir den Begriff an zwei Beispielen.

0.3.29. Beispiele. (i) Seien x und y reelle Zahlen. Als Relation zwischen x und y wählen wir „$x \leq y$“.

(ii) Seien x, y natürliche Zahlen; wähle als Relation „$x^2 = y$“.

In der Mathematik ist es üblich, Eigenschaften, denen gewisse Objekte genügen oder Beziehungen zwischen ihnen, durch Mengen auszudrücken, um hierdurch eine schärfere Begriffsbildung zu erreichen.

Wir definieren daher

0.3.30. Definition (Relation)**.** (i) Eine *Relation* zwischen Elementen $x \in A$ und $y \in B$ zweier Mengen A, B ist eine Teilmenge R des kartesischen Produktes $A \times B$, d.h. $R \subset A \times B$. Die Beziehung $(x, y) \in R$ wird oft ausgedrückt durch „es gilt $R(x, y)$“ oder kurz „$R(x, y)$“.

(ii) Die *Inverse* (Relation) einer Relation R bezeichnen wir mit R^{-1} und definieren sie durch

$$R^{-1} \subset B \times A, \qquad R^{-1}(y, x) \iff R(x, y). \tag{0.3.45}$$

(iii) Eine Relation heißt *funktoriell*, wenn

$$R(x, y) \wedge R(x, \bar{y}) \implies y = \bar{y}. \tag{0.3.46}$$

0.3.31. Definition (Äquivalenzrelation)**.** (i) Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt

$$R(x, x) \qquad \text{(Reflexivität)} \tag{0.3.47}$$

$$R(x, y) \implies R(y, x) \qquad \text{(Symmetrie)} \tag{0.3.48}$$

$$R(x, y) \wedge R(y, z) \implies R(x, z) \qquad \text{(Transitivität)} \tag{0.3.49}$$

(ii) Ist R eine Äquivalenzrelation und $x \in A$, so bezeichnen wir als *Restklasse* oder *Äquivalenzklasse* von x die Menge

$$\hat{x} = \{\, y \in A \colon R(x, y) \,\}. \tag{0.3.50}$$

Die Zugehörigkeit zu $\hat{x}$ wird oft durch

$$y \equiv x \mod R, \tag{0.3.51}$$

zu lesen als „y äquivalent x modulo R“, charakterisiert.

Die Menge aller Restklassen bezeichnen wir mit A/R (A modulo R),

$$A/R = \{\, \hat{x} \colon x \in A \,\}. \tag{0.3.52}$$

0.3.32. Beispiele. (i) In der Menge der Menschen definiert „verwandt sein“ eine Äquivalenzrelation, wenn wir vereinbaren, daß jeder Mensch mit sich selbst verwandt ist.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und seien $x, y \in \mathbb{Z}$, so ist die Relation $(x-y)/n \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{Z}$. Sie wird mit $x = y \mod n$ bezeichnet.

0.3.33. Definition (Partition)**.** (i) Eine *Überdeckung* einer Menge A ist eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Mengen, für die gilt

$$A \subset \bigcup_{i\in I} A_i. \tag{0.3.53}$$

(ii) Eine *Partition* einer Menge A ist eine Überdeckung, die aus paarweise disjunkten Teilmengen von A besteht, d.h.

$$A = \dot{\bigcup_{i\in I}} A_i. \tag{0.3.54}$$

0.3.34. Proposition. (i) *Die Restklassen einer jeden Äquivalenzrelation R einer Menge A bilden eine Partition von A.*

(ii) *Umgekehrt definiert jede Partition $(A_i)_{i\in I}$, $A_i \neq \emptyset$, von A eine Äquivalenzrelation R durch die Festsetzung*

$$R(x,y) \iff \underset{i\in I}{\exists}\; x, y \in A_i. \tag{0.3.55}$$

Beweis. (i) a) Die Restklassen bilden eine Überdeckung wegen der Reflexivität einer Äquivalenzrelation, d.h. $x \in \hat{x}$.

b) Die Restklassen sind paarweise disjunkt, denn sei $z \in \hat{x} \cap \hat{y}$ und sei $w \in \hat{x}$ beliebig, so gilt

$$R(z,x) \wedge R(x,w) \implies R(z,w) \qquad \text{(Transitivität)}, \tag{0.3.56}$$

$$R(z,w) = R(w,z) \qquad \text{(Symmetrie)}, \tag{0.3.57}$$

$$R(w,z) \wedge R(z,y) \implies R(w,y) \qquad \text{(Transitivität)}, \tag{0.3.58}$$

d.h.

$$w \in \hat{y} \qquad \forall\, w \in \hat{x} \tag{0.3.59}$$

oder anders ausgedrückt

$$\hat{x} \subset \hat{y}. \tag{0.3.60}$$

Vertauschung der Rollen von $\hat{x}$ und $\hat{y}$ liefert dann die andere Inklusion $\hat{y} \subset \hat{x}$ und damit $\hat{x} = \hat{y}$.

(ii) Übungsaufgabe. □

0.3.35. Aufgaben.

1 Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von B. Dann gilt

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i),$$

$$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$

2 Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeige, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind

(i) f ist injektiv.

(ii) Für jede Teilmenge $M \subset A$ gilt

$$f^{-1}(f(M)) = M.$$

(iii) Für jedes Paar von Teilmengen $M, N \subset A$ gilt

$$f(M \cap N) = f(M) \cap f(N).$$

(iv) Für alle disjunkten Paare $M, N \subset A$ gilt

$$f(M) \cap f(N) = \emptyset.$$

(v) Für alle Paare $M \subset N \subset A$ gilt

$$f(N \backslash M) = f(N) \backslash f(M).$$

3 Seien A, B, C, D Mengen und $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ Abbildungen. Zeige, daß alle drei Abbildungen bijektiv sind, falls dies auf $g \circ f$ und $h \circ g$ zutrifft.

4 Man beweise Proposition 0.3.19.

5 Man zeige die Injektivität der Abbildung in (0.3.40).

6 Man beweise Proposition 0.3.25 und Bemerkung 0.3.27.

7 Man beweise Teil (ii) von Proposition 0.3.34.

8 Sei E eine unendliche Menge und $A \subset E$ eine h.a. Teilmenge. Zeige, daß $E \sim E \backslash A$, falls $E \backslash A$ unendlich ist.

9 Sei E eine Menge, dann sind $\mathcal{P}(E)$ und die Menge aller Abbildungen von E nach $\{0, 1\}$ gleichmächtig.

0.4. Natürliche und reelle Zahlen

Die Eigenschaften von $\mathbb{N}$ sind uns durch jahrelangen Gebrauch völlig vertraut. Wir heben nur eine besonders hervor

0.4.1. Axiom (Wohlordnung)**.** $\mathbb{N}$ ist *wohlgeordnet*, d.h. jede nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element, in Formeln,

$$\underset{k \in M}{\exists} \ \underset{n \in M}{\forall} \ k \leq n. \tag{0.4.1}$$

Hieraus folgt

0.4.2. Theorem (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Genüge $M \subset \mathbb{N}$ folgenden Bedingungen*

$$0 \in M, \qquad \text{(Induktionsanfang)} \tag{0.4.2}$$

$$n \in M \implies n+1 \in M, \qquad \text{(Induktionsschluß)} \tag{0.4.3}$$

dann folgt

$$M = \mathbb{N}. \tag{0.4.4}$$

Beweis. Wir machen einen Widerspruchsbeweis. Sei $N = \mathbb{N} \setminus M$ nicht leer, dann existiert nach Axiom 0.4.1 ein kleinstes Element $x_0 \in N$. Wegen (0.4.2) ist $x_0 > 0$ und somit $x_0 - 1 \in M$, woraus nach (0.4.3) folgt

$$x_0 = (x_0 - 1) + 1 \ \in \ M; \tag{0.4.5}$$

Widerspruch, d.h. $N = \emptyset$. $\square$

Eine äquivalente Formulierung des Prinzips der vollständigen Induktion ist folgende

0.4.3. Theorem. *Sei p eine Aussageform auf $\mathbb{N}$. Gelte dann*

$$p(0) = \text{wahr} \tag{0.4.6}$$

und

$$p(n) \implies p(n+1), \tag{0.4.7}$$

so folgt

$$p(n) = \text{wahr} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{0.4.8}$$

Beweis der Äquivalenz zu Theorem 0.4.2.

(i) Nehme an, daß Theorem 0.4.2 richtig sei und definiere

$$M = \{ n \in \mathbb{N} \colon p(n) = \text{wahr} \} \tag{0.4.9}$$

M erfüllt die Voraussetzungen (0.4.2) und (0.4.3), so daß $M = \mathbb{N}$.

(ii) Sei jetzt Theorem 0.4.3 richtig und M die Menge in Theorem 0.4.2, so definiere

$$p(n) \Longleftrightarrow n \in M. \tag{0.4.10}$$

p erfüllt nach Annahme über M die Voraussetzungen (0.4.6) und (0.4.7), so daß $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. $M = \mathbb{N}$. □

Gelegentlich benutzen wir statt Theorem 0.4.3 die äquivalente Version

0.4.4. Theorem. *Sei p eine Aussageform auf $\mathbb{N}$ und gelte*

$$p(0) = \text{wahr} \tag{0.4.11}$$

und

$$\underset{0 \le k \le n}{\forall} p(k) \implies p(n+1), \tag{0.4.12}$$

so folgt

$$p(n) = \text{wahr} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{0.4.13}$$

Beweis. Wende Theorem 0.4.3 auf die Aussageform

$$q(n) = \underset{0 \le k \le n}{\forall} p(k) = p(0) \wedge p(1) \wedge \cdots \wedge p(n) \tag{0.4.14}$$

an. □

0.4.5. Bemerkung. Liegt in Theorem 0.4.2–Theorem 0.4.4 der Induktionsanfang nicht bei 0 sondern bei bei irgendeinem $n_0 \in \mathbb{N}$, so gelten die entsprechenden Behauptungen für alle $n \ge n_0$.

Beweis. Übungsaufgabe.

0.4.6. Beispiel. Es gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{0.4.15}$$

Beweis. Definiere

$$M = \{\, n \in \mathbb{N}^* \colon s_n = \frac{n(n+1)}{2} \,\}. \tag{0.4.16}$$

Dann gilt

(i) $1 \in M$.

(ii) $n \in M \implies (n+1) \in M$, da

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned} \tag{0.4.17}$$

und folglich ist $M = \mathbb{N}^*$. □

0.4.7. Bemerkung. Der Induktionsanfang ist beim Prinzip der vollständigen Induktion unverzichtbar, denn sonst könnte man so unsinnige Dinge beweisen, wie z.B.

$$\underset{a \in \mathbb{R}_+^*}{\forall} \ \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \ a^n = a^{n+1}, \tag{0.4.18}$$

denn der Induktionsschluß

$$a^n = a^{n+1} \implies a^{n+1} = a^{n+2} \tag{0.4.19}$$

ist sicherlich für alle $a \in \mathbb{R}_+^*$ richtig, nicht aber der Induktionsanfang

$$1 = a^0 = a^1. \tag{0.4.20}$$

0.4.8. Definition (Rekursive Definition, 1. Variante)**.** Sei $B \neq \emptyset$ eine Menge. Unter der rekursiven Definition einer Abbildung $f : \mathbb{N} \to B$ verstehen wir folgendes:

$$f(0) \text{ ist wohldefiniert.} \tag{0.4.21}$$

Es existiert $F : \mathbb{N} \times B \to B$, so daß

$$f(n+1) = F(n, f(n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{0.4.22}$$

0.4.9. Proposition. *Diese rekursive Definition definiert eindeutig eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to B$.*

Bevor wir die Proposition beweisen können, brauchen wir noch eine Definition und ein Lemma.

0.4.10. Definition (Ausschöpfung)**.** Sei $\emptyset \neq A$ eine Menge. Eine Ausschöpfung von A ist eine *aufsteigende* Folge A_n von Teilmengen von A, $A_n \subset A_{n+1}$, die eine Überdeckung von A bilden.

0.4.11. Lemma. *Seien A, B Mengen, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von A und $f_n : A_n \to B$ Abbildungen mit der Eigenschaft*

$$f_{n|A_m} = f_m \quad \forall\, m \leq n. \tag{0.4.23}$$

Dann wird durch die Festsetzung

$$f(x) = f_n(x), \quad \text{falls} \quad x \in\ A_n \tag{0.4.24}$$

eindeutig eine Abbildung $f : A \to B$ definiert mit $f_{|A_n} = f_n\ \forall\ n$. Wir schreiben für f auch

$$f = \bigcup_n f_n. \tag{0.4.25}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Beweis von Proposition 0.4.9. (i) Die Eindeutigkeit von f folgt sofort aus (0.4.21) und (0.4.22) mittels vollständiger Induktion.

(ii) Wir betrachten eine Ausschöpfung (A_n) von $\mathbb{N}$ durch *Anfangsstücke*, $A_n = \{0, 1, \ldots, n\}$, und definieren induktiv Abbildungen $f_n : A_n \to B$ durch

$$f_0(0) = y_0, \qquad \text{für } n = 0, \text{ wobei } y_0 \in B \text{ vorgegeben,} \tag{0.4.26}$$

und für $n > 0$, falls f_{n-1} schon definiert ist,

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{n-1}(x), & \text{falls } x \in A_{n-1} \\ F(n-1, f_{n-1}(x)), & \text{falls } x = n. \end{cases} \tag{0.4.27}$$

Mittels vollständiger Induktion weist man nach, daß die Abbildungen f_n für jedes n definiert sind und (0.4.23) erfüllen. Daher ist

$$f = \bigcup_n f_n \tag{0.4.28}$$

die gesuchte rekursiv definierte Funktion; sie genügt

$$\begin{aligned} f(n) &= f_{|A_n}(n) = f_n(n) \\ &= F(n-1, f_{n-1}(n-1)) \\ &= F(n-1, f(n-1)). \end{aligned}$$

□

0.4.12. Beispiel. Wir definieren die *Fakultät* $f(n) = n!$ rekursiv vermöge

$$0! = 1, \tag{0.4.29}$$

$$(n+1)! = F(n, n!), \tag{0.4.30}$$

wobei F definiert ist durch

$$\begin{aligned} F : \mathbb{N} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ (n, x) &\to (n+1)x, \end{aligned} \tag{0.4.31}$$

d.h.

$$(n+1)! = (n+1)n! = 1 \cdot 2 \cdots (n+1). \tag{0.4.32}$$

Die rekursive Definition einer Funktion tritt gelegentlich auch in einer anderen Form auf.

0.4.13. Definition (Rekursive Definition, 2. Variante)**.** Sei $\emptyset \neq B$ eine Menge und zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ existiere eine Abbildung $\varPhi_n : B^n \to B$. Sei $y_0 \in B$ beliebig, dann heißt $f : \mathbb{N} \to B$ rekursiv definiert, falls wir setzen

$$f(0) = y_0, \tag{0.4.33}$$

$$f(n) = \varPhi_n(f(0), \dots, f(n-1)), \quad n \geq 1. \tag{0.4.34}$$

0.4.14. Proposition. *Durch die Definition 0.4.13 wird genau eine Funktion $f : \mathbb{N} \to B$ definiert.*

Beweis. (i) Die Eindeutigkeit von f beweist man durch Induktion nach n; Übungsaufgabe.

(ii) Sei $A_n = \{0, \dots, n\}$ eine Ausschöpfung von $\mathbb{N}$. Definiere zu $y_0 \in B$ induktiv eine Folge von Abbildungen $f_n : A_n \to B$ so, daß

$$f_0(0) = y_0, \tag{0.4.35}$$

und für $n > 0$, falls $f_0, \dots, f_{n-1}$ schon definiert sind,

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{n-1}(x), & \text{falls } x \in A_{n-1} \\ \varPhi_n(f_0(0), \dots, f_{n-1}(n-1)), & \text{falls } x = n. \end{cases} \tag{0.4.36}$$

Schließe dann wie im Beweis von Proposition 0.4.9 weiter, daß

$$f_{n|_{A_m}} = f_m \qquad \forall\, m \leq n \tag{0.4.37}$$

und daß $f = \bigcup_n f_n$ die gesuchte Funktion ist. □

Wir können jetzt die Proposition 0.3.21 beweisen, nämlich, daß jede unendliche Menge eine abzählbare Teilmenge enthält.

0.4.15. Beweis von Proposition 0.3.21.

(i) Wir geben zunächst einen Beweis, der das Auswahlaxiom nicht benutzt, und zeigen damit zugleich, daß das Auswahlaxiom nur bei überabzählbaren Familien benötigt wird. Sei A die unendliche Menge, dann müssen wir eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ finden, die wir auch als Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreiben können, deren Glieder paarweise verschieden sind. Wir definieren die Folge induktiv:

$$\exists\, x_0 \in A, \quad \text{da } A \neq \emptyset; \text{ setze} \quad A_0 = A\backslash\{x_0\}. \tag{0.4.38}$$

Seien, für $n \geq 0$, x_n und A_n schon definiert, so wähle

$$x_{n+1} \in A_n \quad \text{und setze} \quad A_{n+1} = A_n\backslash\{x_{n+1}\}. \tag{0.4.39}$$

Dieser Prozeß bricht nie ab, da A unendlich ist und nach Konstruktion sind die Folgenglieder paarweise verschieden.

(ii) Der zweite Beweis benutzt das Auswahlaxiom. Nach Axiom 0.3.14 existiert eine Auswahlfunktion $\varphi : \mathcal{P}(A)\backslash\{\emptyset\} \to A$, die jeder nichtleeren Menge $B \in \mathcal{P}(A)$ ein Element $\varphi(B) \in B$ zuordnet. Zu jedem $n > 0$ definieren wir die Abbildungen

$$\begin{gathered} \Phi_n : A^n \to A, \\ \Phi_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(A\backslash\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}), \end{gathered} \tag{0.4.40}$$

und definieren f rekursiv durch

$$\begin{aligned} &f(0) = \varphi(A), \\ &f(n) = \Phi_n(f(0), \ldots, f(n-1)) \quad \text{für } n > 0. \end{aligned} \tag{0.4.41}$$

Es ist unschwer einzusehen, daß $f : \mathbb{N} \to A$ injektiv ist, denn sei $n \neq m$ und o.d.B.A. $m < n$, so folgt $f(n) \in A\backslash\{f(m)\}$ und damit $f(n) \neq f(m)$. $\square$

Reelle Zahlen

Wir führen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ axiomatisch ein.

0.4.16. Axiom (Reelle Zahlen)**.**

(I) $\mathbb{R}$ ist ein *Körper*, d.h. es existieren Abbildungen $(x,y) \to x+y$ und $(x,y) \to xy$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die folgende Axiome erfüllen

(I.1) $$x + (y+z) = (x+y) + z$$

(I.2) $$x + y = y + x$$

(I.3) $$\underset{0\in\mathbb{R}}{\exists} \; \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \; 0 + x = x$$ (Existenz der Null)

(I.4) $$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \; \underset{-x\in\mathbb{R}}{\exists} \; x + (-x) = 0$$ (Additive Inverse)

(I.5) $$x(yz) = (xy)z$$

(I.6) $$xy = yx$$

(I.7) $$\underset{0\neq 1\in\mathbb{R}}{\exists} \; \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \; 1x = x$$ (Existenz der Eins)

(I.8) $$\underset{x\in\mathbb{R}^*}{\forall} \; \underset{x^{-1}\in\mathbb{R}}{\exists} \; xx^{-1} = 1$$ (Multiplikative Inverse)

(I.9) $$x(y+z) = xy + xz$$

(II) $\mathbb{R}$ ist ein *geordneter* Körper, d.h. es existiert eine Relation $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ —wir schreiben für $R(x,y)$ „$x \leq y$" —, so daß

(II.1) $$x \leq y \;\wedge\; y \leq z \quad \Longrightarrow \quad x \leq z$$

(II.2) $$x \leq y \;\wedge\; y \leq x \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$$

(II.3) $$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \; \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall} \; x \leq y \;\vee\; y \leq x$$

(II.4) $$\underset{z\in\mathbb{R}}{\forall} \; x \leq y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leq y + z$$

(II.5) $$0 \leq x \;\wedge\; 0 \leq y \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq xy$$

0.4.17. Die Gesetze (II.1) und (II.2) charakterisieren eine Ordnungsrelation; gilt zusätzlich noch (II.3), so spricht man von einer *Totalordnung.*

Statt „$x \leq y,\ x \neq y$" schreiben wir auch „$x < y$" bzw. „$y > x$".

Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$, definieren wir die *Intervalle*

$$(a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \colon a < x < b \,\} \qquad \text{(offenes Intervall)}$$

$$(a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b \,\} \qquad \text{(halb-offenes Intervall)}$$

$$[a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b \,\} \qquad \text{(halb-offenes Intervall)}$$

$$[a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b \,\} \qquad \text{(abgeschlossenes Intervall)}$$

mit *Endpunkten* a, b.

(III) $\mathbb{R}$ ist ein *archimedisch* geordneter Körper, d.h.

(III.1)
$$\forall_{x \in \mathbb{R}_+^*} \ \forall_{y \in \mathbb{R}_+} \ \exists_{n \in \mathbb{N}} \ y \leq nx$$

(IV) $\mathbb{R}$ ist *vollständig*, d.h. $\mathbb{R}$ genügt dem *Axiom der Intervallschachtelungen*: Sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Folge von ineinander geschachtelten Intervallen, $I_{n+1} \subset I_n \ \forall\, n$, dann ist

(IV.1)
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Folgerungen aus den Axiomen

0.4.18. Für alle Paare $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Relationen

(0.4.42)
$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$

Beweis. Folgt aus (II.2) und (II.3). □

0.4.19. Es gilt

(0.4.43)
$$x \leq y < z \ \vee \ x < y \leq z \quad \Longrightarrow \quad x < z.$$

Beweis. Aus (II.1) folgt $x \leq z$. Wäre $x = z$, so müsste dann nach (II.2) auch $y = z$ sein, was nicht möglich ist. □

0.4.20. Es gilt

(0.4.44)
$$0x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Nach (I.7) und (I.9) gilt

$$x + x = (1 + 1)x, \tag{0.4.45}$$

Multiplikation mit 0 liefert nun wegen (I.7) und (I.3)

$$0x + 0x = 0x, \tag{0.4.46}$$

also $0x = 0$. □

0.4.21. Es ist $0 < 1$.

Beweis. Es genügt $0 \leq 1$ zu zeigen. Wäre dies nicht der Fall, so folgte aus (II.3) $1 \leq 0$ und aus (I.4) und (II.4) $0 \leq -1$, und somit nach (II.5)

$$0 \leq (-1)(-1). \tag{0.4.47}$$

Multiplizieren wir andererseits

$$1 + (-1) = 0 \tag{0.4.48}$$

mit -1, so erhalten wir wegen (0.4.44)

$$(-1) + (-1)(-1) = 0, \tag{0.4.49}$$

d.h.

$$0 \leq (-1)(-1) = 1, \tag{0.4.50}$$

im Widerspruch zur Annahme $1 \leq 0$. □

0.4.22. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-x = (-1)x$. Wir schreiben für $y + (-x)$ auch $y - x$.

Beweis. Übungsaufgabe.

0.4.23. Die Relationen

$$x \leq y, \quad 0 \leq y - x, \quad -y \leq -x \tag{0.4.51}$$

sind äquivalent; das gleiche gilt, wenn „$\leq$“ durch „$<$“ ersetzt wird.

Beweis. Übungsaufgabe.

0.4.24. Es gilt

$$0 < x \quad \Longrightarrow \quad 0 < x^{-1}, \tag{0.4.52}$$

$$0 < x < y \quad \Longrightarrow \quad 0 < y^{-1} < x^{-1}. \tag{0.4.53}$$

Beweis. (i) Wir beweisen zunächst die erste Implikation, indem wir

$$0 = x^{-1} + (-x^{-1}) \tag{0.4.54}$$

mit x multiplizieren und schließen

$$0 = 1 + x(-x^{-1}), \tag{0.4.55}$$

d.h.

$$x(-x^{-1}) = -1 < 0. \tag{0.4.56}$$

Nach (II.5) und Ziffer 0.4.18 ist daher $-x^{-1} < 0$ und damit $x^{-1} > 0$.

(ii) Aus Ziffer 0.4.23, (I.8) und (II.5) folgern wir, daß für $z > 0$

$$x \le y \quad \Longleftrightarrow \quad xz \le yz. \tag{0.4.57}$$

Ist nun $0 < x < y$, so wähle in vorstehender Relation $z = x^{-1}y^{-1}$ und erhalte $y^{-1} < x^{-1}$. □

0.4.25. Jede endliche, nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein kleinstes und größtes Element.

Beweis. Induktion über $\operatorname{card} A$.

(i) Die Behauptung ist richtig für $\operatorname{card} A = 1$.

(ii) Sei die Behauptung richtig für $\operatorname{card} A = n \ge 1$ und gelte $\operatorname{card} A = n + 1$. Wähle ein beliebiges $x_0 \in A$, dann besitzt $B = A \backslash \{x_0\}$ ein kleinstes und ein größtes Element x_1 bzw. x_2.

Es trifft nun genau eine der folgenden drei Relationen zu

$$x_1 \le x_0 \le x_2, \quad x_0 < x_1 \quad \text{oder} \quad x_2 < x_0. \tag{0.4.58}$$

Im ersten Fall sind x_1 und x_2 die gesuchten Elemente, im zweiten ist x_0 das kleinste und x_2 das größte und im dritten ist x_1 das kleinste und x_0 das größte. □

0.4.26. Bemerkung. Das Axiomensystem der reellen Zahlen definiert einen Zahlenkörper, in den sich die natürlichen Zahlen, und somit auch $\mathbb{Q}$, auf natürliche Weise einbetten lassen. Bezeichnen wir die 0 und die 1 in beiden Mengen mit denselben Symbolen, so definieren wir eine Einbettung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(n) &= \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-mal}. \end{aligned} \tag{0.4.59}$$

f ist injektiv, *additiv* und *multiplikativ*, d.h.

$$f(n+m) = f(n) + f(m),$$
$$f(nm) = f(n)f(m). \tag{0.4.60}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

0.4.27. Definition. Sei $\emptyset \neq A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ eine endliche Menge, so setzen wir unter Berücksichtigung von Ziffer 0.4.25

(i) $\max(x_1, \ldots, x_n) = \max A = \text{größtes Element in } A$

(ii) $\min(x_1, \ldots, x_n) = \min A = \text{kleinstes Element in } A$

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

(iii)
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ heißt *Absolutbetrag* von x.

(iv) Ist I ein Intervall mit Endpunkten a, b, so heißt $|I| = |b-a|$ *Länge* des Intervalls.

0.4.28. Proposition.

$$|x| \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad -a \leq x \leq a \tag{0.4.61}$$

und

$$|x| < a \quad \Longleftrightarrow \quad -a < x < a. \tag{0.4.62}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

0.4.29. Theorem (Dichtheit der rationalen Zahlen)**.** *Sei $I = (a, b)$ ein offenes, nichtleeres Intervall, dann ist $I \cap \mathbb{Q}$ unendlich.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. folgende Einschränkungen machen:

(i) Wir zeigen nur, daß $c \in I \cap \mathbb{Q}$ existiert. Per Induktion folgt daraus die allgemeinere Behauptung, indem wir statt I das Intervall (a, c) betrachten und hierauf den gleichen Schluß anwenden, usw..

(ii) Wir dürfen annehmen, daß $0 < a < b$, denn sonst ersetze I durch $I + k = (a+k, b+k)$ mit großem $k \in \mathbb{N}$. Wenn dann $I + k$ eine rationale Zahl enthält, dann natürlich auch I.

Sei also $0 < a$. Nach (III.1) existiert $n \in \mathbb{N}$, so daß

$$1 < n(b-a) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n} < b - a. \tag{0.4.63}$$

Die Menge

$$M = \{\, m \in \mathbb{N} \colon b \leq m/n \,\} \tag{0.4.64}$$

ist aus dem gleichen Grund nichtleer und besitzt daher ein kleinstes Element q, $q > 0$.

Wir behaupten, daß

$$c = \frac{q-1}{n} \in I. \tag{0.4.65}$$

(a) Es gilt sicherlich $c < b$ aufgrund der Minimalität von q.

(b) Ferner ist nach (0.4.63) und (0.4.64)

$$a = b - (b-a) < b - \frac{1}{n} \leq \frac{q}{n} - \frac{1}{n} = c. \tag{0.4.66}$$

Damit ist alles bewiesen. □

0.4.30. Proposition. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Übungsaufgabe.

0.4.31. Proposition. $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *und damit überabzahlbar wegen Theorem* 0.3.28*.*

Beweis. Sei $1 < g \in \mathbb{N}$. Wir benutzen, daß sich jede reelle Zahl $\alpha \in [0,1)$ als ein g-adischer Bruch $\alpha = 0, a_1 a_2 \ldots$ mit $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, g-1\}$ schreiben läßt. Die Darstellung ist eindeutig, wenn man ausschließt, daß, abgesehen von endlichen vielen $i \in \mathbb{N}$, alle a_i mit $g - 1$ übereinstimmen, vgl. Aufgabe 5 auf Seite 71 von Aufgaben 1.2.27. Man kann dann durch Wahl geeigneter Basen g zeigen, daß eine surjektive und eine injektive Abbildung von $\mathcal{P}(E)$ nach $[0,1)$ existieren und damit die Behauptung beweisen; Übungsaufgabe.

0.4.32. Bemerkung. Reelle Zahlen, die nicht rational sind, heißen *irrational*. Die Menge der irrationalen Zahlen ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Beweis. Benutze Aufgabe 8 auf Seite 29 von Aufgaben 0.3.35; Übungsaufgabe.

0.4.33. Definition. (i) $A \subset \mathbb{R}$ heißt nach *oben beschränkt*, wenn

$$\exists_{b \in \mathbb{R}} \ \forall_{x \in A} \ x \leq b. \tag{0.4.67}$$

b heißt *obere Schranke* oder *Majorante* von A.

(ii) $A \subset \mathbb{R}$ heißt nach *unten beschränkt*, wenn

$$\exists_{a \in \mathbb{R}} \ \forall_{x \in A} \ a \leq x. \tag{0.4.68}$$

a heißt *untere Schranke* oder *Minorante* von A.

(iii) $A \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn untere und obere Schranken existieren.

0.4.34. Bemerkung. (i) Die leere Menge ist beschränkt.

(ii) Ist A nach oben beschränkt, so ist $-A = \{ -x \colon x \in A \}$ nach unten beschränkt und umgekehrt.

(iii) $$A \subset \mathbb{R} \text{ beschränkt} \iff \exists_{a \in \mathbb{R}} \ \forall_{x \in A} \ |x| \leq a.$$

Beweis. Übungsaufgabe.

0.4.35. Theorem. (i) *Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, dann besitzt die Menge M ihrer Majoranten ein kleinstes Element b. Es heißt Supremum von A, in Zeichen,*

$$b = \sup A \tag{0.4.69}$$

oder

$$b = \sup_{x \in A} x. \tag{0.4.70}$$

(ii) *Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, dann besitzt die Menge M ihrer Minoranten ein größtes Element a. Es heißt Infimum von A, in Zeichen,*

$$a = \inf A \tag{0.4.71}$$

oder

$$a = \inf_{x \in A} x. \tag{0.4.72}$$

Beweis. Es genügt, die erste Aussage zu beweisen, da die zweite auf die erste zurückgeführt werden kann, indem man $-A$ anstelle von A betrachtet, vgl. Bemerkung 0.4.34.

(a) Zum Beweis von (i) benutzen wir die Ungleichung

$$n < 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{0.4.73}$$

die man leicht per Induktion herleitet, und folgern aus (III.1)

$$\underset{\gamma \in \mathbb{R}_+^*}{\forall} \ \underset{n \in \mathbb{N}}{\exists} \ 2^{-n} < \gamma. \tag{0.4.74}$$

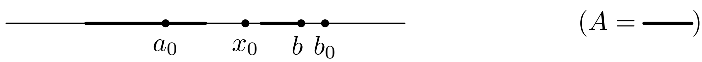
(b) Wir werden eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$, $I_{n+1} \subset I_n$, konstruieren, die folgenden Bedingungen genügt

$$\begin{aligned} I_n \cap A &\neq \emptyset, \\ b_n &\in M, \\ |I_n| &= 2^{-n}|I_0|. \end{aligned} \tag{0.4.75}$$

Nach (IV.1) existiert $b \in \bigcap_n I_n$ und wir werden sehen, daß b das gesuchte Element ist.

Zur Konstruktion der I_n benutzen wir die sog. *Halbierungsmethode.*

Sei $a_0 \in A$ und $b_0 \in M$. Das Intervall $I_0 = [a_0, b_0]$ halbieren wir nun. Setze $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$; liegt dann rechts von x_0 noch ein Punkt $x \in A$, d.h. gilt $x_0 \leq x$, so definieren wir $a_1 = x_0, b_1 = b_0$ und wählen als neues Intervall $I_1 = [a_1, b_1]$ das rechte Teilintervall, sonst wählen wir das linke Teilintervall aus.



In jedem Falle gilt

$$\begin{aligned} I_1 \cap A &\neq \emptyset, \\ b_1 &\in M, \\ |I_1| &= \frac{|I_0|}{2}. \end{aligned} \tag{0.4.76}$$

Wir halbieren jetzt I_1, wenden die gleichen Überlegungen auf die beiden Hälften an und erhalten ein Intervall $I_2 = [a_2, b_2]$, das die entsprechenden

Bedingungen wie in (0.4.76) erfüllt. Diesen Prozeß wiederholen wir ad infinitum und erhalten eine Folge I_n, die (0.4.75) genügt—die Abschätzung der Intervallänge beweist man mittels vollständiger Induktion.

Nach (IV.1) existiert $b \in \bigcap_n I_n$.

1. *b ist Majorante.*

Sei $x \in A$, so gilt für alle n

$$x \le b_n \le b + |I_n| \le b + 2^{-n}|I_0|, \tag{0.4.77}$$

da $|b - b_n| \le |I_n|$.

Setzen wir nun $\gamma = (x-b)/|I_0|$, so folgt aus (0.4.74), daß $\gamma \le 0$, d.h. $x \le b$.

2. *b ist minimal in M.*

Sei $\beta \in M$ und nehme an, daß $\gamma = (b-\beta)/|I_0| > 0$. Wähle nach (0.4.74) n_0 so, daß $2^{-n_0} < \gamma$. Sei nun $x \in I_{n_0} \cap A$, so schließen wir

$$a_{n_0} \le x \le \beta < b \le b_{n_0}, \tag{0.4.78}$$

da $\beta \in M$ und $b \in I_{n_0}$, und erhalten

$$b - \beta \le |I_{n_0}| = 2^{-n_0}|I_0| \tag{0.4.79}$$

im Widerspruch zur Annahme $2^{-n_0} < \gamma$. □

Eine Schlußweise, die wir während des Beweises eben benutzt haben, wollen wir in einem Lemma zusammenfassen, um später darauf verweisen zu können.

0.4.36. Lemma. *Sei γ eine reelle Zahl und nehme an, es gebe Konstanten c_1 bzw. c_2, so daß für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\gamma \le \frac{c_1}{n} \quad \text{bzw.} \quad \gamma \le \frac{c_2}{2^n}, \tag{0.4.80}$$

dann ist $\gamma \le 0$.

0.4.37. Lemma. *Sei $\emptyset \ne A \subset \mathbb{R}$, dann gilt*

(i) *$b = \sup A$ kann folgendermaßen charakterisiert werden:*

1. b ist Majorante von A.

2. $$\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\forall}\ \underset{x\in A}{\exists}\ b - \frac{1}{n} < x.$$

(ii) *$a = \inf A$ ist charakterisiert durch*

1. a ist Minorante von A.

2. $\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\forall}\ \underset{x\in A}{\exists}\ a \leq x \leq a + \frac{1}{n}$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Definitionen. □

0.4.38. Proposition (Existenz der m-ten Wurzel)**.**

$$\underset{m\in\mathbb{N}^*}{\forall}\ \underset{a\in\mathbb{R}_+^*}{\forall}\ \underset{x\in\mathbb{R}_+}{\exists}\ x^m = a. \tag{0.4.81}$$

Beweis. (i) Wir betrachten nur den Fall $m = 2$ ausführlich und skizzieren, wie der Fall $m > 2$ analog bewiesen werden kann—für $m = 1$ brauchen wir nichts zu beweisen.

Sei also $m = 2$.

Wir stellen zunächst fest, daß die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$, monton wächst, denn

$$y^2 - x^2 = (y + x)(y - x). \tag{0.4.82}$$

Definiere

$$M = \{\, x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \leq a \,\}, \tag{0.4.83}$$

dann ist $M \neq \emptyset$, denn $0 \in M$, und nach oben beschränkt durch a. Setze $x_0 = \sup M$.

Behauptung: $x_0^2 = a$.

(a) Wir zeigen als erstes $x_0^2 \leq a$.

Wie man sich leicht überlegt, ist $0 < x_0$, so daß für große $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$x_n = x_0 - \frac{1}{n} > 0. \tag{0.4.84}$$

Nach dem vorangehenden Lemma existiert zu jedem x_n ein $\tilde{x}_n \in M$, so daß $x_n \leq \tilde{x}_n$, woraus wir aufgrund der gerade bewiesenen Monotonie schließen

$$\begin{aligned} a \geq \tilde{x}_n^2 \geq x_n^2 &= (x_0 - \frac{1}{n})^2 \\ &= x_0^2 - \frac{2}{n}x_0 + \frac{1}{n^2} \\ &\geq x_0^2 - \frac{2}{n}x_0, \end{aligned} \tag{0.4.85}$$

so daß nach Lemma 0.4.36 $x_0^2 \le a$.

(b) Wir beweisen $a \le x_0^2$.

Sei $n \in \mathbb{N}^*$, dann gilt

$$x_n = x_0 + \frac{1}{n} \notin M, \tag{0.4.86}$$

da x_0 Majorante von M, d.h. $x_n^2 > a$. Die analoge Schlußweise wie in (0.4.85) liefert nun $a \le x_0^2$.

(ii) Im Falle $m > 2$ kann man analog wie unter (i) vorgehen: Zunächst beweist man per Induktion die *verallgemeinerte binomische Formel*, vgl. Aufgabe 13 und 14 von Aufgaben 0.4.42,

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \tag{0.4.87}$$

und leitet hieraus die Monotonie von $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = x^m$ her.

Dann verläuft der Beweis wie im Falle $m = 2$, man ersetzt lediglich in der Ungleichung (0.4.85) die gewöhnliche binomische Formel durch die verallgemeinerte. □

0.4.39. Bemerkung. (i) Wenn $\sup A \in A$ oder $\inf A \in A$, so schreiben wir anstelle von $\sup A$ bzw. $\inf A$ auch $\max A$ (*Maximum* von A) bzw. $\min A$ (*Minimum* von A).

(ii) Im allgemeinen ist $\sup A \notin A$ bzw. $\inf A \notin A$, wie am Beispiel der Menge

$$A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \} \tag{0.4.88}$$

ersichtlich: $\inf A = 0 \notin A$.

(iii) Ist A nach oben bzw. nach unten unbeschränkt, so setzen wir

$$\sup A = \infty \quad \text{bzw.} \quad \inf A = -\infty \tag{0.4.89}$$

und vereinbaren, daß

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \; -\infty < x < \infty. \tag{0.4.90}$$

(iv) Ist $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von reellen Zahlen, so definieren wir

$$\begin{aligned} \sup_{i \in I} x_i &= \sup\{ x_i : i \in I \}, \\ \inf_{i \in I} x_i &= \inf\{ x_i : i \in I \}. \end{aligned} \tag{0.4.91}$$

0.4.40. Proposition. (i) *Sei $A \subset B \subset \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\sup A \leq \sup B \quad \text{und} \quad \inf A \geq \inf B. \tag{0.4.92}$$

(ii) *Sei $(A_i)_{i \in I}, \emptyset \neq A_i \subset \mathbb{R}$ eine Familie von nach oben beschränkten Mengen und sei $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, so folgt*

$$\sup A = \sup_{i \in I} \sup A_i \tag{0.4.93}$$

und entsprechend

$$\inf A = \inf_{i \in I} \inf A_i, \tag{0.4.94}$$

falls $\inf A_i > -\infty \; \forall \, i$.

Beweis. (i) Folgt aus den Definitionen.

(ii) Es genügt, die Relation (0.4.93) zu beweisen, da für jede nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\inf A = -\sup(-A). \tag{0.4.95}$$

1. *Behauptung:* $\sup_{i \in I} \sup A_i \leq \sup A$.

Dies folgt sofort aus (i).

2. *Behauptung:* $\sup A \leq \sup_{i \in I} \sup A_i$.

Zum Beweis dieser Ungleichung unterscheiden wir zwei Fälle:

(a) $\sup A = \infty$.

Dann existiert eine Folge $x_n \in A$, so daß $x_n \geq n$. Jedes x_n liegt in einem $A_{i(n)}$, d.h. $\sup A_{i(n)} \geq n$ und somit

$$\sup_{i \in I} \sup A_i = \infty. \tag{0.4.96}$$

(b) $b = \sup A < \infty$.

Dann gibt es nach Lemma 0.4.37 zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in A$, so daß

$$b - \frac{1}{n} < x_n \leq b. \tag{0.4.97}$$

Jedes x_n liegt in einem $A_{i(n)}$, d.h.

$$b \leq x_n + \frac{1}{n} \leq \sup A_{i(n)} + \frac{1}{n} \leq \sup_{i \in I} \sup A_i + \frac{1}{n}, \tag{0.4.98}$$

woraus $b \leq \sup_{i \in I} \sup A_i$ folgt. $\square$

0.4.41. Definition. (i) Sei $\emptyset \neq A$ eine beliebige Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt nach *oben* (*unten*) *beschränkt* bzw. *unbeschränkt*, wenn dies auf $f(A)$ zutrifft. Wir schreiben

$$\sup f(A) = \sup_{x \in A} f(x) \tag{0.4.99}$$

und

$$\inf f(A) = \inf_{x \in A} f(x). \tag{0.4.100}$$

(ii) Sei A eine nichtleere Menge und $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Funktionen $f_i : A \to \mathbb{R}$, so daß

$$\sup_{i \in I} f_i(x) < \infty \quad \forall\, x \in A, \tag{0.4.101}$$

so definieren wir $\sup_{i \in I} f_i : A \to \mathbb{R}$ durch

$$(\sup_{i \in I} f_i)(x) = \sup_{i \in I} f_i(x). \tag{0.4.102}$$

Entsprechend definieren $\inf_{i \in I} f_i$, falls

$$\inf_{i \in I} f_i(x) > -\infty \quad \forall\, x \in A. \tag{0.4.103}$$

Ist $I = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Indexmenge, so benutzen wir oft die Notation $\max(f_1, \ldots, f_n)$ bzw. $\min(f_1, \ldots, f_n)$ statt $\sup_{i \in I} f_i$ bzw. $\inf_{i \in I} f_i$.

0.4.42. Aufgaben.

1 Sei E eine Menge, die n Elemente enthält, dann enthält $\mathcal{P}(E)$ 2^n Elemente.

2 Sei $A = \{1, \ldots, n\}$ und $P_n = \{\,\pi\colon \pi \text{ bildet } A \text{ bijektiv in sich ab}\,\}$ die Menge aller *Permutationen* von A. Zeigen Sie, daß $\operatorname{card} P_n = n!$ ist.

3 Definieren Sie bitte innerhalb der rellen Zahlen rekursiv

(i) $\sum_{k=1}^n x_k$

(ii) $\prod_{k=1}^n x_k$

(iii) x^n

und weisen Sie nach, daß Summe und Produkt *kommutativ* sind, d.h. von der Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren unabhängig.

4 Man leite aus den Axiomen her

(i) $\prod_{i=1}^n x_i = 0 \iff \exists_i\, x_i = 0.$

(ii) $xy < 0 \iff x > 0 \wedge y < 0$ oder umgekehrt.

5 Man beweise Bemerkung 0.4.5.

6 Man beweise Lemma 0.4.11.

7 Man beweise Ziffer 0.4.22 und Ziffer 0.4.23.

8 Man beweise Bemerkung 0.4.26.

9 Man beweise Proposition 0.4.28.

10 Man beweise Proposition 0.4.30.

11 Man beweise Proposition 0.4.31 und Bemerkung 0.4.32.

12 Man zeige, daß für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, gilt: $m!(n-m)!$ teilt $n!$.
Hinweis: $(n+1)! = n!(n+1-m) + n!m$.

13 Definieren Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$ durch

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!}, & m \leq n, \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

Es gilt dann

(i) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$,

(ii) $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$, $\qquad 1 \leq m \leq n$,

(iii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

(iv) $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$.

14 Man beweise die verallgemeinerte binomische Formel (0.4.87).

15 Bezeichne als *Abstand* zweier reeller Zahlen den Ausdruck $d(x, y) = |x-y|$. Man leite dann die sog. *Dreiecksungleichung*

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$$

her.

16 Sei $\epsilon > 0$, dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$xy \leq \frac{\epsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\epsilon}y^2.$$

17 Man beweise per Induktion die sog. *Bernouillesche Ungleichung*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

falls $x > -1$.

KAPITEL 1

Konvergenz

1.1. Konvergenz in $\mathbb{R}$

Die Zahlenfolge $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, konvergiert nach Null, d.h. die Werte $|x_n|$ werden mit wachsendem n immer kleiner, oder liegen „beliebig nahe“ bei Null. Um diesen Begriff „beliebig nahe“ genauer zu fassen, wollen wir die ϵ-Umgebung einer reellen Zahl a definieren.

1.1.1. Definition. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Unter der ϵ-Umgebung von a, $B_\epsilon(a)$, verstehen wir

$$B_\epsilon(a) = \{\, x \in \mathbb{R} \colon |x - a| < \epsilon \,\}. \tag{1.1.1}$$

Die Bezeichnung $B_\epsilon(a)$ kommt vom englischen Wort „ball“ für „Kugel“, d.h. $B_\epsilon(a)$ ist eine Kugel vom Radius ϵ um a. Sinn macht diese Sprechweise natürlich nur in höheren Dimensionen: im $\mathbb{R}^n$ werden ϵ-Umgebungen eines Punktes völlig analog definiert; doch wollen wir diese Bezeichnungsweise auch auf der reellen Achse einführen, wo Kugeln lediglich Intervalle sind.

1.1.2. Definition (Konvergenz einer Folge)**.** Eine (reelle) Folge (x_n) *konvergiert* nach a, falls in jeder ϵ-Umgebung von a fast alle Folgenglieder von (x_n) liegen; „fast alle“ (f.a.) heißt dabei „abgesehen von endlich vielen“ Folgengliedern.

Die Definition können wir auch so fassen:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\quad n \geq n_0 \implies x_n \in B_\epsilon(a) \tag{1.1.2}$$

oder

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\quad |x_n - a| < \epsilon. \tag{1.1.3}$$

a heißt *Limes* oder *Grenzwert* der Folge (x_n), in Zeichen,

$$a = \lim x_n = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{1.1.4}$$

1.1.3. Proposition. (i) *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

(ii) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. „(i)“ Gelte $x_n \to a$ und $x_n \to b$. Dann folgt aus der *Dreiecksungleichung*, vgl. Aufgabe 15 auf Seite 49 von Aufgaben 0.4.42,

$$|a-b| \le |a-x_n| + |x_n - b|. \tag{1.1.5}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig, dann existiert $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$|x_n - a| < \epsilon \quad \text{und} \quad |x_n - b| < \epsilon \quad \forall\, n \ge n_0. \tag{1.1.6}$$

Genau genommen existieren zunächst n_1, n_2, so daß

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \epsilon \qquad \forall\, n \ge n_1, \\ |x_n - b| &< \epsilon \qquad \forall\, n \ge n_2. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Wähle dann $n_0 = \max(n_1, n_2)$.

Aus (1.1.6) folgt daher

$$|a-b| \le |x_{n_0} - a| + |x_{n_0} - b| < 2\epsilon. \tag{1.1.8}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, bedeutet das $a = b$, denn sonst wähle $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$ und erhalte einen Widerspruch.

„(ii)“ Sei $a = \lim x_n$. Wähle $\epsilon = 1$, dann existiert n_0, so daß

$$|a - x_n| \le 1 \qquad \forall\, n \ge n_0 \tag{1.1.9}$$

oder

$$|x_n| \le |a| + 1 \qquad \forall\, n \ge n_0. \tag{1.1.10}$$

Folglich ist

$$|x_n| \le \max(|a|+1, \max_{0 \le i \le n_0} |x_i|). \tag{1.1.11}$$

$\square$

1.1.4. Proposition. *Seien $(x_n), (y_n)$ konvergente Zahlenfolgen, $x_n \to a$, $y_n \to b$, so konvergieren auch $(x_n + y_n)$ und $(x_n\, y_n)$ und es gilt*

$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n, \tag{i}$$

$$\lim(x_n\, y_n) = \lim x_n \, \lim y_n. \tag{ii}$$

Beweis. (i) Wir benutzen die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - (a+b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\le |x_n - a| + |y_n - b|. \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann existiert n_0, so daß

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\, n \ge n_0, \tag{1.1.13}$$

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\, n \ge n_0, \tag{1.1.14}$$

und damit

$$|x_n + y_n - (a+b)| < \epsilon \qquad \forall\, n \ge n_0, \tag{1.1.15}$$

d.h.

$$\lim(x_n + y_n) = a + b. \tag{1.1.16}$$

(ii) Als konvergente Folgen sind $(x_n), (y_n)$ beschränkt, d.h. es gibt $c > 0$, so daß

$$\max(|x_n|, |y_n|) \le c \qquad \forall\, n. \tag{1.1.17}$$

Aus der algebraischen Identität

$$ab - x_n y_n = (a - x_n)b + x_n(b - y_n) \tag{1.1.18}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} |ab - x_n y_n| &\le |a - x_n||b| + |x_n||b - y_n| \\ &\le |b||a - x_n| + c|b - y_n|. \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben, so existiert n_0, so daß

$$|a - x_n| < \frac{\epsilon}{|b| + c} \qquad \forall\, n \ge n_0, \tag{1.1.20}$$

$$|b - y_n| < \frac{\epsilon}{|b| + c} \qquad \forall\, n \ge n_0 \tag{1.1.21}$$

und damit

$$|ab - x_n y_n| < \epsilon \qquad \forall\, n \ge n_0. \tag{1.1.22}$$

□

1.1.5. Bemerkung. Sei (x_n) eine Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent

(i) $$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0}{\exists}\ \underset{n\ge n_0}{\forall}\ |x_n - a| < \epsilon$$

(ii) $$\underset{c>0}{\exists}\ \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0}{\exists}\ \underset{n\ge n_0}{\forall}\ |x_n - a| < c\,\epsilon$$

Beweis. Dies liegt an der Beliebigkeit von ϵ.

1. (ii) $\Longrightarrow$ (i):

Sei $\epsilon' > 0$ beliebig, gebe in (ii) $\epsilon = c^{-1}\epsilon'$ vor und wähle n_0 so, daß

(1.1.23) $$|x_n - a| < c\,\epsilon = \epsilon' \qquad \forall\, n \ge n_0.$$

2. (i) $\Longrightarrow$ (ii):

Klar, wähle $c = 1$. □

Es genügt daher, wenn wir die Konvergenz einer Folge nachweisen wollen, die formal allgemeinere Bedingung (ii) zu verifizieren.

1.1.6. Proposition.

(i) $$x_n \to a \implies |x_n| \to |a|$$

(ii) $$0 \ne x_n \to a \ne 0 \implies x_n^{-1} \to a^{-1}$$

Beweis. (i) Zum Beweis der ersten Aussage verwenden wir die Ungleichung

(1.1.24) $$\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a|,$$

die unmittelbar aus der Dreiecksungleichung folgt, vgl. Aufgabe 15 auf Seite 49 von Aufgaben 0.4.42.

(ii) (a) Wir zeigen zunächst, daß

(1.1.25) $$|x_n^{-1}| \le \text{const} \qquad \forall\, n.$$

Es existiert n_0, so daß

(1.1.26) $$\big||x_n| - |a|\big| \le \frac{|a|}{2}$$

und somit

(1.1.27) $$|x_n| \ge |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} \qquad \forall\, n \ge n_0,$$

d.h.

$$|x_n|^{-1} \leq \frac{2}{|a|} \qquad \forall\, n \geq n_0 \tag{1.1.28}$$

und daher

$$|x_n|^{-1} \leq \max\Big(\frac{2}{|a|}, \max_{0\leq i\leq n_0} |x_i|^{-1}\Big) \qquad \forall\, n. \tag{1.1.29}$$

(b) Aus

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - x_n}{x_n\, a} \tag{1.1.30}$$

erhalten wir

$$\Big|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\Big| \leq c\,|a - x_n| \qquad \forall\, n. \tag{1.1.31}$$

□

1.1.7. Beispiele. (i) Die Folge

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ ungerade} \\ 2, & n \text{ gerade} \end{cases} \tag{1.1.32}$$

konvergiert nicht, enthält aber zwei konvergente Teilfolgen.

(ii) Die Folge $x_n = n$ enthält keine konvergente Teilfolge.

Monotone Folgen

1.1.8. Definition. Eine Folge reeller Zahlen (x_n) heißt *monoton wachsend* bzw. *fallend*, in Zeichen $(x_n) \nearrow$ bzw. $(x_n) \searrow$, wenn

$$x_n \leq x_{n+1} \qquad \forall\, n \tag{1.1.33}$$

bzw.

$$x_n \geq x_{n+1} \qquad \forall\, n. \tag{1.1.34}$$

1.1.9. Proposition. *Jede monotone, beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.*

Beweis. O.B.d.A. sei $(x_n) \nearrow$. Da (x_n) beschränkt ist, existiert $\gamma = \sup_n x_n$.

Behauptung: $\gamma = \lim x_n$

Sei $\epsilon > 0$, dann finden wir nach Lemma 0.4.37 n_0, so daß

$$\gamma - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \qquad \forall\, n \geq n_0 \tag{1.1.35}$$

und somit

$$\gamma - \epsilon < x_n \leq \gamma \qquad \forall\, n \geq n_0. \tag{1.1.36}$$

□

1.1.10. Beispiele. 1. Sei $0 < a < 1$, dann konvergiert $x_n = a^n$ monoton fallend nach 0.

2. Die Folge $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist monoton wachsend, $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ monoton fallend und es gilt $x_n \leq y_n$. Daher ist

$$\lim x_n = \lim y_n. \tag{1.1.37}$$

Wir werden später sehen, daß der gemeinsame Limes der *Eulerschen Zahl* e entspricht.

Beweis. Wir werden nur das zweite Beispiel beweisen, das erste ist Übungsaufgabe.

Wir verwenden die sog. *Bernouillesche Ungleichung*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{1.1.38}$$

falls $x > -1$, die man per Induktion beweist, vgl. Aufgabe 17 auf Seite 49 von Aufgaben 0.4.42, und erhalten für $n \geq 2$

$$\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)^n > 1 - \frac{1}{n}, \tag{1.1.39}$$

$$\Big(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\Big)^n > \Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big)^n > 1 + \frac{1}{n}. \tag{1.1.40}$$

Ferner ist

$$1 + \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{n^2}{n^2 - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n})}. \tag{1.1.41}$$

Wir schließen dann weiter

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n} \tag{1.1.42}$$

wegen (1.1.39) und

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}>1+\frac{1}{n} \tag{1.1.43}$$

wegen (1.1.40) und (1.1.41).

Aus (1.1.42) folgt nun

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-(n-1)}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \tag{1.1.44}$$

und aus (1.1.43)

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{1.1.45}$$

Damit ist alles bewiesen. □

1.1.11. Definition (Häufungspunkt)**.** a heißt *Häufungspunkt* (HP) von x_n, wenn in jeder ϵ-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

1.1.12. Beispiele. (i) Konvergiert x_n nach a, dann ist a HP von x_n.

(ii) Gelte $a=\lim x_n$ und $b=\lim y_n$, dann besitzt die Folge

$$z_n=\begin{cases}x_n, & n \text{ gerade}\\ y_n, & n \text{ ungerade}\end{cases} \tag{1.1.46}$$

die beiden HP a,b.

(iii) Sei (x_n) eine Abzählung von $\mathbb{Q}$, dann ist jede reelle Zahl HP von (x_n) nach Theorem 0.4.29.

1.1.13. Proposition. *a ist genau dann Häufungspunkt von (x_n), wenn eine Teilfolge der (x_n) nach a konvergiert.*

Beweis. (i) Wenn eine Teilfolge nach a konvergiert, dann ist a sicherlich HP.

(ii) Sei a HP. Wenn dann unendlich viele Folgenglieder existieren, die mit a übereinstimmen, so definieren diese eine nach a konvergierende Teilfolge. Andernfalls, wenn fast alle Folgenglieder von a verschieden sind, definieren wir induktiv eine Teilfolge:

1. Setze $r_1=1$, wähle n_1 minimal, so daß $a\neq x_{n_1}\in B_{r_1}(a)$.

2. Setze $r_2 = \frac{|a-x_{n_1}|}{2}$ und wähle n_2 minimal, so daß $a \neq x_{n_2} \in B_{r_2}(a)$. Dann folgt
$$n_2 > n_1 \quad \text{und} \quad r_2 \leq 2^{-1}.$$
3. Seien für $k \geq 2$, $r_k = \frac{|a-x_{n_{k-1}}|}{2}$ und $a \neq x_{n_k} \in B_{r_k}(a)$ schon definiert mit der Eigenschaft, daß n_k minimal ist und gelte ferner
$$n_k > n_{k-1} \quad \text{und} \quad r_k \leq 2^{-k},$$
dann setze $r_{k+1} = \frac{|a-x_{n_k}|}{2}$ und wähle n_{k+1} minimal, so daß $a \neq x_{n_{k+1}} \in B_{r_{k+1}}(a)$. Es gilt dann
$$n_{k+1} > n_k \quad \text{und} \quad r_{k+1} < \frac{r_k}{2} \leq 2^{-(k+1)}.$$

□

1.1.14. Bemerkung. Eine *hinreichende* Bedingung, die gewährleistet, daß a Häufungspunkt einer Folge ist, lautet: In jeder ϵ-Umgebung von a liegt ein von a verschiedenes Folgenglied.

Beweis. Der Beweis ist identisch mit dem des vorangehenden Lemmas, Teil (ii). □

1.1.15. Theorem (Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sei (x_n) eine beschränkte Folge und gelte $a_0 \leq x_n \leq b_0$ für alle n. Wir verwenden jetzt ähnlich wie beim Beweis von Theorem 0.4.35 die Halbierungsmethode, um eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$, $I_{n+1} \subset I_n$, zu finden, so daß in jedem Intervall unendlich viele Folgenglieder liegen und die Intervallänge nach 0 konvergiert. Bei jedem Halbierungsschritt erfolgt die Auswahl des Teilintervalls nach der Bedingung, daß unendlich viele Folgenglieder in dem Intervall liegen müssen; enthalten beide Teilintervalle unendlich viele Folgenglieder, so wählen wir das rechte.

Nach (IV.1) existiert $a \in \bigcap_n I_n$; a ist ein Häufungspunkt von (x_n), wie man sofort verifiziert. □

1.1.16. Proposition. *Die Menge M der Häufungspunkte einer nach oben (unten) beschränkten Folge sei nichtleer. Dann besitzt M ein Maximum (Minimum).*

Beweis. Wir führen den Beweis nur für nach oben beschränkte Folgen. Gelte also $x_n \leq c \ \forall \ n$. Sei $a \in M$, dann existiert eine Teilfolge, die nach a konvergiert und wir schließen $a \leq c$, vgl. das nachfolgende Lemma. M ist daher nach oben beschränkt und es existiert $\gamma = \sup M$ nach Theorem 0.4.35.

Behauptung: $\gamma \in M$.

Zu $k \in \mathbb{N}^*$ wähle $a_k \in M$, so daß

$$\gamma - \frac{1}{k} < a_k, \qquad \text{(vgl. Lemma 0.4.37)} \tag{1.1.47}$$

und x_{n_k} mit

$$|a_k - x_{n_k}| < \frac{1}{k}, \qquad \text{(wobei } n_k < n_{k+1}\text{)} \tag{1.1.48}$$

und wir folgern

$$|\gamma - x_{n_k}| \le |\gamma - a_k| + |a_k - x_{n_k}| < \frac{2}{k}. \tag{1.1.49}$$

d.h. die Teilfolge x_{n_k} konvergiert nach γ. □

1.1.17. Lemma. *Gelte $x_n \to a$ und $x_n \le c \;\forall\, n$, dann folgt $a \le c$.*

Beweis. Übungsaufgabe.

1.1.18. Definition. Wir definieren für beschränkte Folgen (x_n) den *Limes superior* bzw. den *Limes inferior* durch

$$\overline{\lim}\, x_n = \sup M \qquad \text{(Limes superior)} \tag{1.1.50}$$

$$\underline{\lim}\, x_n = \inf M \qquad \text{(Limes inferior)} \tag{1.1.51}$$

wobei M die Menge der Häufungspunkte von (x_n) ist, d.h. sie sind der größte bzw. der kleinste Häufungspunkt von (x_n).

Manchmal bezeichnen wir den Limes superior bzw. den Limes inferior auch mit $\limsup x_n$ bzw. $\liminf x_n$.

1.1.19. Proposition. *Eine beschränkte Zahlenfolge (x_n) ist genau dann konvergent, wenn*

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n. \tag{1.1.52}$$

Beweis. (i) Konvergente Folgen besitzen nur einen HP, so daß (1.1.52) richtig ist.

(ii) Den umgekehrten Schluß führen wir mittels eines Widerspruchbeweises. Sei $a = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. Wäre a nicht der Limes, so existiert $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge x_{n_k} mit

$$x_{n_k} \notin B_\epsilon(a) \qquad \forall\, k. \tag{1.1.53}$$

Nach Bolzano-Weierstraß muß diese beschränkte Teilfolge einen HP besitzen, der dann a sein müßte; Widerspruch. □

1.1.20. Bemerkung. Den vorstehenden Satz kann man auch so formulieren: Eine beschränkte Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn jede konvergente Teilfolge den gleichen Limes besitzt.

Beweis. Übungsaufgabe.

1.1.21. Definition (Cauchyfolge)**.** Eine Folge (x_n) heißt *Cauchyfolge* (C.F.), wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt, so daß

$$|x_n - x_m| < \epsilon \qquad \forall\, n, m \geq n_0 \qquad \text{(Cauchykriterium)}. \tag{1.1.54}$$

Eine äquivalente Formulierung von (1.1.54) ist

$$|x_{n+k} - x_n| < \epsilon \qquad \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1.1.55}$$

1.1.22. Theorem. *Eine Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Beweis. (i) Sei (x_n) konvergent, $x_n \to a$. Sei $\epsilon > 0$, dann existiert n_0, so daß

$$|x_n - a| < \epsilon \qquad \forall\, n \geq n_0. \tag{1.1.56}$$

Für $n, m \geq n_0$ gilt daher

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < 2\epsilon, \tag{1.1.57}$$

d.h. (x_n) ist C.F..

(ii) Sei (x_n) C.F..

(a) Wir zeigen zunächst, daß jede C.F. beschränkt ist. Wähle $\epsilon = 1$, dann existiert n_0, so daß

$$|x_n - x_{n_0}| < 1 \qquad \forall\, n \geq n_0 \tag{1.1.58}$$

und daher

$$|x_n| < 1 + |x_{n_0}| \qquad \forall\, n \geq n_0. \tag{1.1.59}$$

(b) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert somit ein HP a, aber eine C.F. besitzt höchstens einen HP, d.h. $\underline{\lim}\, x_n = a = \overline{\lim}\, x_n$, woraus die Behauptung nach Proposition 1.1.19 folgt. □

1.1.23. Bemerkung. Die Tatsache, daß jede Cauchyfolge reeller Zahlen konvergiert, ist äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom (IV).

Beweis. Übungsaufgabe.

1.1.24. Beispiele. 1. Die induktiv definierte Folge

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \tag{1.1.60}$$

ist eine C.F., denn für alle n gilt

$$0 \le x_n, \quad x_n \le 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \le x_n. \tag{1.1.61}$$

Daher läßt sich

$$\begin{aligned} x_{n+1+k} - x_{n+1} &= \frac{1}{1+x_{n+k}} - \frac{1}{1+x_n} \\ &= \frac{x_n - x_{n+k}}{(1+x_n)\,(1+x_{n+k})} \end{aligned} \tag{1.1.62}$$

abschätzen durch

$$|x_{n+1+k} - x_{n+1}| \le \frac{4}{9}\,|x_{n+k} - x_n|. \tag{1.1.63}$$

Diese Ungleichung hat die Form

$$\varphi(n+1) \le a\,\varphi(n), \quad 0 < a < 1, \quad \varphi \ge 0, \tag{1.1.64}$$

woraus wir sofort per Induktion schließen

$$\varphi(n) \le a^n\,\varphi(0) \quad \forall\, n, \tag{1.1.65}$$

d.h. $\varphi(n) \to 0$. Daher ist (x_n) eine C.F.. Der Limes a genügt der Gleichung

$$a = \frac{1}{1+a} \tag{1.1.66}$$

oder

$$a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \tag{1.1.67}$$

2. Ganz analog zeigt man, daß die Folge

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1+x_n} \tag{1.1.68}$$

nach $\sqrt{2}$ konvergiert; Übungsaufgabe.

1.1.25. Proposition. *Es gilt*

$$x_n \to a \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to a. \tag{1.1.69}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

1.1.26. Aufgaben.

1 Man beweise Lemma 1.1.17.

2 Man beweise Bemerkung 1.1.20.

3 Man beweise Bemerkung 1.1.23.

4 Man verifiziere das zweite Beispiel von Beispiele 1.1.24.

5 Man beweise Proposition 1.1.25.

6 Sei (x_n) eine Folge von nicht-negativen Zahlen, die nach 0 konvergiert. Man zeige, daß dann eine unendliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$x_n \geq x_m \quad \forall m \geq n, \quad n, m \in I.$$

7 Sei (x_n) eine Folge mit der Eigenschaft, daß die Teilfolgen $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ und (x_{3n}) konvergieren, dann konvergiert (x_n).

1.2. Unendliche Reihen in $\mathbb{R}$

1.2.1. Definition. Eine (unendliche) Reihe in $\mathbb{R}$ besteht aus zwei Folgen (a_n), den Gliedern der Reihe, und (s_n), der Folge der *Partialsummen*, die durch die Beziehung

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{1.2.1}$$

miteinander verknüpft sind.

Existiert $\lim s_n$, so bezeichnen wir den Limes als Wert oder Summe der Reihe und schreiben dafür

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum a_n = \lim s_n. \tag{1.2.2}$$

Die Reihe heißt dann *konvergent* im anderen Falle *divergent.*

Eine Reihe mit Gliedern a_n wollen wir auch mit dem Symbol $((a_n))$ abkürzen.

Wird das erste Glied einer Reihe nicht mit $n = 0$ indiziert, sondern mit $n_0 > 0$, so deuten wir dies gelegentlich an durch $((a_n))_{n \geq n_0}$, um Mißverständnisse auszuschließen.

1.2.2. Beispiel (Die geometrische Reihe)**.** Sei $-1 < q < 1$, dann ist die Reihe $((q^n))$ konvergent mit Limes $\frac{1}{1-q}$.

Beweis. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{1.2.3}$$

Lasse dann $n \to \infty$. □

Das Cauchykriterium für Folgen, angewandt auf die Partialsummen, liefert ein entsprechendes Cauchykriterium für Reihen

1.2.3. Proposition. *Die Reihe* $((a_n))$ *ist genau dann konvergent, wenn zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* n_0 *existiert, so daß*

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| < \epsilon \qquad \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{1.2.4}$$

1.2.4. Corollar. *Notwendig für die Konvergenz der Reihe* $((a_n))$ *ist, daß* $a_n \to 0$.

Beweis. Wähle in (1.2.4) $m = 0$. □

1.2.5. Beispiele. (i) Die Reihe $(((-1)^n))$ ist daher divergent.

(ii) Die sog. *harmonische* Reihe $((\frac{1}{n}))$ erfüllt zwar die notwendige Bedingung (1.2.4), ist aber ebenfalls divergent, da

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n\,\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

so daß das Cauchykriterium verletzt ist.

1.2.6. Bemerkung. Aus den Definitionen folgt unmittelbar

(i) Seien $((a_n)), ((b_n))$ konvergente Reihen, dann ist auch $((a_n + b_n))$ konvergent und es gilt

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n. \tag{1.2.5}$$

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $((a_n))$ konvergent, dann ist auch $((\lambda a_n))$ konvergent und

$$\sum (\lambda a_n) = \lambda \sum a_n. \tag{1.2.6}$$

Die konvergenten Reihen bilden daher einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn man Addition und Multiplikation mit einem Skalar gliedweise definiert.

(iii) Für die Konvergenz einer Reihe $((a_n))$ ist nur maßgebend, daß die Endstücke $((a_n))_{n\geq k}, k$ groß, konvergieren.

Im folgenden wollen wir zunächst Reihen mit nicht-negativen Gliedern betrachten.

1.2.7. Proposition. *Sei $((a_n))$ eine Reihe mit $a_n \in \mathbb{R}_+$. Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.*

Beweis. Die Folge

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{1.2.7}$$

ist eine monoton wachsende Folge von nicht-negativen Zahlen. Ist sie unbeschränkt, so kann sie nicht konvergieren, und ist sie beschränkt, so konvergiert sie nach $\sup_n s_n$. □

1.2.8. Proposition (Majorantenkriterium)**.** *Seien $((a_n))$, $((b_n))$ zwei Reihen in $\mathbb{R}_+$. Wenn dann $((b_n))$ konvergiert und wenn $a_n \leq b_n$ für alle n (oder auch nur für f.a. n), dann konvergiert auch $((a_n))$.*

$((b_n))$ heißt konvergente Majorante von $((a_n))$.

Beweis. O.B.d.A. wollen wir annehmen, daß

$$a_n \leq b_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.8}$$

Bezeichnen wir mit s_n die Partialsummen von $((a_n))$ und mit s'_n die von $((b_n))$, so folgt

$$s_n \leq s'_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.9}$$

Aus Proposition 1.2.7 folgt dann die Behauptung. □

1.2.9. Beispiel. Die Reihe $((\frac{1}{(\log n)^n}))_{n\geq 2}$ ist konvergent, denn für $n \geq 9$ gilt

$$\frac{1}{\log n} \leq \frac{1}{2} \tag{1.2.10}$$

und die geometrische Reihe $((2^{-n}))$ ist Majorante.

1.2.10. Proposition (Quotientenkriterium). *Sei* $((a_n))$ *eine Reihe in* $\mathbb{R}_+$ *und gelte*

$$\gamma = \overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \tag{1.2.11}$$

dann konvergiert die Reihe.

Beweis. Wähle c mit $\gamma < c < 1$, dann gilt für f.a. n

$$a_{n+1} \leq c\, a_n \tag{1.2.12}$$

O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß (1.2.12) für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist und schließen hieraus per Induktion

$$a_n \leq c^n\, a_0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.13}$$

Damit haben wir eine geometrische Reihe als konvergente Majorante gefunden. □

1.2.11. Beispiele. (i) Die Reihe $((a_n)) = ((\frac{1}{n!}))$ ist konvergent, denn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall\, n \geq 1.$$

(ii) Ein analoger Schluß zeigt, daß die Reihe $((\frac{x^n}{n!}))$, $x \in \mathbb{R}_+$, konvergent ist.

Wir bezeichnen ihre Summe mit $\exp x$,

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(iii) Die Reihe $((a_n)) = ((\frac{n}{q^n}))$, $q > 1$, ist konvergent, denn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{q}\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{q}(1 + \frac{1}{n}) \to \frac{1}{q} < 1.$$

Insbesondere folgt hieraus $\lim \frac{n}{q^n} = 0$.

Als nächstes Kriterium wollen wir das sog. *Integralkriterium* einführen. Zwar haben wir Integrationstheorie noch nicht behandelt, doch dürfte die Integration einer stetigen reellen Funktion allgemein bekannt sein. Wir stellen zur Erinnerung die wichtigsten Regeln im folgenden Lemma zusammen.

1.2.12. Lemma. *Sei $I = [a, b]$ ein beschränktes Intervall und f, g stetige reellwertige Funktionen auf I. Dann gilt*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \tag{1.2.14}$$

$$f \le g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \le \int_a^b g \tag{1.2.15}$$

$$f = \text{const} = c \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f = c\,(b-a) \tag{1.2.16}$$

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f = \int_a^b f \tag{1.2.17}$$

1.2.13. Proposition (Integralkriterium)**.** *Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine stetige, monoton fallende Funktion und nehme an, daß das Integral*

$$\int_0^\infty f = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f \tag{1.2.18}$$

existiert, dann konvergiert die Reihe $((f(n)))$. Ist andererseits der Wert des Integrals unendlich, so divergiert die Reihe.

Beweis. (i) Für alle $n \ge 1$ gilt

$$f(n) \le \int_{n-1}^n f, \tag{1.2.19}$$

da f monoton fällt, so daß nach (1.2.17)

$$\sum_{i=1}^n f(i) \le \int_0^n f \le \int_0^\infty f. \tag{1.2.20}$$

Die Folge der Partialsummen ist somit beschränkt und die Reihe konvergent.

(ii) Ist $\int_0^\infty f = \infty$, so schließen wir aus

$$f(n) \ge \int_n^{n+1} f \qquad \text{(wegen (1.2.15), (1.2.16))}, \tag{1.2.21}$$

daß die Folge der Partialsummen

$$\sum_{i=0}^n f(i) \ge \sum_{i=0}^n \int_i^{i+1} f = \int_0^{n+1} f \tag{1.2.22}$$

unbeschränkt ist. □

1.2.14. Bemerkung. Im Integralkriterium können wir auf die Bedingung „f stetig“ verzichten, da, wie wir später sehen werden, monotone Funktionen integrierbar sind.

1.2.15. Corollar. (i) $((\frac{1}{n^{1+\epsilon}}))$ *ist konvergent für alle* $\epsilon > 0$.

(ii) $((\frac{1}{n}))$ *ist divergent.*

Beweis. (i) Setze $f(x) = \frac{1}{x^{1+\epsilon}}$, dann ist f monoton fallend und

$$\int_1^b f = -\frac{1}{\epsilon}x^{-\epsilon}\Big|_1^b = \frac{1}{\epsilon}(1 - b^{-\epsilon}) \to \frac{1}{\epsilon}. \tag{1.2.23}$$

(ii) Setze $f(x) = \frac{1}{x}$, dann ist f monoton fallend und

$$\int_1^b f = \log b \to \infty. \tag{1.2.24}$$

□

1.2.16. Proposition (Wurzelkriterium)**.** *Sei* $((a_n))$ *eine Reihe in* $\mathbb{R}_+$ *und nehme an, daß*

$$\gamma = \overline{\lim}\, a_n^{\frac{1}{n}} < 1. \tag{1.2.25}$$

Dann konvergiert $((a_n))$.

Beweis. Wähle c, $\gamma < c < 1$, dann folgt aus (1.2.25)

$$a_n \le c^n \qquad \text{f.f.a. } n, \tag{1.2.26}$$

d.h. $((a_n))$ besitzt eine geometrische Reihe als konvergente Majorante. □

1.2.17. Bemerkung. Quotienten- und Wurzelkriterium sind nur hinreichende Kriterien. Zwar kann man, wenn

$$\underset{n_0}{\exists} \underset{n \ge n_0}{\forall} \quad a_n > 0 \;\wedge\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1, \tag{1.2.27}$$

oder wenn

$$\overline{\lim}\, a_n^{\frac{1}{n}} > 1 \tag{1.2.28}$$

auf die Divergenz der Reihe $((a_n))$, $a_n \in \mathbb{R}_+$, schließen, doch im Falle

$$\overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \tag{1.2.29}$$

bzw.

$$\overline{\lim}\, a_n^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{1.2.30}$$

läßt sich keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz machen.

Beweis. (i) Aus

$$a_{n+1} \geq a_n \qquad \forall\, n \geq n_0 \tag{1.2.31}$$

schließen wir per Induktion

$$a_n \geq a_{n_0} \qquad \forall\, n \geq n_0, \tag{1.2.32}$$

d.h. (a_n) konvergiert nicht nach 0.

(ii) Wenn (1.2.28) zutrifft, so konvergiert (a_n) ebenfalls nicht nach 0.

(iii) Für die Reihen $((\frac{1}{n}))$ und $((\frac{1}{n^2}))$ treffen die Bedingungen (1.2.29) und (1.2.30) zu, doch während die harmonische Reihe divergiert, konvergiert $((\frac{1}{n^2}))$. □

1.2.18. Beispiel. Definiere

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n = 2^k \\ 2\,(2^{-k})^2, & n-1 = 2^k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.2.33}$$

so konvergiert die Reihe $((a_n))$ und es gilt

$$\overline{\lim_{a_n \neq 0}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2. \tag{1.2.34}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

1.2.19. Definition. Eine Reihe $((a_n))$ in $\mathbb{R}$ heißt *absolut konvergent*, wenn $((|a_n|))$ konvergiert und *bedingt konvergent*, wenn die Reihe zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

1.2.20. Proposition. *Eine absolut konvergente Reihe $((a_n))$ in $\mathbb{R}$ ist konvergent und es gilt die Dreiecksungleichung*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|. \tag{1.2.35}$$

Beweis. (i) Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, genügt es nachzuweisen, daß die Folge der Partialsummen eine C.F. ist, vgl. Theorem 1.1.22.

Sei $\epsilon > 0$, dann existiert n_0, so daß

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \epsilon \qquad \text{(nach Proposition 1.2.3)}, \tag{1.2.36}$$

da $((|a_n|))$ konvergiert. Wähle nun $n, m \geq n_0$ und nehme o.B.d.A. an, daß $n > m$, so folgt

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon, \tag{1.2.37}$$

wegen (1.2.36).

(ii) Die Dreiecksungleichung folgt unmittelbar aus der entsprechenden Ungleichung für die Partialsummen. $\square$

1.2.21. Bemerkung. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die sog. *Potenzreihe* $((a_n x^n))$, $a_n, x \in \mathbb{R}$, absolut, falls

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}} \tag{1.2.38}$$

und divergiert für

$$|x| > \frac{1}{\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}}. \tag{1.2.39}$$

Im Falle

$$|x| = \frac{1}{\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}} \tag{1.2.40}$$

kann beides eintreten, vgl. die Potenzreihe $((\frac{1}{n} x^n))_{n\geq 1}$, die für $x = 1$ divergiert und für $x = -1$ konvergiert, wie wir gleich sehen werden.

1.2.22. Definition. Sei $((a_n x^n))$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$, so nennt man die Terme a_n *Koeffizienten* der Potenzreihe und

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}} \tag{1.2.41}$$

heißt *Konvergenzradius.*

Eine wichtige Klasse von Reihen, die im allgemeinen nur bedingt konvergieren, sind die sog. *alternierenden* Reihen.

1.2.23. Definition (alternierende Reihen)**.** Eine Reihe $((a_n))$ in $\mathbb{R}$ heißt *alternierend*, falls

$$a_n a_{n+1} \leq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.42}$$

1.2.24. Proposition (Leibniz)**.** *Sei* $((a_n))$ *eine alternierende Reihe und nehme an, daß die Elemente* $|a_n|$ *eine monotone Nullfolge bilden, d.h.* $|a_n| \searrow 0$. *Dann konvergiert die Reihe, und es gilt*

$$\Big| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big| \leq |a_0|. \tag{1.2.43}$$

Beweis. Schreibe die Elemente der Reihe o.B.d.A. in der Form $(-1)^n a_n$, $a_n \geq 0$. Definiere $\tau_n = s_{2n}$ und $t_n = s_{2n+1}$, dann ist τ_n monoton fallend und t_n monoton wachsend, da

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} = s_{2(n+1)} &= s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \\ &\leq s_{2n} = \tau_n \end{aligned} \tag{1.2.44}$$

und

$$\begin{aligned} t_{n+1} = s_{2n+3} &= s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &\geq s_{2n+1} = t_n. \end{aligned} \tag{1.2.45}$$

Ferner gilt noch $t_n \leq \tau_n$, d.h. die Folgen t_n und τ_n konvergieren und es ist

$$\lim t_n = \lim \tau_n, \tag{1.2.46}$$

da

$$\tau_n - t_n = a_{2n+1} \to 0. \tag{1.2.47}$$

Damit konvergiert auch s_n.

Die Abschätzung (1.2.43) folgt aus

$$\begin{aligned} a_0 = \tau_0 \geq \lim \tau_n &= \lim t_n \geq t_0 \\ &= a_0 - a_1 \geq -a_1 \geq -a_0. \end{aligned} \tag{1.2.48}$$

□

1.2.25. Corollar. *Erfülle die alternierende Reihe* $((a_n))$ *die Voraussetzungen von Proposition* 1.2.24, *so gilt*

$$\Big| \sum_{n=k}^{\infty} a_n \Big| \leq |a_k| \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1.2.49}$$

Beweis. Lasse die Reihe erst mit dem Glied a_k beginnen. □

1.2.26. Beispiel (alternierende harmonische Reihe)**.** Im Gegensatz zur harmonischen Reihe $((\frac{1}{n}))$ konvergiert die Reihe $(((-1)^n \frac{1}{n}))$.

1.2.27. Aufgaben.

1 Man verifiziere Beispiel 1.2.18.

2 Sei $((a_n))$ eine divergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern, dann ist

(i) $((\frac{a_n}{1+a_n}))$ divergent,

(ii) $((\frac{a_n}{1+n^2 a_n}))$ konvergent.

3 Die Reihe $((\frac{(\log n)^n}{n!}))_{n\geq 1}$ konvergiert.

4 Wenn $((a_n^2))_{n\geq 1}$ konvergiert, dann auch $((\frac{a_n}{n}))_{n\geq 1}$.

5 Sei α eine reelle Zahl, so definieren wir die *Gaußklammer* durch

$$[\alpha] = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \colon n \leq \alpha \,\}$$

Sei nun $0 \leq \alpha < 1$ und $1 < g \in \mathbb{N}$, so definiere induktiv $\alpha_0 = 0$ und

$$a_i = \Big[g^i \Big(\alpha - \sum_{k=0}^{i-1} a_k g^{-k}\Big)\Big], \quad i \geq 1.$$

Dann gilt

(i) $0 \leq a_i < g$,

(ii) $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}$,

(iii) Die Reihendarstellung ist eindeutig, wenn f.a. $a_i \neq g - 1$.

6 Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Für welche reellen Zahlen x ist die Reihe $((a_n x^n))$ absolut konvergent und für welche divergent?

1.3. Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

Die Konvergenzbegriffe für Folgen und Reihen und auch der Satz von Bolzano-Weierstraß lassen sich sehr einfach auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen. Wir definieren zunächst das euklidische Skalarprodukt.

1.3.1. Definition (euklidisches Skalarprodukt)**.** Wir definieren für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^i)$, $y = (y^i)$ das sog. *euklidische Skalarprodukt* durch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i \tag{1.3.1}$$

und die *euklidische Norm*

$$|x| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2}. \tag{1.3.2}$$

1.3.2. Eigenschaften des euklidischen Skalarprodukts.

(i) $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine *Bilinearform*, d.h. es ist in jedem Argument linear.

(ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (Symmetrie)

(iii) $0 \leq \langle x, x\rangle \quad \wedge \quad 0 = \langle x, x\rangle \Longleftrightarrow x = 0$ (positive Definitheit)

Das euklidische Skalarprodukt ist also eine positiv definite, symmetrische Bilinearform. Wir übertragen diese Definition auf beliebige reelle Vektorräume.

1.3.3. Definition. (i) Sei E ein reeller Vektorraum. E heißt *Skalarproduktraum*, falls eine positiv definite, symmetrische Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ existiert. Die Bilinearform nennen wir *Skalarprodukt*.

(ii) Bezüglich eines Skalarprodukts definieren wir eine (Skalarprodukt) *Norm* auf E

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.3}$$

$\|\cdot\|$ ist eine Abbildung von $E \to \mathbb{R}_+$.

Im allgemeinen existieren viele Skalarprodukte auf einem reellen Vektorraum E, und wenn wir von E als Skalarproduktraum reden, so bedeutet das, daß ein bestimmtes Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zugrunde liegt, d.h. ein Skalarproduktraum ist ein Paar $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

In dem speziellen Fall $E = \mathbb{R}^n$, versehen mit dem euklidischen Skalarprodukt, bezeichnen wir die Norm mit $|\cdot|$ anstatt mit $\|\cdot\|$.

1.3.4. Proposition (Schwarzsche Ungleichung)**.** *Sei E ein Skalarproduktraum, dann gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \forall\, x, y \in E. \tag{1.3.4}$$

Beweis. (i) Beide Seiten der Ungleichung sind (positiv) *homogen* vom Grade 1, damit meinen wir, daß

$$|\langle \lambda x, \mu y\rangle| = \lambda\mu|\langle x, y\rangle| \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+ \tag{1.3.5}$$

und entsprechend

$$\|\lambda x\| = \lambda\|x\|, \qquad \|\mu y\| = \mu\|y\| \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+. \tag{1.3.6}$$

Offensichtlich können wir jeden Vektor $x \neq 0$ in der Form $x = \lambda\tilde{x}$ schreiben, wobei $\lambda > 0$ und $\tilde{x}$ ein sog. *Einheitsvektor* ist, d.h. $\|\tilde{x}\| = 1$. Daher dürfen wir zum Beweis der Schwarzschen Ungleichung o.B.d.A. annehmen, daß $\|x\| = \|y\| = 1$, denn die Ungleichung ist für $x = 0$ oder $y = 0$ sicherlich richtig.

(ii) Sei also $\|x\| = \|y\| = 1$. Wir wenden dann die binomische Formel auf die quadratische Form $\langle x - y, x - y\rangle$ an und erhalten

$$\begin{aligned} 0 \le \langle x - y, x - y\rangle &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle \\ &= 2 - 2\langle x, y\rangle, \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

d.h. $\langle x, y\rangle \le 1$.

Ersetzen wir nun y durch $-y$, so folgt

$$|\langle x, y\rangle| \le 1 = \|x\|\,\|y\|. \tag{1.3.8}$$

□

1.3.5. Corollar (Dreiecksungleichung)**.** *Sei E ein Skalarproduktraum, so gilt*

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad \forall\, x, y \in E. \tag{1.3.9}$$

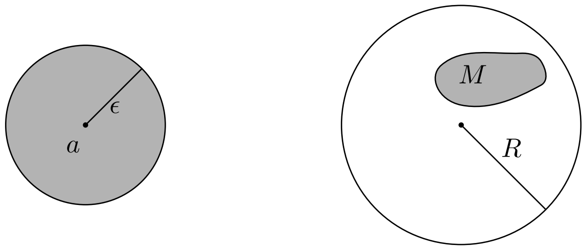
Beweis. Quadriere beide Seiten der Ungleichung und wende die Schwarzsche Ungleichung an. □

1.3.6. Definition. (i) Im $\mathbb{R}^n$ definieren wir ϵ-Umgebungen völlig analog wie in $\mathbb{R}$

$$B_\epsilon(a) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \colon |x - a| < \epsilon \,\} \tag{1.3.10}$$

und entsprechend die Begriffe *Konvergenz, Limes, Häufungspunkt, Cauchyfolge.*

(ii) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, wenn $M \subset B_R(0)$ für ein geeignetes $R > 0$.



1.3.7. Die in Abschnitt 1.1 bewiesenen Sätze gelten auch im $\mathbb{R}^n$ sofern wir keinen Gebrauch von speziellen Strukturen in $\mathbb{R}$ gemacht haben, wie z.B. der Ordnungsrelation „$\leq$" (monotone Folgen, Limes superior, etc.). Die Beweise lassen sich entweder wörtlich übertragen oder die Aussagen können auf analoge Aussagen in $\mathbb{R}$ reduziert werden.

Wir wollen dies im folgenden an einigen Beispielen demonstrieren.

1.3.8. Lemma. *Sei $x = (x^i) \in \mathbb{R}^n$, dann gilt*

$$|x^i| \leq |x| \leq \sum_{k=0}^{n} |x^k| \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n. \tag{1.3.11}$$

Beweis. Klar.

1.3.9. Theorem. *Sei $x_k = (x_k^i)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

(i) *x_k ist genau dann Cauchyfolge, wenn die Folgen der Komponenten x_k^i Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind.*

(ii) $x_k \to a = (a^i) \quad \Longleftrightarrow \quad x_k^i \to a^i \quad \forall\, 1 \leq i \leq n.$

(iii) *Der $\mathbb{R}^n$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert.*

Beweis. (i) und (ii) folgen sofort aus dem vorangehenden Lemma. Zum Beweis von (iii) verwenden wir zusätzlich die bereits bekannte Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, vgl. Theorem 1.1.22. □

1.3.10. Proposition. *$a \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Häufungspunkt von (x_k), wenn eine Teilfolge nach a konvergiert.*

Beweis. Identisch mit dem Beweis von Proposition 1.1.13. □

1.3.11. Theorem (Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Wir führen die Behauptung auf das entsprechenden Ergebnis in $\mathbb{R}$ zurück, vgl. Theorem 1.1.15.

Sei $(x_k) = (x_k^i)$ beschränkt, dann sind auch die Folgen der einzelnen Komponenten beschränkt

$$|x_k^i| \le \text{const} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, 1 \le i \le n. \tag{1.3.12}$$

Die Folge (x_k^1) enthält daher eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}^1)$ nach Theorem 1.1.15; aus dem gleichen Grund können wir in der beschränkten Folge $(x_{n_k}^2)$ eine konvergente Teilfolge $(x_{m_k}^2)$ finden. Dann konvergieren die beiden Folgen $(x_{m_k}^i)$ für $i = 1, 2$.

Diesen Prozeß „Auswahl einer konvergenten Teilfolge“ wiederholen wir sukzessive bis wir nach dem n-ten Schritt eine Teilfolge (x_{l_k}) gefunden haben, so daß alle $(x_{l_k}^i)$, $1 \le i \le n$, konvergieren und damit auch (x_{l_k}). □

1.3.12. Proposition. *Eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen Häufungspunkt besitzt.*

Beweis. Übungsaufgabe.

1.4. Metrische Räume

Um die Begriffe Konvergenz, Cauchyfolgen, Häufungspunkte und später auch Stetigkeit zu definieren, genügt es, Mengen E zu betrachten, in denen der *Abstand* zweier Punkten $x, y \in E$ definiert ist.

1.4.1. Definition. (i) Sei $E \ne \emptyset$ eine Menge. Wir nennen eine Abbildung $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ *Abstand* oder *Metrik*, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

$$d(x, y) = d(y, x) \qquad \text{(Symmetrie)} \tag{1.4.1}$$

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \qquad \text{(Definitheit)} \tag{1.4.2}$$

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \tag{1.4.3}$$

(ii) Das Paar (E, d) heißt *metrischer Raum*.

1.4.2. Beispiele. 1. Der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $d(x, y) = |x - y|$.

2. Sei $E \ne \emptyset$ eine beliebige Menge, so können wir auf ihr die sog. *diskrete Metrik* definieren

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \ne y \end{cases} \tag{1.4.4}$$

3. Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum, vgl. Bemerkung 1.4.4.

1.4.3. Definition (Normierter Raum)**.** (i) Sei E ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$). Eine Abbildung $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ heißt *Norm*, falls

$$\|x\| = 0 \quad \iff \quad x = 0 \qquad \text{(positive Definitheit)} \tag{1.4.5}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \qquad \forall\, x \in E, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.4.6}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \tag{1.4.7}$$

(ii) Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ heißt *normierter Raum*.

1.4.4. Bemerkung. Jeder normierte Raum E ist ein metrischer Raum mit Metrik

$$d(x, y) = \|x - y\|. \tag{1.4.8}$$

1.4.5. Beispiele. 1. Der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm.

2. Jeder Skalarproduktraum ist ein normierter Raum mit Norm

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}},$$

vgl. Corollar 1.3.5.

3. Der $\mathbb{R}^n$ versehen mit der p-Norm, $1 \leq p < \infty$,

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x^i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

bzw. mit der sup-Norm

$$\|x\|_\infty = \sup_i |x^i| = \max_i |x^i|,$$

vgl. Aufgabe 1 von Aufgaben 1.4.16.

1.4.6. Beispiel (Der Folgenraum l_2)**.** Setze

$$l_2 = \{\, (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon x_i \in \mathbb{R},\ \sum_i |x_i|^2 < \infty \,\}, \tag{1.4.9}$$

so ist l_2 ein unendlich dimensionaler Skalarproduktraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_i), (y_i)\rangle = \sum_i x_i y_i. \tag{1.4.10}$$

Beweis. (i) l_2 ist ein Vektorraum, wenn Addition und Multiplikation mit einem Skalar gliedweise definiert werden, denn

$$|x_i + y_i|^2 \le 2\big(|x_i|^2 + |y_i|^2\big) \tag{1.4.11}$$

und somit

$$\sum_i |x_i + y_i|^2 \le 2\Big(\sum_i |x_i|^2 + \sum_i |y_i|^2\Big) \tag{1.4.12}$$

(ii) Das Skalarprodukt in (1.4.10) ist wohldefiniert, da die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung absolut konvergiert

$$\sum_i |x_i y_i| \le \sum_i \frac{1}{2}\big(|x_i|^2 + |y_i|^2\big). \tag{1.4.13}$$

Es ist ferner bilinear, symmetrisch und positiv definit.

(iii) Die speziellen Folgen $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$, wobei δ_{ij} das sog. *Kroneckersymbol* ist

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases} \tag{1.4.14}$$

sind linear unabhängig, d.h. $\dim l_2 = \infty$. □

Die Begriffe Kugel, Konvergenz, Häufungspunkt, Cauchyfolge, Vollständigkeit, Beschränktheit, etc. werden in metrischen Räumen völlig analog wie in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ definiert.

Als Erleichterung für den Leser formulieren wir die wichtigsten Definitionen noch einmal in einem metrischen Raum E.

1.4.7. Definition. (i) Sei $x_0 \in E$ und $\epsilon > 0$. Als *ϵ-Umgebung* von x_0 oder auch Kugel um x_0 mit Radius ϵ bezeichnen wir die Menge

$$B_\epsilon(x_0) = \{\, x \in E \colon d(x_0, x) < \epsilon \,\}. \tag{1.4.15}$$

(ii) Eine Folge (x_n) in E konvergiert nach einem Punkt $a \in E$, falls in jeder ϵ-Umgebung von a f.a. Folgenglieder liegen.

(iii) Ein Punkt $a \in E$ heißt *Häufungspunkt* der Folge (x_n), falls in jeder ϵ-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

(iv) Eine Folge (x_n) heißt *Cauchyfolge*, falls

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0}{\exists}\ \underset{n,m\ge n_0}{\forall} \quad d(x_n, x_m) < \epsilon. \tag{1.4.16}$$

(v) E heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

(vi) Wir definieren den *Durchmesser* von E, in Zeichen, $\operatorname{diam} E$, als

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x,y \in E} d(x,y) \tag{1.4.17}$$

(vii) Eine Menge $M \subset E$ heißt *beschränkt*, wenn eine Kugel $B_r(x_0)$ existiert, die M enthält, oder, äquivalent hierzu, wenn der Durchmesser endlich ist.

Eine einfache aber wichtige Folgerung aus der Dreiecksungleichung ist, daß sich nicht identische Punkte durch Kugeln trennen lassen.

1.4.8. Proposition. (i) *Sei E ein metrischer Raum und seien $x, y, z \in E$, dann gilt*

$$|d(x,y) - d(y,z)| \le d(x,z). \tag{1.4.18}$$

(ii) *Sei $x \neq y$, dann existiert $\epsilon > 0$, so daß die Kugeln $B_\epsilon(x)$ und $B_\epsilon(y)$ disjunkt sind.*

Beweis. (i) Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x,y) - d(y,z) \le d(x,z) \tag{1.4.19}$$

Vertauschung von x und z liefert dann die Behauptung.

(ii) Sei $r = d(x,y)$ und wähle $\epsilon = \frac{r}{4}$. Dann folgt für $z \in B_\epsilon(y)$ nach der gerade bewiesenen Ungleichung

$$d(x,z) \ge d(x,y) - d(y,z) \ge r - \epsilon = 3\epsilon, \tag{1.4.20}$$

d.h. $z \notin B_\epsilon(x)$. □

Als Folgerung erhalten wir, vgl. Proposition 1.1.3,

1.4.9. Proposition. (i) *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

(ii) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Ferner gelten, mit identischen Beweisen, die folgenden Sätze und Bemerkungen

1.4.10. Proposition (vgl. Proposition 1.1.13)**.** *a ist genau dann Häufungspunkt von (x_n), wenn eine Teilfolge der (x_n) nach a konvergiert.*

1.4.11. Bemerkung (vgl. Bemerkung 1.1.14)**.** Eine *hinreichende* Bedingung, die gewährleistet, daß a Häufungspunkt einer Folge ist, lautet: In jeder ϵ-Umgebung von a liegt ein von a verschiedenes Folgenglied.

1.4.12. Proposition (vgl. Theorem 1.1.22)**.** *Jede konvergente Folge ist Cauchyfolge.*

Es gilt allerdings nicht mehr die Umkehrung wie im früheren Fall, da ein beliebiger metrischer Raum i. allg. nicht vollständig ist.

1.4.13. Definition. (i) Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum* (BR).

(ii) Ein vollständiger Skalarproduktraum heißt *Hilbertraum* (HR).

1.4.14. Bemerkung. l_2 ist ein Hilbertraum, wie wir später beweisen werden.

1.4.15. Bemerkung. In allgemeinen metrischen Räumen gilt auch der Satz von Bolzano-Weierstraß nicht mehr, daß jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

1.4.16. Aufgaben.

1 Mit Hilfe der Youngschen Ungleichung

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+,$$

hierbei sind p, p' sog. *konjugierte Exponenten*, d.h. $p, p' \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, vgl. Aufgabe 7 auf Seite 223 von Aufgaben 3.8.10, beweise man

(i) Definiere für $p \in [1, \infty)$ die sog. p-Norm auf $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x^i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall\, x = (x^i) \in \mathbb{R}^n,$$

dann gilt für $p \in (1, \infty)$ die sog. *Höldersche Ungleichung*

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_p \, \|y\|_{p'} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n;$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist dabei das euklidische Skalarprodukt.

(ii) $\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$

(iii) Setze $\|x\|_\infty = \max_i |x^i|$, so gelten (i) und (ii) auch für die Exponenten $p = 1$ und $p' = \infty$.

2 Zwei Normen $\|\cdot\|, ||| \cdot |||$ auf einem Vektorraum E heißen *äquivalent*, falls positive Konstanten c, c' existieren, so daß

$$c\,|||x||| \leq \|x\| \leq c'\,|||x||| \qquad \forall\, x \in E.$$

Man zeige, daß im $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind.

1.5. Reihen in Banachräumen

In normierten Räumen können wir Elemente addieren und unendliche Reihe definieren. Wir formulieren der Vollständigkeit halber noch einmal die bereits im Reellen vorgenommenen Definitionen und Sätze, die sich wörtlich auf die neue Situation übertragen lassen.

1.5.1. Definition. Eine (unendliche) Reihe in einem normierten Raum E besteht aus zwei Folgen (a_n), den Gliedern der Reihe, und (s_n), der Folge der *Partialsummen*, die durch die Beziehung

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{1.5.1}$$

miteinander verknüpft sind.

Existiert $\lim s_n$, so bezeichnen wir den Limes als Wert der Reihe und schreiben dafür

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum a_n = \lim s_n. \tag{1.5.2}$$

Die Reihe heißt dann *konvergent* im anderen Falle *divergent.*

Eine Reihe mit Gliedern a_n wollen wir auch mit dem Symbol $((a_n))$ abkürzen.

Wenn das erste Glied einer Reihe nicht mit $n = 0$ indiziert wird, sondern mit $n_0 > 0$, so deuten wir dies gelegentlich an durch $((a_n))_{n \geq n_0}$, um Mißverständnisse auszuschließen.

Das Cauchykriterium für Folgen, angewandt auf die Partialsummen, liefert ein entsprechendes Cauchykriterium für Reihen

1.5.2. Proposition (vgl. Proposition 1.2.3). (i) *Sei $((a_n))$ eine konvergente Reihe in einem normierten Raum E, dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0, so daß*

$$\Big\|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\Big\| < \epsilon \qquad \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{1.5.3}$$

(ii) *Ist E vollständig, so ist dieses Kriterium auch hinreichend für die Konvergenz.*

1.5.3. Corollar. *Notwendig für die Konvergenz der Reihe $((a_n))$ ist, daß $\|a_n\| \to 0$.*

1.5.4. Bemerkung. Aus den Definitionen folgt unmittelbar

(i) Seien $((a_n)), ((b_n))$ konvergente Reihen, dann ist auch $((a_n + b_n))$ konvergent und es gilt

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n. \tag{1.5.4}$$

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $((a_n))$ konvergent, dann ist auch $((\lambda a_n))$ konvergent und

$$\sum (\lambda a_n) = \lambda \sum a_n. \tag{1.5.5}$$

Die konvergenten Reihen bilden daher einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn man Addition und Multiplikation mit einem Skalar gliedweise definiert.

(iii) Für die Konvergenz einer Reihe $((a_n))$ ist nur maßgebend, daß die Endstücke $((a_n))_{n \geq k}, k$ groß, konvergieren.

Für den Rest dieses Abschnitts wollen wir annehmen, daß E ein Banachraum ist.

1.5.5. Definition. Eine Reihe $((a_n))$ in einem Banachraum E heißt *absolut konvergent*, wenn $((\|a_n\|))$ konvergiert und *bedingt konvergent*, wenn die Reihe zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

1.5.6. Proposition (vgl. Proposition 1.2.20)**.** *Eine absolut konvergente Reihe $((a_n))$ in einem Banachraum E ist konvergent und es gilt die Dreiecksungleichung*

$$\Big\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|. \tag{1.5.6}$$

1.5.7. Definition. Seien $((a_n)), ((b_n))$ zwei Reihen in E. Wir sagen $((b_n))$ sei aus $((a_n))$ durch *Umordnung* entstanden, falls eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so daß $b_n = a_{\varphi(n)}$.

1.5.8. Theorem (Umordnungsssatz). *Sei $((a_n))$ eine absolut konvergente Reihe in E und sei $((b_n))$ eine Umordnung von $((a_n))$, dann konvergiert auch $((b_n))$ absolut und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n. \tag{1.5.7}$$

Zum letzten Ergebnis sagt man auch, eine absolut konvergente Reihe konvergiere kommutativ.

Beweis. Sei φ die zur Umordnung gehörende Bijektion und setze $I_n = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Wir zerlegen den Beweis in zwei Schritte:

(i) *Absolute Konvergenz von* $((b_n))$

Sei n beliebig und m die größte Zahl in $\varphi(I_n)$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \|b_k\| \leq \sum_{k=0}^{m} \|a_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \tag{1.5.8}$$

und die Behauptung folgt aus Proposition 1.2.7.

(ii) *Kommutative Konvergenz von* $((a_n))$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann existiert $m \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{k=m}^{\infty} \|a_k\| < \epsilon. \tag{1.5.9}$$

Ferner gibt es n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $I_m \subset \varphi(I_n)$.

Sei $n \geq n_0$ und wähle $r \in \mathbb{N}$, so daß $I_m \subset \varphi(I_n) \subset I_r$. Dann erhalten wir

$$\Big\|\sum_{k=0}^{r} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k\Big\| \leq \sum_{k=m}^{r} \|a_k\| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \|a_k\| < \epsilon. \tag{1.5.10}$$

Lassen wir nun $r \to \infty$ streben, so folgt die Behauptung. □

1.5.9. Definition. Sei I eine abzählbare Menge. Eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ in einem Banachraum E heißt *absolut summierbar*, wenn es eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to I$ gibt, so daß die Reihe $((a_{\varphi(n)}))$ absolut konvergiert.

Aus dem Umordnungssatz folgt dann, daß die Reihe $((a_{\varphi(n)}))$ für jede beliebige Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to I$ absolut konvergiert, und daß die Summe der Reihe unabhängig von φ definiert ist. Wir nennen sie daher auch die Summe der Reihe $((a_i))_{i \in I}$ und schreiben hierfür $\sum_{i \in I} a_i$.

Wir wollen jetzt Kriterien formulieren, die die absolute Summierbarkeit einer abzählbaren Familie unabhängig von der Darstellung mittels einer Bijektion von $\varphi : \mathbb{N} \to I$ beschreiben.

1.5.10. Proposition. *Eine abzählbare Familie $(a_i)_{i\in I}$ in einem Banachraum E ist genau dann absolut summierbar, wenn für alle endlichen Teilmengen $J \subset I$ die Summen*

$$\sum_{i\in J} \|a_i\| \tag{1.5.11}$$

gleichmäßig beschränkt sind. Es existiert dann zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $H \subset I$, so daß für alle endlichen Teilmengen $K \subset I \backslash H$ und für alle endlichen Teilmengen L mit $H \subset L$ gilt

$$\sum_{i\in K} \|a_i\| \leq \epsilon \tag{1.5.12}$$

und

$$\Big\|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in L} a_i\Big\| \leq 2\epsilon. \tag{1.5.13}$$

Beweis. (i) Die gleichmäßige Beschränkheit der endlichen Summen in (1.5.11) ist sicherlich notwendig. Aus Proposition 1.2.7 erhalten wir auch, daß diese Bedingung hinreichend ist.

(ii) Bevor wir die Abschätzungen (1.5.12) und (1.5.13) beweisen, möchten wir hervorheben, daß—wenn wir die absolut summierbare Familie mit einer absolut konvergenten Reihe vergleichen—die Menge H dem Anfangsstück $\{0, 1, \ldots, n_0\}$ entspricht, die Ungleichung (1.5.12) dem notwendigen Konvergenzkriterium (1.2.36) und (1.5.13) der Abschätzung (1.2.37).

Sei $\varphi : \mathbb{N} \to I$ eine Bijektion und $\epsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_{\varphi(k)}\| \leq \epsilon. \tag{1.5.14}$$

Wählen wir $H = \varphi(\{0, 1, \ldots, n_0\})$, so folgt hieraus (1.5.12) und

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in H} a_i\Big\| &= \Big\|\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_{\varphi(k)}\Big\| \\ &\leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_{\varphi(k)}\| \leq \epsilon.\end{aligned} \tag{1.5.15}$$

Sei nun $H \subset L \subset I$. Dann zerlegen wir L in H und $K = L\backslash H$ und schließen aus (1.5.12) sowie (1.5.15)

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in L} a_i\Big\| &\leq \Big\|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in H} a_i\Big\| + \Big\|\sum_{i\in L} a_i - \sum_{i\in H} a_i\Big\| \\ &\leq \epsilon + \Big\|\sum_{i\in K} a_i\Big\| \leq 2\epsilon. \end{aligned} \tag{1.5.16}$$

□

1.5.11. Proposition. *Ist $(a_i)_{i\in I}$ absolut summierbar in E, dann auch $(a_i)_{i\in J}$ für alle abzählbaren $J \subset I$, und es gilt*

$$\sum_{i\in J} \|a_i\| \leq \sum_{i\in I} \|a_i\|. \tag{1.5.17}$$

Letztere Abschätzung ist auch für alle endlichen Teilmengen $J \subset I$ richtig.

Beweis. Sei $K \subset J$ endlich, so gilt

$$\sum_{i\in K} \|a_i\| \leq \sum_{i\in I} \|a_i\| \tag{1.5.18}$$

und die Behauptungen folgen aus (1.5.11) und der Beziehung

$$\sum_{i\in J} \|a_i\| = \sup\{\sum_{i\in K} \|a_i\| : K \subset J, K \,\text{endlich}\,\}, \tag{1.5.19}$$

die als Übungsaufgabe bewiesen werden soll. □

1.5.12. Bemerkung. Sei I eine beliebige Indexmenge, so nennen wir die Familie $(a_i)_{i\in I}$, $a_i \in E$, absolut summierbar, falls $\sum_{i\in J} \|a_i\|$ für alle endlichen $J \subset I$ gleichmäßig beschränkt ist. In diesem Falle gilt dann $a_i = 0$ bis auf höchstens abzählbar viele i (vgl. Aufgabe 4 von Aufgaben 1.5.16), so daß wir nach Theorem 1.5.8 und Proposition 1.5.10 $\sum_{i\in I} a_i$ definieren können.

1.5.13. Theorem (Assoziativitätstheorem)**.** *Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine absolut summierbare Familie in E, und sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare disjunkte Zerlegung von I in nichtleere Teilmengen I_n. Setzen wir $b_n = \sum_{i\in I_n} a_i$, so ist die Reihe $((b_n))$ absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} b_n. \tag{1.5.20}$$

Letzteres bezeichnet man auch als Assoziativität von absolut konvergenten Reihen.

Beweis. (i) *Absolute Konvergenz von* $((b_n))$

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es zu jedem n eine endliche Teilmenge $H_n \subset I_n$, so daß für jede endliche Teilmenge H'_n mit $H_n \subset H'_n \subset I_n$ nach Proposition 1.5.10 gilt

$$\|b_n - \sum_{i \in H'_n} a_i\| \leq \epsilon 2^{-n}, \tag{1.5.21}$$

also insbesondere

$$\|b_n\| \leq \sum_{i \in H_n} \|a_i\| + \epsilon 2^{-n}, \tag{1.5.22}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{k} \|b_n\| &\leq \sum_{n=0}^{k} \sum_{i \in H_n} \|a_i\| + \epsilon \sum_{n=0}^{k} 2^{-n} \\ &\leq \sum_{i \in I} \|a_i\| + 2\epsilon. \end{aligned} \tag{1.5.23}$$

Wende nun Proposition 1.2.7 an.

(ii) *Assoziativität*

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir bestimmen dann H wie in Proposition 1.5.10, so daß die Ungleichungen (1.5.12) und (1.5.15) gelten, und H_n wie eben in (i).

Da H endlich ist, existiert k_0, so daß

$$H \subset \bigcup_{n=0}^{k_0} I_n. \tag{1.5.24}$$

Definieren wir

$$H'_n = H_n \cup (I_n \cap H) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{1.5.25}$$

so folgt

$$H \subset \bigcup_{n=0}^{k_0} H'_n. \tag{1.5.26}$$

Für $k \geq k_0$ schließen wir weiter

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{n=0}^{k} b_n\Big\| &\le \Big\|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in H} a_i\Big\| + \Big\|\sum_{i\in H} a_i - \sum_{n=0}^{k}\sum_{i\in H'_n} a_i\Big\| \\ &\quad + \Big\|\sum_{n=0}^{k}\sum_{i\in H'_n} a_i - \sum_{n=0}^{k} b_n\Big\| \equiv S_1+S_2+S_3\end{aligned} \tag{1.5.27}$$

und schätzen die einzelnen Summanden so ab:

1. $S_1 \le \epsilon$ nach (1.5.15).

2. Um S_2 abzuschätzen, beachten wir, daß die H'_n alle disjunkt sind, und daß

$$H \subset \bigcup_{n=0}^{k} H'_n \equiv H'. \tag{1.5.28}$$

Daher ist

$$S_2 = \Big\|\sum_{i\in H} a_i - \sum_{i\in H'} a_i\Big\| \le \sum_{H'\setminus H} \|a_i\| \le \epsilon \tag{1.5.29}$$

wegen (1.5.12).

3. S_3 schätzen wir mit der Dreiecksungleichung ab

$$S_3 \le \sum_{n=0}^{k} \|b_n - \sum_{i\in H'_n} a_i\| \le 2\epsilon \tag{1.5.30}$$

nach (1.5.21).

Damit ist $S_1+S_2+S_3 \le 4\epsilon$ und auch die zweite Behauptung bewiesen. □

1.5.14. Theorem (Cauchysche Produktformel)**.** *Wenn* $((a_n))$ *und* $((b_n))$ *in* $\mathbb{R}$ *absolut konvergieren, dann ist die Familie* $(a_i b_k)_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *absolut summierbar, und es gilt*

$$\sum_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i b_k = \Big(\sum_i a_i\Big)\Big(\sum_i b_i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}. \tag{1.5.31}$$

Beweis. (i) *Absolute Summierbarkeit*

Sei $H \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ endlich, und sei

$$0 \le i,k \le k_0 \quad \forall\,(i,k)\in H, \tag{1.5.32}$$

dann ist

$$\sum_{(i,k)\in H} |a_i b_k| \le \Big(\sum_{i=0}^{k_0} |a_i|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{k_0} |b_k|\Big) \le \Big(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\Big), \tag{1.5.33}$$

woraus die Behauptung nach Proposition 1.5.10 folgt.

(ii) *Cauchysche Produktformel*

Definiere für $j \in \mathbb{N}$ $I_j = \{j\} \times \mathbb{N}$ und $J_j = \{\,(k, j-k)\colon 0 \le k \le j\,\}$. Die Folgen (I_j) und (J_j) bilden beide eine Partition von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (Übungsaufgabe), so daß nach Theorem 1.5.13

$$\sum_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i b_k = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{(i,k)\in I_j} a_i b_k = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{(i,k)\in J_j} a_i b_k. \tag{1.5.34}$$

Andererseits ist

$$\sum_{(i,k)\in I_j} a_i b_k = a_j \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tag{1.5.35}$$

und

$$\sum_{(i,k)\in J_j} a_i b_k = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}, \tag{1.5.36}$$

womit alles bewiesen ist. □

1.5.15. Corollar (Die Exponentialfunktion)**.** *Für die Exponentialfunktion*

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1.5.37}$$

gilt

$$\exp(x+y) = \exp x \exp y \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.5.38}$$

Beweis. Nach der Cauchyschen Produktformel ist

$$
\begin{aligned}
\exp x \exp y &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \frac{1}{(n-k)!} y^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n \qquad \text{(binomische Formel)} \\
&= \exp(x+y)
\end{aligned}
\tag{1.5.39}
$$

□

1.5.16. Aufgaben.

1 Sei $f(x) = \sum a_n x^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $r > 0$. Konvergiert dann $x_k \to x_0$, $|x_0| < r$, so folgt $f(x_k) \to f(x_0)$.

2 Für $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}^*$ haben wir a^m und $a^{\frac{1}{m}}$ bereits definiert. Setze

$$a^0 = 1,\ a^{-m} = (a^m)^{-1} \quad \text{und} \quad a^{-\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^{-1}.$$

Zeigen Sie, daß sich dann a^x für alle $x \in \mathbb{Q}$ so definieren läßt, daß

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}.$$

3 Für die Exponentialfunktion $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ gilt:

(i) $x_k \to x \quad \Longrightarrow \quad \exp x_k \to \exp x$

(ii) $\exp x$ ist monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ ab. Definiere $\log x$ als die Inverse.

(iii) Es gilt $\quad (\exp x)^y = \exp xy \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{Q}.$

(iv) Setze $e = \exp 1$, so folgt $\quad e^x = \exp x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

(v) Für $a > 0$ gilt $\quad a^x = e^{x \log a} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

(vi) Bestimmen Sie die Inverse φ von a^x, falls $0 < a \neq 1$, und zeigen Sie, daß

(1) $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*.$

(2) $\varphi(b^x) = x\varphi(b) \qquad \forall\, b > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

(3) $x_k \to x_0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_k) \to \varphi(x_0).$

(vii) Welches Monotonieverhalten besitzt a^x?

4 Sei I eine beliebige Indexmenge und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie von nicht-negativen Zahlen. Nehme an, es existiere eine Konstante c, so daß

$$\sum_{i\in J} a_i \le c \qquad \forall\, J \subset I,\ J \text{ endlich},$$

dann sind h.a. viele $a_i \neq 0$.

5 Sei $((a_n))$ eine nur bedingt konvergente Reihe in $\mathbb{R}$, dann sind die Reihen $((a_n^+))$, $((a_n^-))$ divergent, wobei wir für $a \in \mathbb{R}$ definieren

$$a^+ = \max(a, 0), \qquad a^- = -\min(a, 0).$$

6 Sei $((a_n))$ eine bedingt konvergente Reihe in $\mathbb{R}$, dann gilt

(i) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß die Umordnung $((a_{\varphi(n)}))$ nach a konvergiert.

(ii) Es existiert eine Umordnung $((a_{\sigma(n)}))$, die divergiert.

1.6. Gleichmäßige Konvergenz

1.6.1. Definition. (i) Sei E eine nichtleere Menge, F ein vollständiger metrischer Raum und $f_n : E \to F$ eine Folge von Funktionen. Die Folge heißt auf E *gleichmäßig konvergent*, falls sie punktweise konvergiert, d.h. $(f_n(x))$ konvergiert für alle $x \in E$, und falls im Cauchykriterium

$$\forall_{\epsilon>0}\ \forall_{x\in E}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n,m\ge n_0}\quad d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon \tag{1.6.1}$$

das n_0 unabhängig von x gewählt werden kann, d.h. anstelle von (1.6.1) gilt

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{x\in E}\ \forall_{n,m\ge n_0}\quad d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon. \tag{1.6.2}$$

Setze

$$f(x) = \lim f_n(x) \qquad x \in E, \tag{1.6.3}$$

so wird hierdurch eine Funktion $f : E \to F$ definiert. Wir sagen dann, f_n konvergiere gleichmäßig nach f, in Zeichen,

$$f_n \rightrightarrows f. \tag{1.6.4}$$

Die gleichmäßige Konvergenz läßt sich dann auch so ausdrücken

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{x\in E}\ \forall_{n\ge n_0}\quad d(f_n(x), f(x)) < \epsilon. \tag{1.6.5}$$

(ii) Wenn E ein metrischer Raum ist, so heißt eine Folge von Funktionen $f_n : E \to F$ *lokal gleichmäßig konvergent*, wenn jeder Punkt $x \in E$ eine Umgebung $B_\delta(x)$ besitzt, in der die Folge gleichmäßig konvergiert.

(iii) Entsprechend nennen wir eine Reihe $((f_n(x)))$ gleichmäßig konvergent, *gleichmäßig absolut konvergent* oder lokal gleichmäßig konvergent, wobei in diesem Fall natürlich F ein Banachraum sein muß.

1.6.2. Beispiele. 1. Im Intervall $|x| \leq a < 1$ ist die Folge $f_n(x) = x^n$ gleichmäßig konvergent, $f_n \rightrightarrows 0$, denn $|x|^n \leq a^n$.

2. Im offenen Intervall $|x| < 1$ ist die Folge $f_n(x) = x^n$ zwar immer noch punktweise konvergent, aber nicht mehr gleichmäßig konvergent, denn je näher wir, zu vorgegebenem $\epsilon > 0$, $|x|$ an 1 wählen, desto größer muß n_0 sein, um

$$|x|^n < \epsilon \qquad \forall\, n \geq n_0 \tag{1.6.6}$$

zu gewährleisten.

3. Die Reihe $((\frac{1}{n!}x^n))$ konvergiert in jedem beschränktem Intervall gleichmäßig absolut.

4. Eine Potenzreihe $((a_n x^n))$ in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $r > 0$ konvergiert in $|x| \leq r_0 < r$ gleichmäßig absolut.

Beweis. Es ist

$$\overline{\lim}\,(|a_n||x|^n)^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}\,|x| \leq \overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}\,r_0 = \frac{r_0}{r} < 1. \tag{1.6.7}$$

Wähle c, $\frac{r_0}{r} < c < 1$, so folgt

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c}{r_0} \qquad \text{f.f.a. } n, \tag{1.6.8}$$

und daher ist

$$|a_n||x|^n \leq \left(\frac{|x|}{r_0}\right)^n c^n \leq c^n \qquad \text{f.f.a. } n, \tag{1.6.9}$$

woraus die Behauptung folgt, vgl. das nachfolgende Lemma. □

1.6.3. Lemma. *Sei E eine nichtleere Menge, F ein Banachraum und $f_n : E \to F$ eine Folge von Funktionen. Dann konvergiert die Reihe $((f_n(x)))$ gleichmäßig absolut, wenn eine von x unabhängige konvergente Majorante existiert, d.h. eine konvergente Reihe $((a_n))$ mit nichtnegativen Gliedern, so daß*

$$\|f_n(x)\| \leq a_n \qquad \forall\, x \in E \quad \forall\, n. \tag{1.6.10}$$

Beweis. Betrachte beliebige Indizes n, m, n_0 mit $n, m \geq n_0$, $m < n$, so erhalten wir aus obiger Abschätzung

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - \sum_{k=0}^{m} f_k(x) \Big\| &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k(x)\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k. \end{aligned} \tag{1.6.11}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir n_0 so groß, daß die rechte Seite in (1.6.11) kleiner als ϵ ausfällt. □

1.6.4. Definition. Eine *Doppelfolge* (a_{nm}) in einem metrischen Raum E ist eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{N} \to E$, so daß $a_{nm} = f_n(m)$.

1.6.5. Theorem. *Sei (a_{nm}) eine Doppelfolge in einem vollständigen metrischen Raum E. Nehme an, daß $\lim_n a_{nm}$ und $\lim_m a_{nm}$ existieren, und daß bezüglich eines Indexes die Konvergenz gleichmäßig ist. Dann existieren auch $\lim_m \lim_n a_{nm}$ und $\lim_n \lim_m a_{nm}$ und stimmen überein.*

Zum Beweis des Theorems benötigen wir folgende Lemmata

1.6.6. Lemma. *Sei (E, d) ein metrischer Raum und gelte $x_n \to x$, $y_n \to y$, dann folgt*

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y). \tag{1.6.12}$$

Beweis. Aus der Identität

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) = d(x_n, y_n) - d(x, y_n) + d(x, y_n) - d(x, y) \tag{1.6.13}$$

schließen wir mittels (1.4.18)

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y), \tag{1.6.14}$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. □

1.6.7. Lemma. *Sei (E, d) ein metrischer Raum, (x_n) eine Cauchyfolge in E und gelte für (y_n)*

$$\lim d(x_n, y_n) = 0, \tag{1.6.15}$$

dann ist (y_n) eine Cauchyfolge. Gilt darüber hinaus $x_n \to x$, so konvergiert auch (y_n) nach x.

Beweis. (i) Die Behauptung „(y_n) Cauchyfolge“ folgt sofort aus der Abschätzung

$$d(y_n, y_m) \le d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) \tag{1.6.16}$$

und der Annahme (1.6.15).

(ii) Gelte $x_n \to x$, so schließen wir mit der Dreiecksungleichung weiter

$$d(x, y_n) \le d(x, x_n) + d(x_n, y_n) \tag{1.6.17}$$

und erhalten $\lim y_n = x$. □

Beweis von Theorem 1.6.5. Nehme an, die Folgen $(a_{nm})_n$ seien gleichmäßig in m konvergent; sei $\alpha_m = \lim_n a_{nm}$ und $\beta_n = \lim_m a_{nm}$.

Zu $\epsilon > 0$ existiert dann n_0, so daß

$$d(a_{nm}, a_{km}) < \epsilon \qquad \forall\, n, k \ge n_0, \quad \forall\, m. \tag{1.6.18}$$

Lassen wir in dieser Abschätzung $m \to \infty$ streben, so folgt nach Lemma 1.6.6

$$d(\beta_n, \beta_k) \le \epsilon \qquad \forall\, n, k \ge n_0, \tag{1.6.19}$$

d.h. (β_n) konvergiert, $\beta_n \to \beta$, da E vollständig, und für den Limes gilt

$$d(\beta, \beta_n) \le \epsilon \qquad \forall\, n \ge n_0. \tag{1.6.20}$$

Wir wenden diesen Schluß noch einmal an und folgern aus (1.6.18) mit $n \to \infty$

$$d(\alpha_m, a_{km}) \le \epsilon \qquad \forall\, k \ge n_0, \quad \forall\, m. \tag{1.6.21}$$

Ferner liefert die Dreiecksungleichung für $n, k \ge n_0$

$$\begin{aligned} d(\alpha_m, \beta_m) &\le d(\alpha_m, a_{km}) + d(a_{km}, a_{nm}) + d(a_{nm}, \beta_m) \\ &\le \epsilon + \epsilon + d(a_{nm}, \beta_m) \end{aligned} \tag{1.6.22}$$

wegen (1.6.18) und (1.6.21), und damit erhalten wir, wenn wir auf beiden Seiten den Limes superior bezüglich m bilden und dabei beachten, daß $\lim_m d(a_{nm}, \beta_m) = d(\beta_n, \beta)$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}\, d(\alpha_m, \beta_m) &\le 2\epsilon + d(\beta_n, \beta) \\ &\le 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon \end{aligned} \tag{1.6.23}$$

wegen (1.6.20).

Da $\epsilon > 0$ beliebig, heißt das

$$\lim d(\alpha_m, \beta_m) = 0 \tag{1.6.24}$$

und die restlichen Behauptungen folgen aus Lemma 1.6.7. □

Eine unmittelbare Folgerung aus Theorem 1.6.5 ist

1.6.8. Theorem. *Sei E ein Banachraum und nehme an, daß die Reihen $((a_{nm}))_n$ bezüglich m gleichmäßig konvergieren. Existiert dann $\lim_m a_{nm}$ für alle n, so existieren auch $\lim_m \sum_n a_{nm}$ und $\sum_n \lim_m a_{nm}$ und es gilt*

$$\lim_m \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_m a_{nm}. \tag{1.6.25}$$

Beweis. Wende Theorem 1.6.5 auf die Partialsummen

$$s_{nm} = \sum_{k=0}^{n} a_{km} \tag{1.6.26}$$

an. □

1.6.9. Corollar. *Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\lim\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp x. \tag{1.6.27}$$

Insbesondere ist

$$\lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \exp 1 = e. \tag{1.6.28}$$

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}^*$ gilt nach der binomischen Formel

$$\lim\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \frac{x^n}{m^n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \frac{x^n}{m^n}, \tag{1.6.29}$$

da nach Vereinbarung $\binom{m}{n} = 0$, falls $n > m$.

Setzen wir

$$a_{nm} = \binom{m}{n} \frac{x^n}{m^n}, \tag{1.6.30}$$

so ist

$$a_{0m} = 1, \qquad a_{1m} = x \tag{1.6.31}$$

und für alle $2 \leq n \leq m$ gilt

$$
\begin{aligned}
a_{nm} &= \frac{m!}{(m-n)!n!}\frac{x^n}{m^n} \\
&= \frac{(m-n+1)(m-n+2)\cdots(m-n+n)}{m^n}\frac{x^n}{n!} \\
&= \underbrace{\Bigl(1-\frac{n-1}{m}\Bigr)\Bigl(1-\frac{n-2}{m}\Bigr)\cdots\Bigl(1-\frac{1}{m}\Bigr)}_{<1}\frac{x^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{1.6.32}
$$

Die Reihe $((\frac{|x|^n}{n!}))$ ist daher eine konvergente Majorante, so daß nach Lemma 1.6.3 die $((a_{nm}))$ gleichmäßig in m konvergieren.

Weiter gilt

$$
\lim_m a_{nm} = \frac{x^n}{n!}, \tag{1.6.33}
$$

woraus sich die Aussage des Corollars wegen Theorem 1.6.8 unmittelbar ergibt. □

1.6.10. Aufgaben.

1 Man zeige, daß die Reihe $((x^n e^{-n|x|}))$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

2 Sei $E \neq \emptyset$, F ein Banachraum und $f_n, g_n : E \to F$ gleichmäßig konvergente Folgen mit Limites f bzw. g, dann konvergiert die Folge $f_n + g_n$ gleichmäßig nach $f + g$.

Ist F ein Hilbertraum und sind die Grenzfunktionen f, g gleichmäßig beschränkt auf E, d.h. ist $\sup_{x\in E}\|f(x)\| < \infty$, entsprechend für g, dann folgt

$$
\langle f_n, g_n\rangle \rightrightarrows \langle f, g\rangle.
$$

3 Sei $f_n : E \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent mit Limes f und existiert eine Konstante $c > 0$, so daß

$$
|f_n(x)| \geq c \qquad \forall\, x \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N},
$$

dann konvergiert f_n^{-1} gleichmäßig nach f^{-1}.

4 Sei $0 < \epsilon_n$ eine Nullfolge. Man beweise, daß die Funktionenfolge $f_n(x) = \sqrt{\epsilon_n^2 + |x|^2}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ nach $f(x) = |x|$ konvergiert.

5 Man beweise, daß die Reihe $((x^n(1-x)))$ auf $(-1, 1]$ zwar punktweise konvergiert, aber nicht gleichmäßig.

1.7. Komplexe Zahlen

1.7.1. Definition. Versehen wir die *additive* Gruppe $\mathbb{R}^2$ mit der sog. *komplexen* Multiplikation

$$(x,y)(x',y') = (xx' - yy', xy' + yx'), \tag{1.7.1}$$

so rechnet man leicht nach, daß hierdurch ein Körper $\mathbb{C}$ definiert wird, der Körper der *komplexen Zahlen.*

Die reellen Zahlen lassen sich mittels $x \to (x,0)$ isomorph in $\mathbb{C}$ einbetten, d.h. die Einbettung ist injektiv, additiv und multiplikativ.

1.7.2. Bemerkung. Definieren wir die *imaginäre Einheit* $i = (0,1)$, so gilt $i^2 = (-1,0) = -1$ und wir können die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z = (x,y), z' = (x',y')$ auf die Multiplikation reeller Zahlen zurückführen, indem wir $z = x + iy$ schreiben und formal multiplizieren

$$\begin{aligned} zz' &= (x+iy)(x'+iy') = xx' + iyx' + iy'x + i^2yy' \\ &= (xx' - yy') + i(x'y + y'x) \\ &= (xx' - yy', x'y + y'x) \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

1.7.3. Definition. Sei $z = x + iy$, so bezeichnen wir

(i) x als *Realteil* und y als *Imaginärteil* von z, in Zeichen,

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

(ii) Der *Betrag* von z ist definiert als $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(iii) $\bar{z} = x - iy$ nennen wir die zu z *konjugiert komplexe* Zahl.

(iv) Sei E eine beliebige Menge und $f : E \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, so definieren wir *Real-* und *Imaginärteil* von f, in Zeichen, $\operatorname{Re} f$ bzw. $\operatorname{Im} f$

$$\operatorname{Re} f : E \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Im} f : E \to \mathbb{R},$$

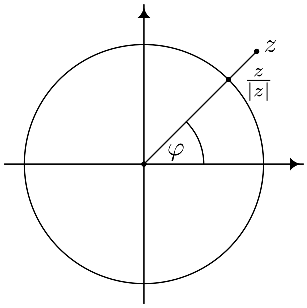
durch

$$\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re}(f(x)), \qquad \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im}(f(x)).$$

1.7.4. Bemerkung.

(i) $\mathbb{C}$ ist ein metrischer Raum versehen mit der Metrik von $\mathbb{R}^2$.

(ii) Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ läßt sich in der Form
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$
schreiben. φ heißt *Argument* von z, in Zeichen, $\varphi = \arg z$, siehe Ziffer 3.6.26 auf Seite 202.



(iii) Fassen wir die Bildung der konjugiert komplexen Zahl als Abbildung von $\mathbb{C}$ in sich auf, so ist diese Abbildung additiv, multiplikativ und *idempotent*, d.h.
$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \bar{\bar{z}} = z.$$

(iv) Für den Betrag gilt
$$|z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$$
und
$$|z| = |\bar{z}|, \qquad |z|^2 = z\bar{z}.$$

(v) Sei $z \neq 0$, so ist
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

1.7.5. Wenn eine Aussage sowohl für den Körper $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{C}$ gelten soll, z.B. in „Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ ...“, so kürzen wir dies mit dem Symbol $\mathbb{K}$ ab, das sowohl den Körper $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{C}$ repräsentiert, d.h. das Beispiel kann jetzt so formuliert werden „Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ...“.

1.7.6. Bemerkung. (i) Die Definition einer Norm in einem komplexen Vektorraum ist identisch mit der in Definition 1.4.3 gegebenen im Falle eines reellen Vektorraums, d.h. wir können in Definition 1.4.3 überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{K}$ ersetzen.

(ii) Lediglich die Definition eines Skalarprodukts müssen wir modifizieren, wenn wir verlangen, daß die quadratische Form $\langle x, x\rangle$ positiv definit sein soll, also insbesondere reell, denn offensichtlich kann die quadratische Form einer komplexen Bilinearform nicht reell sein, es sei denn, sie ist identisch 0.

Wir werden die Definition so formulieren, daß sie sowohl in reellen als auch komplexen Vektorräumen gilt.

1.7.7. Definition. Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. E heißt *Skalarproduktraum*, falls eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ existiert, die folgende Bedingungen erfüllt

(i) $\langle\cdot, y\rangle$ ist linear für alle $y \in E$.

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(iii) $\langle x, x\rangle > 0 \qquad \forall\, x \neq 0$ (Positive Definitheit)

Wir nennen die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *Skalarprodukt* oder auch *inneres Produkt.*

Bezüglich eines Skalarprodukts definieren wir eine (Skalarprodukt) *Norm* auf E

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7.3}$$

$\|\cdot\|$ ist eine Abbildung von $E \to \mathbb{R}_+$, die den Gesetzen von Definition 1.4.3 genügt.

1.7.8. Bemerkung. 1. Aus (ii) folgt, daß die quadratische Form $\langle x, x\rangle$ immer reell ist, so daß die Bedingung (iii) sinnvoll ist.

2. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so besagt (ii), daß das Skalarprodukt symmetrisch ist, d.h. die neue Definition stimmt in diesem Fall mit der alten überein.

3. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so bezeichnen wir das Verhalten, das in Bedingung (ii) zum Ausdruck kommt, als *hermitesch* und wir nennen eine Abbildung, die (i) und (ii) genügt, eine *hermitesche Sesquilinearform*[1]. In einem komplexen Vektorraum ist somit ein Skalarprodukt eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform.

1.7.9. Beispiele. (i) $\mathbb{K}^n = \{\, (x^i) \colon x^i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \,\}$ ist ein Skalarproduktraum mit dem *kanonischen* Skalarprodukt

$$\langle (x^i), (y^i)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{y^i} \tag{1.7.4}$$

(ii) Den bereits früher definierten Folgenraum l_2 können wir jetzt auch über $\mathbb{K}$ definieren

[1] Eine Form $\langle\cdot,\cdot\rangle$, die im ersten Argument linear und im zweiten *semilinear* ist, d.h. $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \bar{\mu}\langle x, z\rangle$ heißt Sesquilinearform.

$$l_2 = l_2(\mathbb{K}) = \{\, (x_i) \colon x_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 < \infty \,\} \tag{1.7.5}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_i), (y_i) \rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \overline{y_i}. \tag{1.7.6}$$

1.7.10. Proposition. *Sei E ein Skalarproduktraum über $\mathbb{K}$, so gilt*

(i) *die binomische Formel*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle, \tag{1.7.7}$$

(ii) *im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Polarisationsformel*

$$\begin{aligned} 4\langle x, y\rangle &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \\ &\quad + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2. \end{aligned} \tag{1.7.8}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Diese Relationen gelten natürlich auch für nicht definite Formen, so daß wir folgendes Corollar erhalten

1.7.11. Corollar. *Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, so ist im reellen Falle eine symmetrische Bilinearform und im komplexen Falle eine hermitesche Sesquilinearform vollständig durch die zugehörige quadratische Form bestimmt.*

1.7.12. Proposition. *Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann rührt die Norm genau dann von einem Skalarprodukt her, wenn die sog. Parallelogrammgleichung*

$$2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \tag{1.7.9}$$

erfüllt ist.

Beweis. Wenn die Norm eine Skalarproduktnorm ist, dann gilt die Parallelogrammgleichung, wie man durch Nachrechnen sofort sieht.

Den Beweis der anderen Richtung, führen wir in mehreren Schritten.

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Wenn E ein reeller Vektorraum ist, so definieren wir das Skalarprodukt als

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big), \tag{1.7.10}$$

vgl. (1.7.7). Aus der Definition folgt unmittelbar, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit und symmetrisch ist, so daß wir nur noch die Linearität nachweisen müssen.

(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *ist additiv.*

Seien $x, y, z \in E$, dann soll gelten

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle. \tag{1.7.11}$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Relation äquivalent ist zu der Identität

$$\begin{aligned} \|x + y + z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y + z\|^2 \\ - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2, \end{aligned} \tag{1.7.12}$$

die wir unter mehrmaliger Benutzung der Parallelogrammgleichung herleiten werden.

Es gilt

$$\begin{aligned} \|x + y + z\|^2 + \|y + z - x\|^2 &= 2\big(\|y + z\|^2 + \|x\|^2\big), \\ \|x + y + z\|^2 + \|x + z - y\|^2 &= 2\big(\|x + z\|^2 + \|y\|^2\big), \\ \|x + y + z\|^2 + \|x + y - z\|^2 &= 2\big(\|x + y\|^2 + \|z\|^2\big), \end{aligned} \tag{1.7.13}$$

sowie

$$\begin{aligned} \|x - z + y\|^2 + \|y + z - x\|^2 &= 2\big(\|x - z\|^2 + \|y\|^2\big), \\ \|x + y + z\|^2 + \|x + z - y\|^2 &= 2\big(\|x + z\|^2 + \|y\|^2\big). \end{aligned} \tag{1.7.14}$$

Addieren wir jetzt die Gleichungen in (1.7.13) und vereinfachen das Ergebnis unter Berücksichtigung von (1.7.14), so erhalten wir (1.7.12).

(ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

Aus der Additivität erhalten wir durch Induktion nach n

$$n\langle x, y \rangle = \langle nx, y \rangle \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.7.15}$$

Sei $m \in \mathbb{N}^*$, so schließen wir weiter

$$n\langle x, y \rangle = n\langle m\frac{1}{m}x, y \rangle = m\langle \frac{n}{m}x, y \rangle, \tag{1.7.16}$$

d.h. (ii) gilt für alle rationalen λ und damit auch für alle reellen, denn jede reelle Zahl läßt sich durch rationale Zahlen approximieren und beide Seiten der Gleichung in (ii) konvergieren bei diesem Prozeß.

2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Wenn E ein komplexer Vektorraum ist, so können wir ihn natürlich auch als reellen Vektorraum auffassen und erhalten die Existenz eines reellen Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$, das die Norm induziert. Wir definieren dann das komplexe Skalarprodukt durch

$$\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x,iy\rangle_{\mathbb{R}}. \tag{1.7.17}$$

Man rechnet leicht nach, daß hierdurch eine hermitesche Sesquilinearform definiert ist mit

$$\langle x,x\rangle = \langle x,x\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x,ix\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x,x\rangle_{\mathbb{R}}, \tag{1.7.18}$$

denn

$$\begin{aligned} \langle x,ix\rangle_{\mathbb{R}} &= \frac{1}{2}\big(\|x+ix\|^2 - \|x\|^2 - \|ix\|^2\big) \\ &= \frac{\|x\|^2}{2}\big(|1+i|^2 - 1 - |i|^2\big) = 0. \end{aligned} \tag{1.7.19}$$

□

1.7.13. Aufgaben.

1 Beweisen Sie, daß es zu jedem $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ genau eine komplexe Zahl w gibt mit $w^2 = z$ und $\operatorname{Re} w > 0$. Man nennt w den *Hauptteil der Wurzel* von z und schreibt $w = \sqrt{z}$.

2 Bestimmen Sie $\sqrt{i}$. Welche weiteren Lösungen besitzt die Gleichung $w^2 = i$?

3 Für $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ gilt

$$\sqrt{z} = \sqrt{(|z| + \operatorname{Re} z)/2} + i\,\operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)\sqrt{(|z| - \operatorname{Re} z)/2},$$

wobei

$$\operatorname{sign} a = \begin{cases} 1, & a \geq 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Wir nennen $\operatorname{sign} a$ das *Signum* von a.

4 Man beweise Proposition 1.7.10.

KAPITEL 2

Stetigkeit

2.1. Topologische Grundbegriffe

In diesem Abschnitt betrachten wir einen metrischen Raum (E, d) und wollen die Begriffe *offene* und *abgeschlossene Menge*, *Häufungspunkt einer Menge* und *Randpunkt* einführen.

2.1.1. Definition. Sei (E, d) ein metrischer Raum, $r > 0$ und $x_0 \in E$, dann definieren wir

(i) die *offene Kugel* um x_0 mit Radius r

$$B_r(x_0) = \{\, x \in E \colon d(x_0, x) < r \,\}, \tag{2.1.1}$$

(ii) die *abgeschlossene Kugel* um x_0 mit Radius r

$$\bar{B}_r(x_0) = \{\, x \in E \colon d(x_0, x) \leq r \,\}, \tag{2.1.2}$$

(iii) die *Sphäre* um x_0 mit Radius r

$$S_r(x_0) = \{\, x \in E \colon d(x_0, x) = r \,\}. \tag{2.1.3}$$

2.1.2. Definition. (i) $A \subset E$ heißt *offen*, falls

$$\underset{x \in A}{\forall}\ \underset{r>0}{\exists}\ B_r(x) \subset A. \tag{2.1.4}$$

Die Menge aller offenen Teilmengen von E bezeichnen wir mit $\mathcal{O}$. Wir nennen $\mathcal{O}$ auch die *Topologie* von E.

(ii) $A \subset E$ heißt *abgeschlossen*, falls $\complement A = E \backslash A$ offen ist. Die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von E bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$.

(iii) Sei $x \in E$, $U \subset E$ heißt *Umgebung* von x, falls eine Kugel $B_r(x)$ existiert, so daß

$$B_r(x) \subset U. \tag{2.1.5}$$

Die Menge aller Umgebungen von x bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$ und nennen sie den *Umgebungsfilter* von x.

2.1.3. Bemerkung.

1. Der ganze Raum E und die leere Menge $\emptyset$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.
2. Jede Kugel $B_r(x)$ in einem metrischen Raum ist offen und jede abgeschlossene Kugel $\bar{B}_r(x)$ abgeschlossen.
3. Sei $E = \mathbb{R}^n$ und $U = B_r(x_0) \,\dot{\cup}\, \{a\}$. Dann ist U Umgebung für alle $x \in B_r(x_0)$, aber keine Umgebung für a.
4. Das Intervall $[a, b)$ ist weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
5. Endliche Mengen sind in jedem metrischen Raum abgeschlossen.
6. Sei E ein metrischer Raum mit der diskreten Metrik versehen, vgl. Beispiel 2 von Beispiele 1.4.2 auf Seite 75, so ist jede Teilmenge offen und damit auch abgeschlossen.
7. Eine Sphäre $S_r(x_0)$ in einem metrischen Raum ist abgeschlossen.

Beweis. Übungsaufgabe.

2.1.4. Proposition. *Sei $A \subset E$, dann gilt*

$$A \in \mathcal{O} \iff \underset{x \in A}{\forall}\ \underset{G \in \mathcal{O}}{\exists}\ x \in G \ \wedge\ G \subset A. \tag{2.1.6}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

2.1.5. Proposition. *Vereinigungen und Durchschnitte offener bzw. abgeschlossener Mengen genügen folgenden Regeln*

(i) *Sei $(A_i)_{i \in I}, A_i \in \mathcal{O}$, eine Familie von offenen Mengen, so ist*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}.$$

(ii) *Seien $A_i \in \mathcal{O}, i = 1, \ldots, n$, so ist*

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O}.$$

(iii) *Sei $(A_i)_{i \in I}, A_i \in \mathcal{F}$, eine Familie von abgeschlossenen Mengen, so ist*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}.$$

(iv) *Seien* $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, \ldots, n$, *so ist*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}.$$

Beweis. (i) und (ii) sind Übungsaufgaben.
(iii) und (iv) folgen aus (i) bzw. (ii) durch Komplementbildung. □

2.1.6. Definition. Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Umgebungen eines Punktes $x \in E$ heißt *Umgebungsbasis* von x, falls

$$\forall_{U\in\mathcal{U}(x)} \ \exists_{i\in I} \quad U_i \subset U. \tag{2.1.7}$$

2.1.7. Beispiel. Die Folge der Kugeln $(B_{\frac{1}{n}}(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ bildet eine Umgebungsbasis von x oder allgemein $(B_{\epsilon_n}(x))$ für jede Nullfolge (ϵ_n), $0 < \epsilon_n$.

2.1.8. Definition. Sei E ein metrischer Raum und $A \subset E$. Wir definieren dann

(i) $x \in A$ heißt *innerer Punkt* von A, falls $A \in \mathcal{U}(x)$. Die Menge aller innerer Punkte von A nennen wir das *Innere* von A, in Zeichen

$$\mathring{A} = \{\, x \in A \colon x \text{ innerer Punkt} \,\}.$$

Gelegentlich kürzen wir das Innere von A auch mit $\mathrm{int}(A)$ ab.

(ii) $x \in E$ heißt *Berührpunkt* von A, falls

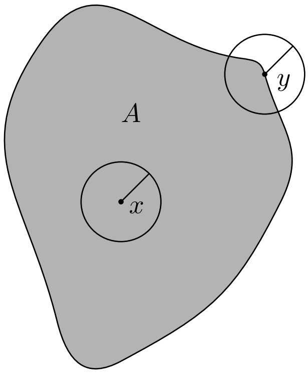
$$U \cap A \neq \emptyset \qquad \forall\, U \in \mathcal{U}(x).$$

Die Menge aller Berührpunkte von A bezeichnen wir als *abgeschlossene Hülle* oder auch *Abschluß* von A und schreiben dafür

$$\bar{A} = \{\, x \in E \colon x \text{ Berührpunkt von } A \,\}.$$

Manchmal verwenden wir auch das Symbol $\mathrm{cl}(A)$.

(iii) $x \in E$ heißt *Randpunkt* von A, falls in jeder Umgebung von x Punkte aus A und $\complement A$ liegen. Die Menge aller Randpunkte von A nennen wir den *Rand* von A, in Zeichen, ∂A.



In der nebenstehenden Graphik ist x ein innerer Punkt und y ein Randpunkt der Menge A.

2.1.9. Proposition. *Wir können das Innere einer Menge $A \subset E$ folgendermaßen beschreiben*

$$\overset{\circ}{A} = \{\, x \in A \colon \underset{r>0}{\exists} \quad B_r(x) \subset A \,\} \tag{2.1.8}$$

bzw.

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{\, G \colon G \in \mathcal{O} \ \wedge \ G \subset A \,\}, \tag{2.1.9}$$

d.h. $\overset{\circ}{A}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der Definition.

Hieraus schließen wir auch weiter, daß $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{O}$, denn nach (2.1.8) ist

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} B_{r(x)}(x) \tag{2.1.10}$$

und somit offen nach Proposition 2.1.5, (i), d.h. $\overset{\circ}{A}$ ist in der rechten Seite von (2.1.9) enthalten.

Ist andererseits $G \subset A$ offen, so ist A Umgebung für alle $x \in G$ und somit $G \subset \overset{\circ}{A}$. Damit ist auch die zweite Behauptung bewiesen. □

2.1.10. Proposition. *Seien $A, B \subset E$, so gilt*

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \tag{2.1.11}$$

und

$$\operatorname{int}(A \cap B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}. \tag{2.1.12}$$

Beweis. Die erste Behauptung ist klar.

Die zweite Behauptung läßt sich ebenfalls leicht herleiten, denn aus der ersten folgt einmal die Inklusion $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Ferner ist $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ eine offene Menge, die in $A \cap B$ enthalten ist und damit auch im Inneren von $A \cap B$, vgl. (2.1.9). □

2.1.11. Proposition. *Seien $A, B \subset E$, so gilt*

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \bar{A} \subset \bar{B} \tag{2.1.13}$$

und

$$\bar{A} = \bigcap \{ F : F \in \mathfrak{F} \ \wedge \ A \subset F \}, \tag{2.1.14}$$

d.h. $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition.

Zum Beweis der zweiten Behauptung halten wir zunächst fest, daß $F = \bar{F}$, falls F abgeschlossen. Zusammen mit (2.1.13) folgt hieraus, daß $\bar{A}$ in der rechten Seite von (2.1.14) enthalten ist.

Andererseits ist $\bar{A}$ abgeschlossen, denn sei $x \in \complement\bar{A}$, so gibt es eine offene Umgebung U von x, so daß $U \cap A = \emptyset$. Da eine offene Menge Umgebung ist für alle ihre Elemente, heißt das $U \subset \complement\bar{A}$; somit ist $\complement\bar{A}$ offen.

Aus der Abgeschlossenheit von $\bar{A}$ schließen wir aber, daß die rechte Seite von (2.1.14) in $\bar{A}$ enthalten ist. Damit ist alles bewiesen. □

2.1.12. Proposition. *Seien $A, B \subset E$, so gilt*

$$\complement\bar{A} = \operatorname{int}(\complement A) \tag{2.1.15}$$

und

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \tag{2.1.16}$$

Beweis. Wir zeigen wieder die wechselseitige Inklusion der jeweiligen Mengen.

1. $\complement\bar{A} \subset \operatorname{int}(\complement A)$.

$\complement\bar{A}$ ist offen und Teilmenge von $\complement A$ und somit auch Teilmenge von $\operatorname{int}(\complement A)$.

2. $\operatorname{int}(\complement A) \subset \complement \bar{A}$.

$\operatorname{int}(\complement A)$ ist offen und somit Umgebung für alle seine Elemente; ferner gilt $\operatorname{int}(\complement A) \cap A = \emptyset$, woraus die Inklusion folgt.

3. $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

Folgt aus Proposition 2.1.11, da die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossenen ist, vgl. Proposition 2.1.5, (iv).

4. $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Aus (2.1.13) erhalten wir, daß $\bar{A}, \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. □

2.1.13. Beispiele.

1. Sei $A = [a, b) \subset \mathbb{R}$, so ist

$$\mathring{A} = (a, b), \quad \bar{A} = [a, b], \quad \partial A = \{a, b\}.$$

2. Sei $A = B_r(x_0) \,\dot{\cup}\, \{a\} \subset \mathbb{R}^n$, $r < |a - x_0|$, so ist

$$\mathring{A} = B_r(x_0), \quad \bar{A} = \bar{B}_r(x_0) \,\dot{\cup}\, \{a\}, \quad \partial A = S_r(x_0) \,\dot{\cup}\, \{a\}.$$

3. Sei E ein beliebiger metrischer Raum und $A \subset E$, so gilt

$$\partial A = \partial \complement A, \quad \bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A, \quad E = \mathring{A} \cup \operatorname{int}(\complement A) \cup \partial A.$$

4. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ endlich, so ist

$$A = \bar{A} = \partial A.$$

5. Sei E ein Raum mit diskreter Metrik und $A \subset E$, so ist

$$A = \mathring{A} = \bar{A} \quad \text{und} \quad \partial A = \emptyset.$$

2.1.14. Definition. Sei E ein metrischer Raum und $A, B \subset E$. Wir definieren als *Distanz* von A und B

$$d(A, B) = \operatorname{dist}(A, B) = \inf\{\, d(x, y) \colon x \in A,\ y \in B \,\}. \tag{2.1.17}$$

Ist $A = \{x\}$, so schreiben wir $d(x, B)$ anstelle von $d(\{x\}, B)$.

2.1.15. Definition. $x \in E$ heißt *Häufungspunkt* (HP) von A, falls

$$\big(U \backslash \{x\}\big) \cap A \neq \emptyset \qquad \forall\, U \in \mathfrak{U}(x). \tag{2.1.18}$$

Jeder Häufungspunkt ist also insbesondere ein Berührpunkt.

2.1.16. Bemerkung. Sei $A = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \} \subset E$, so müssen wir zwischen den Häufungspunkten von A und den Häufungspunkten der Folge (x_n) unterscheiden. Jeder Häufungspunkt von A ist Häufungspunkt der Folge, aber nicht umgekehrt, z.B. wenn die Folge stationär ist, d.h. $x_n = a \; \forall \, n$.

2.1.17. Beispiele.

1. Sei $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\bar{B}_r(x_0)$ gleich der Menge der HP.
2. Sei $A = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \} \subset E$ und gelte $x_n \to a \notin A$, so ist a HP von A und $\bar{A} = A \cup \{a\}$. Letzteres gilt auch ohne die Annahme $a \notin A$.
3. Betrachte $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, so ist jede reelle Zahl HP von $\mathbb{Q}$ und von $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

2.1.18. Definition. Seien $A, B \subset E$. Wir sagen B liegt *dicht bezüglich* A, falls $A \subset \bar{B}$, und B liegt *dicht in* E, falls $E = \bar{B}$.

2.1.19. Beispiel. $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ oder allgemeiner $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

Teilräume

2.1.20. Definition. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (E, d) ist ebenfalls ein metrischer Raum, wenn wir die Metrik auf $A \times A$ einschränken. Die so definierte Metrik auf A heißt *induzierte Metrik*. A, mit der induzierten Metrik versehen, bezeichnen wir als *Teilraum*.

Die bezüglich der induzierten Metrik offenen Mengen von A nennen wir auch *relativ* offen und die entsprechende Topologie, $\mathcal{O}_A$, auch *Relativtopologie*.

2.1.21. Proposition. *Fassen wir $A \subset E$ als Teilraum auf, so lassen sich die relativ offenen Mengen darstellen als*

$$\mathcal{O}_A = \{ G \cap A : G \in \mathcal{O} \}. \tag{2.1.19}$$

Beweis. Bezeichnen wir die Kugeln in A mit $\hat{B}_r(x)$, so ist für $x \in A$

$$\hat{B}_r(x) = B_r(x) \cap A. \tag{2.1.20}$$

Sei nun $\hat{G} \in \mathcal{O}_A$, so können wir $\hat{G}$ als Vereinigung von offenen Kugeln darstellen und schließen

$$\begin{aligned} \hat{G} = \bigcup_{x \in \hat{G}} \hat{B}_{r(x)}(x) &= \bigcup_{x \in \hat{G}} \big(B_{r(x)}(x) \cap A \big) \\ &= A \cap \bigcup_{x \in \hat{G}} \big(B_{r(x)}(x) \big), \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

daher ist die linke Seite von (2.1.19) in der rechten enthalten.

Zum Beweis der umgekehrten Richtung verwenden wir den gleichen Schluß, nur daß wir jetzt jedes $G \in \mathcal{O}$ als Vereinigung von Kugeln schreiben. $\square$

Als unmittelbares Corollar erhalten wir

2.1.22. Corollar. *$\hat{U} \subset A$ ist genau dann relative Umgebung eines Punktes $x \in A$, wenn eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert, so daß*

$$\hat{U} = U \cap A. \tag{2.1.22}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Allgemeine topologische Räume

2.1.23. In metrischen Räumen E haben wir offene Mengen definiert und gesehen, daß die Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Mengen aus E folgende Bedingungen erfüllt

$$(\mathcal{O}_1) \qquad \emptyset, E \in \mathcal{O}$$

$$(\mathcal{O}_2) \qquad A_i \in \mathcal{O} \quad \forall\, i \in I \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$$

$$(\mathcal{O}_3) \qquad A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O}$$

Diese Eigenschaften kann man als Definition für einen sog. *topologischen Raum* nehmen.

2.1.24. Definition. Eine Menge E heißt *topologischer Raum*, falls ein System von Teilmengen $\mathcal{O}$ existiert, das den Bedingungen $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_3$ genügt. Die Mengen $A \in \mathcal{O}$ heißen *offen* und $\mathcal{O}$ selbst bezeichnen wir als die *Topologie* von E.

Mittels der Topologie können wir Umgebungen eines Punktes $x \in E$ definieren.

2.1.25. Definition. Eine Menge $U \in E$ heißt Umgebung des Punktes x, falls eine offene Menge A existiert, so daß

$$x \in A \subset U. \tag{2.1.23}$$

Das System aller Umgebungen von x nennen wir den *Umgebungsfilter* von x, in Zeichen, $\mathcal{U}(x)$.

E heißt *Hausdorffscher Raum*, falls zwei beliebige Punkte $x, y \in E$, $x \neq y$, immer disjunkte Umgebungen besitzen, d.h.

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \underset{U \in \mathcal{U}(x)}{\exists} \ \underset{V \in \mathcal{U}(y)}{\exists} \quad U \cap V = \emptyset. \tag{2.1.24}$$

Im Gegensatz zu metrischen Räumen ist diese *Trennungseigenschaft* nicht selbstverständlich.

2.1.26. Beispiele.

1. Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffscher topologischer Raum.
2. Im $\mathbb{R}^n$ setze
$$\mathcal{O} = \{\, B_r(0) \colon r \geq 1 \,\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}^n\},$$
so definiert $\mathcal{O}$ eine nicht-hausdorffsche Topologie.
3. Sei $E \neq \emptyset$ und $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$, dann stimmt die Topologie mit der von der diskreten Metrik erzeugten überein.

2.1.27. Definition (Relativtopologie)**.** Ist $(E, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subset E$, so definieren wir auf A die von $\mathcal{O}$ *induzierte* Topologie, auch *Relativtopologie* genannt, durch

$$\mathcal{O}_A = \{\, A \cap G \colon G \in \mathcal{O} \,\}. \tag{2.1.25}$$

2.1.28. Bemerkung. Ist E ein metrischer Raum und $A \subset E$, so stimmt nach Proposition 2.1.21 die induzierte Topologie mit der von der induzierten Metrik erzeugten überein.

2.1.29. Aufgaben.

1 Man beweise Bemerkung 2.1.3 und Proposition 2.1.4.

2 Man beweise die beiden ersten Aussagen von Proposition 2.1.5.

3 Man verifiziere die Behauptungen in Beispiele 2.1.13.

4 Man beweise Corollar 2.1.22.

5 Es gelten folgene Behauptungen

(i) Sei A eine offene Teilmenge eines metrischen Raumes E, dann gilt für jede Teilmenge $B \subset E$

$$A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}.$$

(ii) Es gibt offene Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$, so daß die vier Mengen $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$ alle verschieden sind.

(iii) Es gibt Intervalle $A, B \subset \mathbb{R}$, so daß

$$A \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B}$$

6 Man zeige, daß $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

2.2. Stetige Abbildungen

Seien E, E' metrische Räume und $f : E \to E'$ eine Abbildung. Aus der Schule kennen Sie vielleicht eine mögliche Definition für die Stetigkeit von f im Punkte x, nämlich,

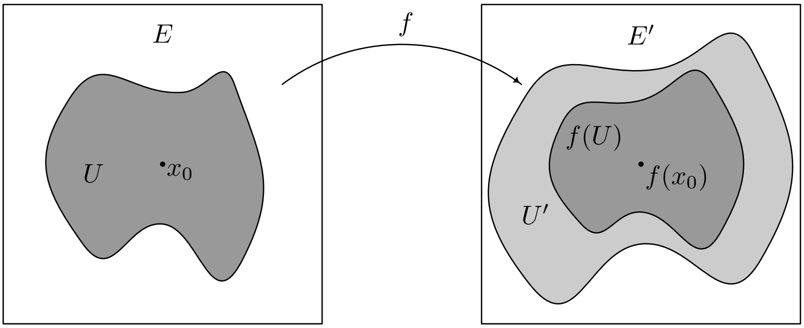
$$x_n \to x \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to f(x). \tag{2.2.1}$$

Diese Definition läßt sich allerdings nicht direkt auf topologische Räume übertragen, da im allgemeinen keine abzählbaren Umgebungsbasen existieren. Eine bessere Definiton, die sowohl in metrischen als auch in allgemeinen topologischen Räumen gilt, ist folgende—wir formulieren sie gleichwohl nur für metrische Räume—

2.2.1. Definition. Seien E, E' metrische Räume und $f : E \to E'$ eine Abbildung. f heißt *stetig* in $x_0 \in E$, falls

$$\underset{U' \in \mathfrak{U}(f(x_0))}{\forall} \quad \underset{U \in \mathfrak{U}(x_0)}{\exists} \quad f(U) \subset U' \tag{2.2.2}$$

f heißt stetig in E, falls f in jedem Punkt von E stetig ist.



Bevor wir die verschiedenen äquivalenten Formulierungen für Stetigkeit zeigen, möchten wir folgende Vereinbarung treffen

2.2.2. Vereinbarung. Die Metriken in den metrischen Räumen E, E' sind natürlich verschieden und müßten auch mit verschiedenen Symbolen d, d' bezeichnet werden, doch wollen wir übereinkommen, die Metriken immer nur mit dem Symbol d abzukürzen. Sind E, E' normierte Räume, so verwenden wir entsprechend das Zeichen $\|\cdot\|$ für die Normen in beiden Räumen.

2.2.3. Proposition. *Seien E, E' metrische Räume und $f : E \to E'$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent*

(i) $\quad f$ *stetig in* x_0

(ii) $\quad \underset{U' \in \mathcal{U}(f(x_0))}{\forall} \quad f^{-1}(U') \in \mathcal{U}(x_0)$

(iii) $\quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{\delta>0}{\exists} \quad f(B_\delta(x_0) \subset B_\epsilon(f(x_0))$

(iv) $\quad \underset{x_n \to x_0}{\forall} \quad f(x_n) \to f(x_0)$

Ferner gilt

(v) $\quad f \text{ stetig in } E \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{A' \in \mathcal{O}'}{\forall} f^{-1}(A') \in \mathcal{O}$

Beweis. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)" Sei $U' \in \mathcal{U}(f(x_0))$, dann existiert $U \in \mathcal{U}(x_0)$, so daß $f(U) \subset U'$ und daher gilt $U \subset f^{-1}(U')$.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)" Sei $\epsilon > 0$, so existiert $\delta > 0$, so daß $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$ oder $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$.

„(iii) $\Longrightarrow$ (iv)“ Seien $x_n \to x_0$ und $\epsilon > 0$ gegeben, wähle $\delta > 0$, so daß $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$. Dann liegen f.a. x_n in $B_\delta(x_0)$ und somit auch f.a. $f(x_n)$ in $B_\epsilon(f(x_0))$.

„(iv) $\Longrightarrow$ (i)“ Widerspruchsbeweis; Übungsaufgabe.

„(v), $\Longrightarrow$“ Sei $A' \in \mathcal{O}'$ und $x_0 \in A = f^{-1}(A')$. Aus (ii) schließen wir dann, daß $A \in \mathcal{U}(x_0)$, d.h. es existiert eine Kugel $B_\epsilon(x_0) \subset A$, woraus die Offenheit von A folgt.

„(v), $\Longleftarrow$“ Sei $x_0 \in E$ beliebig und $U' \in \mathcal{U}(f(x_0))$. Dann existiert eine offene Menge A' mit $f(x_0) \in A' \subset U'$, und wir folgern, daß $A = f^{-1}(A')$ eine offene Umgebung von x_0 ist, deren Bild in A' enthalten ist. □

2.2.4. Bemerkung. Die Aussage in Proposition 2.2.3, (iii) läßt sich auch anders formulieren, nämlich: Eine Abbildung $f : E \to E'$ ist genau dann stetig in $x_0 \in E$, falls

$$\forall_{\epsilon>0} \; \exists_{\delta>0} \quad d(x_0, x) < \delta \implies d(f(x_0), f(x)) < \epsilon. \tag{2.2.3}$$

2.2.5. Beispiel. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist stetig, denn sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ und $|y| < 1$, so ist

$$|f(x_0 + y) - f(x_0)| = |y||y + 2x_0| < \epsilon, \tag{2.2.4}$$

falls $|y| < \frac{\epsilon}{1+2|x_0|}$.

2.2.6. Proposition (Komposition von stetigen Abbildungen)**.** *Sei $f : E \to E'$ stetig in x_0 und $g : E' \to E''$ stetig in $f(x_0)$, so ist $g \circ f$ stetig in x_0.*

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung in Proposition 2.2.3, (ii). Sei U'' eine Umgebung von $g(f(x_0))$, dann gilt

$$(g \circ f)^{-1}(U'') = f^{-1} \circ g^{-1}(U'') = f^{-1}(g^{-1}(U'')). \tag{2.2.5}$$

Wir wenden nun Proposition 2.2.3, (ii), zweimal an. □

2.2.7. Proposition. *Sei F ein Teilraum von E mit der induzierten Metrik versehen, dann gilt*

(i) *Die natürliche Einbettung $j_F : F \hookrightarrow E$ ist stetig.*

(ii) *Sei $f : E \to E'$ stetig in $x_0 \in F$, so ist die Restriktion $f_{|F}$ stetig in x_0.*

Beweis. (i) Sei $A \in \mathcal{O}$, dann ist

$$j_F^{-1}(A) = A \cap F \in \mathcal{O}_F, \tag{2.2.6}$$

woraus die Behauptung nach Proposition 2.2.3, (v), folgt.

(ii) Wir schreiben $f_{|F} = f \circ j_F$ und wenden dann Proposition 2.2.6 an. $\square$

2.2.8. Definition (gleichmäßige Stetigkeit)**.** Seien E, E' metrische Räume. Eine Abbildung $f : E \to E'$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists} \quad d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon. \tag{2.2.7}$$

Wenn wir diese Definition mit der Bedingung (2.2.3) vergleichen, sehen wir, daß bei gleichmäßiger Stetigkeit die Wahl von δ nur von ϵ abhängt, aber nicht von den Argumenten.

Insbesondere ist jede gleichmäßig stetige Funktion stetig, aber nicht umgekehrt, wie das Beispiel 2.2.5 lehrt: Die rechte Seite der Gleichung (2.2.4) wird bei festem y beliebig groß, wenn $|x_0|$ wächst.

Wir werden jedoch später sehen, daß auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen jede stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

2.2.9. Proposition. *Sind $f : E \to E'$ und $g : E' \to E''$ gleichmäßig stetige Abbildungen, so ist auch $g \circ f$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Übungsaufgabe.

2.2.10. Definition. Seien $(E, \mathcal{O}), (E', \mathcal{O}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : E \to E'$ heißt *Homöomorphismus*, falls

(i) f bijektiv ist und

(ii) f, f^{-1} stetig sind.

Die Räume E, E' heißen dann *homöomorph*.

2.2.11. Seien E, E' homöomorphe Räume und $f : E \to E'$ ein Homöomorphismus, so gilt

$$A \in \mathcal{O} \iff f(A) \in \mathcal{O}'. \tag{2.2.8}$$

Aus diesem Grund können wir eine topologische Aussage in E mittels des Homöomorphismus in eine topologische Aussage in E' transformieren und umgekehrt. Unter rein *topologischen* Gesichtspunkten lassen sich daher homöomorphe Räume identifizieren.

2.2.12. Beispiele. (i) Sei $E = E' = \mathbb{R}$ mit der kanonischen Metrik versehen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung $f(x) = x^3$, so ist f ein Homöomorphismus.

(ii) Der Logarithmus ist ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

2.2.13. Proposition. *Sind $f : E \to E'$ und $g : E' \to E''$ Homöomorphismen, so auch $h = g \circ f$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Proposition 2.2.6 und der Relation $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

2.2.14. Definition (Isometrie)**.** Seien E, E' metrische Räume und $f : E \to E'$ eine bijektive Abbildung. f heißt *Isometrie*, falls

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in E. \tag{2.2.9}$$

Jede Isometrie ist ein Homöomorphismus.

2.2.15. Bemerkung. Sei E ein metrischer Raum und E' eine beliebige Menge, die gleichmächtig zu E is,. dann kann jede Bijektion $f : E \to E'$ auf E' eine Metrik d' erzeugen durch die Festsetzung

$$d'(u, v) = d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) \qquad \forall\, u, v \in E' \tag{2.2.10}$$

f^{-1} ist in der durch f erzeugten Metrik eine Isometrie und damit natürlich auch f selbst, denn die Inverse einer Isometrie ist wieder eine Isometrie.

Die erweiterte reelle Achse $\overline{\mathbb{R}}$

2.2.16. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, ist eine Bijektion. Ihre Inverse $f^{-1} = g$ ist gegeben durch $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$ für $|x| < 1$. Wenn sich x den Intervallgrenzen nähert, läuft g nach ∞ bzw. $-\infty$. Bezeichnen wir mit I das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$ und mit $\overline{\mathbb{R}}$ die *erweiterte reelle Achse*, die definiert ist durch

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\},$$

so können wir f zu einer Bijektion von $\overline{\mathbb{R}}$ auf I fortsetzen, indem wir $f(\infty) = 1$ und $f(-\infty) = -1$ definieren. Da I, mit der üblichen Metrik $|\cdot|$ versehen, ein metrischer Raum ist, können wir mittels f auf $\overline{\mathbb{R}}$ eine Metrik d_0 erzeugen

$$d_0(x, y) = |f(x) - f(y)|. \tag{2.2.11}$$

Wir wollen auf $\overline{\mathbb{R}}$ immer diese Metrik betrachten.

Die von d_0 auf $\mathbb{R}$ induzierte Metrik ist von der auf $\mathbb{R}$ kanonischen Metrik verschieden, doch erzeugen beide die gleiche Topologie.

2.2.17. Proposition. *$(\mathbb{R}, d_0)$ und $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sind homöomorph.*

Beweis. Zum Beweis beachten wir, daß $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ein Homöomorphismus ist, wenn wir beide Mengen mit der kanonischen Metrik versehen, und $g : \big((-1,1), |\cdot|\big) \to (\mathbb{R}, d_0)$ eine Isometrie. Die Behauptung folgt dann aus Proposition 2.2.13 und der Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}, |\cdot|) \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f"'] & & (\mathbb{R}, d_0) \\
& \big((-1,1), |\cdot|\big) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.2.12}$$

□

2.2.18. Proposition. *Die Topologie von $\overline{\mathbb{R}}$ läßt sich folgendermaßen beschreiben*

(i) *$\mathbb{R}$ ist offen in $\overline{\mathbb{R}}$.*

(ii) *Die offenen Mengen von $\overline{\mathbb{R}}$, die in $\mathbb{R}$ enthalten sind, sind die üblichen offenen Mengen von $\mathbb{R}$.*

(iii) *Die Intervalle $(n, \infty] = \{\, x \in \overline{\mathbb{R}} \colon n < x \leq \infty \,\}$ und $[-\infty, -n) = \{\, x \in \overline{\mathbb{R}} \colon -\infty \leq x < -n \,\}$, $n \in \mathbb{N}$, sind offen in $\overline{\mathbb{R}}$ und bilden Umgebungsbasen von ∞ bzw. $-\infty$.*

Beweis. (i) $f : \overline{\mathbb{R}} \to I$ ist ein Homöomorphismus und somit ist $\mathbb{R} = f^{-1}\big((-1,1)\big)$ offen.

(ii) Folgt aus Proposition 2.2.17.

(iii) Betrachten wir zunächst Kugeln $B_r(\infty)$ um den Punkt ∞ mit Radius $0 < r \leq 1$

$$B_r(\infty) = \{\, x \in \overline{\mathbb{R}} \colon d_0(\infty, x) < r \,\}. \tag{2.2.13}$$

Für $x \neq \infty$ ist

$$d_0(\infty, x) = |f(\infty) - f(x)| = 1 - \frac{x}{1 + |x|}, \tag{2.2.14}$$

so daß die Forderung $d_0(\infty, x) < r$ äquivalent ist zu

$$1 - r < \frac{x}{1+|x|} = f(x), \tag{2.2.15}$$

oder, da $r \le 1$,

$$\frac{1-r}{r} = f^{-1}(1-r) < x. \tag{2.2.16}$$

Demnach ist für solche Werte von r

$$B_r(\infty) = (\frac{1-r}{r}, \infty] = \{\, x \in \overline{\mathbb{R}} \colon \frac{1-r}{r} < x \le \infty \,\}. \tag{2.2.17}$$

Entsprechend kann man zeigen, daß für $0 < r \le 1$

$$B_r(-\infty) = [-\infty, -\frac{1-r}{r}) = \{\, x \in \overline{\mathbb{R}} \colon -\infty \le x < -\frac{1-r}{r} \,\}. \tag{2.2.18}$$

Wenn r zwischen 0 und 1 variiert, bewegt sich $\frac{1-r}{r}$ zwischen ∞ und 0. Daher bilden die Umgebungen $U_t(\infty) = (t, \infty]$ bzw. $U_t(-\infty) = [-\infty, -t)$, $0 \le t < \infty$, Umgebungsbasen der Punkte ∞ bzw. $-\infty$. □

2.2.19. Man muß sich daher von der Topologie $\overline{\mathcal{O}}$ nur merken:

(i) Die Umgebungen von $x \in \mathbb{R}$ sind (im wesentlichen) die üblichen.

(ii) $U_t(\infty)$, $U_t(-\infty)$, $0 \le t < \infty$, sind Umgebungsbasen von ∞ bzw. $-\infty$.

2.2.20. Bemerkung. Wir vereinbaren die Sprechweise, daß eine reelle Folge (x_n) nach ∞ bzw. $-\infty$ konvergiert, wenn dies in $\overline{\mathbb{R}}$ zutrifft.

2.2.21. Bemerkung. Wir definieren $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und versehen $\overline{\mathbb{N}}$ mit der von $\overline{\mathbb{R}}$ induzierten Metrik. Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum E ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to E$. Ist (x_n) konvergent, so setzen wir φ auf $\overline{\mathbb{N}}$ fort, indem wir $\varphi(\infty) = \lim x_n$ definieren. Dann gilt

Sei $\varphi : \overline{\mathbb{N}} \to E$ eine Abbildung, so ist die Folge $x_n = \varphi(n)$ genau dann konvergent, wenn φ in ∞ stetig ist. Die Folge konvergiert dann nach $\varphi(\infty)$.

Fortsetzbarkeit von gleichmäßig stetigen Abbildungen

2.2.22. Lemma. *Sei E ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset E$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in A$ gilt, daß $\lim x_n \in A$.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Sei $A \in \mathcal{F}$ und $x_n \in A$, $x_n \to a$. Wäre $a \in \complement A \in \mathcal{O}$, so existierte eine Kugel $B_\epsilon(a) \subset \complement A$, in der dann f.a. Folgenglieder liegen müßten; Widerspruch.

„$\Longleftarrow$“ Gelte jetzt $\lim x_n \in A$ für alle konvergenten Folgen (x_n) aus A. Wir werden dann zeigen, daß $A = \bar{A}$ und somit abgeschlossen ist, vgl. Proposition 2.1.11.

Sei $a \in \bar{A}$, dann liegt in jeder Kugel $B_{\frac{1}{n}}(a)$ ein $x_n \in A$, so daß $a = \lim x_n$ und $\lim x_n \in A$ nach Voraussetzung. □

2.2.23. Lemma. *Seien f, g stetige Abbildungen von E nach E'. Dann ist die Koinzidenzmenge*

$$A = \{\, x \in E\colon f(x) = g(x) \,\} \tag{2.2.19}$$

abgeschlossen.

Beweis. Nach Lemma 2.2.22 genügt es zu zeigen, daß der Limes einer jeden konvergenten Folge aus A ebenfalls in A liegt.

Sei also $x_n \to a$, $x_n \in A$. Aus der Stetigkeit von f und g folgt dann $f(a) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(a)$. □

2.2.24. Proposition. *Seien f, g stetige Abbildungen von E nach E'. Wenn dann f und g auf einer dichten Teilmenge von E übereinstimmen, so ist $f = g$.*

Beweis. Die Menge

$$A = \{\, x \in E\colon f(x) = g(x) \,\} \tag{2.2.20}$$

ist abgeschlossen und soll andererseits dicht liegen, d.h. $A = E$. □

2.2.25. Theorem (stetige Fortsetzung)**.** *Sei A eine dichte Teilmenge eines metrischen Raumes E und sei f eine auf beschränkten Teilmengen gleichmäßig stetige Abbildung von A in einen vollständigen metrischen Raum E'. Dann besitzt f genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : E \to E'$. $\tilde{f}$ ist ebenfalls auf beschränkten Teilmengen gleichmäßig stetig.*

Beweis. (i) Fortsetzung heißt, daß $\tilde{f}_{|A} = f$. Daher schließen wir aus Proposition 2.2.24, daß eine Fortsetzung, falls sie existiert, eindeutig bestimmt ist.

(ii) Die Werte von $\tilde{f}$ auf $E \backslash A$ sind durch die Forderung, $\tilde{f}$ stetig, eindeutig festgelegt, denn sei $a \in E \backslash A$, dann gibt es eine Folge (x_n) aus A, die nach a konvergiert, so daß

$$\tilde{f}(a) = \lim \tilde{f}(x_n) = \lim f(x_n) \tag{2.2.21}$$

gelten muß, d.h. *eine stetige Fortsetzung von f existiert nur dann, wenn die Bildfolge $(f(x_n))$ einer konvergenten Folge (x_n), $x_n \in A$, konvergiert.*

Um dies nachweisen zu können, benötigen wir die Voraussetzungen f *gleichmäßig stetig auf beschränkten Teilmengen* und E' *vollständig*, denn, wir werden in dem nachfolgenden Lemma 2.2.28 beweisen, daß das Bild einer Cauchyfolge[1] unter einer gleichmäßig stetigen Abbildung wieder eine Cauchyfolge ist und daher—wegen der Vollständigkeit von E'—konvergiert.

(iii) Sei also $a \in E\backslash A$ und $a = \lim x_n$, $x_n \in A$, so existiert $\lim f(x_n)$. Wenn wir zeigen können, daß der Limes unabhängig ist von der Auswahl der a approximierenden Folge, so wir durch die Festsetzung

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \lim f(x_n), & x \in \complement A,\ x = \lim x_n,\ x_n \in A \end{cases} \tag{2.2.22}$$

eine Fortsetzung von f auf ganz E definiert.

Betrachte daher zwei Folgen $(x_n), (y_n)$ aus A, die nach $a \in \complement A$ konvergieren. Die Folgen sind beschränkt, d.h. sie liegen in einer beschränkten Menge $B \subset A$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig, dann existiert wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f in B $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in B$

$$d(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f(y)) < \epsilon, \tag{2.2.23}$$

d.h. es gilt $d(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$ für alle n, die der Bedingung $d(x_n, y_n) < \delta$ genügen; dies sind aber f.a. n, da $\lim x_n = \lim y_n$. Folglich ist $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$.

(iv) $\tilde{f}$ ist auf beschränkten Mengen gleichmäßig stetig, denn sei $B \subset E$ beschränkt—o.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß B offen ist—und $\epsilon > 0$ gegeben, so wähle $\delta > 0$, so daß (2.2.23) in $A \cap B$ gilt.

Genügen nun $x, y \in B$ der Abschätzung $d(x,y) < \delta$, so existieren Folgen $(x_n), (y_n)$ aus A, die nach x bzw. y konvergieren, so daß f.f.a. n gilt $x_n, y_n \in B$ und $d(x_n, y_n) < \delta$. Für diese Werte von n ist daher $d(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$, woraus im Limesfalle $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \le \epsilon$ folgt. □

2.2.26. Bemerkung. Ist in dem vorstehenden Theorem die Abbildung f in ganz A gleichmäßig stetig und nicht nur auf beschränkten Mengen, so ist auch die Fortsetzung $\tilde{f}$ auf ganz E gleichmäßig stetig.

2.2.27. Bemerkung. (i) Auf die Bedingung „*f gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen*“ kann nicht verzichtet werden, wie das Beispiel

[1] Beachte, daß jede Cauchyfolge beschränkt ist.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{1}{x} \end{aligned}$$

lehrt.

(ii) Die Bedingung „*E' vollständig*“ ist ebenfalls nötig—jedenfalls, wenn die Fortsetzung E nach E' abbilden soll—, betrachte z.B.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ x &\to x. \end{aligned}$$

2.2.28. Lemma. *Seien E, E' metrische Räume und sei $f : E \to E'$ auf beschränkten Mengen gleichmäßig stetig, dann ist das Bild jeder Cauchyfolge wieder eine Cauchyfolge.*

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchyfolge in E und sei $\epsilon > 0$. Da jede Cauchyfolge beschränkt ist, existiert eine Kugel B, die alle Glieder der Cauchyfolge enthält. Wähle $\delta > 0$, so daß (2.2.23) für alle $x, y \in B$ gilt. Dann existiert n_0, so daß

$$d(x_n, x_m) < \delta \qquad \forall\, n, m \geq n_0, \tag{2.2.24}$$

und somit nach (2.2.23)

$$d(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon \qquad \forall\, n, m \geq n_0. \tag{2.2.25}$$

□

2.2.29. Aufgaben.

1 Sei E ein metrischer Raum und $A \subset E$. Man beweise, daß $d(x, A)$ stetig ist in E.

2 Man beweise Proposition 2.2.9.

3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

dann gilt $f(x) = \lambda x$ mit einer reellen Zahl λ.

4 Sei $n \to r_n$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $I = [0, 1]$. Für $x \in I$ definiere

$$A(x) = \{\, n \in \mathbb{N} \colon r_n < x \,\}$$

und

$$f(x) = \sum_{n \in A(x)} 2^{-n}.$$

Dann ist die Einschränkung φ von f auf die Menge der irrationalen Zahlen stetig; φ kann aber nicht als stetige Funktion auf ganz I fortgesetzt werden.

5 Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

so ist f nur in 0 stetig.

6 Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, dann ist A stetig.

7 Seien E, E' metrische Räume und $f : E \to E'$. Dann gilt

$$f \quad \text{stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \quad \forall\, A \subset E.$$

8 Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$. Wir erweitern dann die Definition von *Limes inferior* und *Limes superior*, indem wir setzen $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$, falls zu jeder natürlichen Zahl k eine unendliche Teilmenge $I_k \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$a_n < -k \qquad \forall\, n \in I_k,$$

und entsprechend $\overline{\lim}\, a_n = \infty$, falls zu jeder natürlichen Zahl k eine unendliche Teilmenge $I_k \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$a_n > k \qquad \forall\, n \in I_k.$$

Wir treffen folgende Vereinbarungen

$$\infty + a = \infty \qquad \forall\, -\infty < a \le \infty \tag{1}$$

$$-\infty + a = -\infty \qquad \forall\, -\infty \le a < \infty \tag{2}$$

$$(-1)\infty = -\infty \tag{3}$$

$$a\,\infty = \operatorname{sign} a\,\infty \qquad \forall\, 0 \ne a \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$\frac{a}{\infty} = 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$\frac{a}{0} = \operatorname{sign} a\,\infty \qquad \forall\, 0 \ne a \in \mathbb{R} \tag{6}$$

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 0∞ und $\infty - \infty$ sind nicht definiert.

Es gelten dann folgende Limesbeziehungen

(i) $\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}(a_n + b_n)$

(ii) $\overline{\lim}(a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$

(iii) $\overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \le \overline{\lim}(a_n + b_n)$

(iv) $a_n \le b_n \implies \overline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, b_n \ \wedge\ \underline{\lim}\, a_n \le \underline{\lim}\, b_n$

falls beide Seiten der Ungleichungen definiert sind, und es gilt ferner, falls $a_n, b_n \ge 0$ und beide Seiten wieder definiert sind

(v) $\overline{\lim}(a_n b_n) \le \overline{\lim}\, a_n \ \overline{\lim}\, b_n$

(vi) $\overline{\lim}\, a_n \ \underline{\lim}\, b_n \le \overline{\lim}(a_n b_n)$

(vii) $\underline{\lim}\, a_n \ \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}(a_n b_n)$

(viii) $\overline{\lim}(\frac{1}{a_n}) = \frac{1}{\underline{\lim}\, a_n}$

Ferner gilt für eine beliebige Folge $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\underline{\lim}\, a_n = -\,\overline{\lim}(-a_n)$$

und

$$a = \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n \quad \Longleftrightarrow \quad a = \lim a_n .$$

2.3. Kompaktheit

2.3.1. Definition. Ein metrischer Raum E heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge (x_n) aus E einen Häufungspunkt besitzt. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt folgenkompakt, wenn A als Teilraum folgenkompakt ist.

2.3.2. Bemerkung. Äquivalent zur obigen Definition ist die Forderung, daß jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzen soll, da jeder Häufungspunkt Limes einer Teilfolge ist, vgl. Proposition 1.4.10 auf Seite 78.

2.3.3. Proposition. *Ein folgenkompakter Raum E ist vollständig und beschränkt.*

Beweis. (i) Die Vollständigkeit folgt aus der Tatsache, daß eine Cauchyfolge genau dann konvergiert, wenn sie einen Häufungspunkt besitzt.

(ii) Nach Definition 1.4.7, (vii), auf Seite 77, ist E beschränkt, wenn

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x,y \in E} d(x,y) < \infty. \tag{2.3.1}$$

Angenommen, E wäre unbeschränkt, dann gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Paare $(x_n, y_n) \in E \times E$ mit $d(x_n, y_n) > n$.

Wegen der Folgenkompaktheit könnten wir konvergente Teilfolgen (x_{n_k}), (y_{n_k}) auswählen, die wir gleich indizieren dürfen. Sei $x_0 = \lim x_{n_k}, y_0 = \lim y_{n_k}$, dann schließen wir aus Lemma 1.6.6

$$n_k < d(x_{n_k}, y_{n_k}) \to d(x_0, y_0); \tag{2.3.2}$$

Widerspruch. □

2.3.4. Theorem (Heine-Borel). *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann folgenkompakt, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$" Sei A folgenkompakt, dann ist A beschränkt und vollständig. Weiter ist $A \subset \mathbb{R}^n$ genau dann vollständig, wenn A abgeschlossen ist (Übungsaufgabe).

„$\Longleftarrow$" Die umgekehrte Richtung folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, Theorem 1.3.11: Sei (x_k) eine Folge aus A, dann ist (x_k) beschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge mit Limes $a \in \mathbb{R}^n$. Wegen der Abgeschlossenheit von A liegt aber $a \in A$, vgl. Lemma 2.2.22. □

2.3.5. Proposition. *Sei E folgenkompakt, dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele $x_i \in E, i = 1, \dots, n$, so daß*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i). \tag{2.3.3}$$

Beweis. Angenommen die Behauptung wäre falsch, dann gäbe es $\epsilon > 0$ und eine Folge (x_n) mit der Eigenschaft

$$x_n \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B_\epsilon(x_i) \tag{2.3.4}$$

für $n \geq 1$, d.h.

(2.3.5) in jedem $B_\epsilon(x_n)$ liegen nur endlich viele Glieder der Folge,

denn gelte

$$x_{n_k} \in B_\epsilon(x_m) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{2.3.6}$$

so wähle $n_k > m$ und $n = n_k$ in (2.3.4); Widerspruch.

Wir werden jetzt aus (2.3.5) eine Widerspruch herleiten. Die Folge (x_n) besitzt einen Häufungspunkt a. Sei $x_m \in B_\epsilon(a)$ oder gleichbedeutend $a \in B_\epsilon(x_m)$, dann wäre $B_\epsilon(x_m)$ eine Umgebung von a und es müßten unendlich viele Folgenglieder in dieser Umgebung liegen; Widerspruch zu (2.3.5). □

2.3.6. Proposition. *Sei E folgenkompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige Überdeckung von E mit offenen Mengen U_i, dann überdecken bereits endlich viele U_{i_k}, $k = 1, \dots, n$, E, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine endliche Teilüberdeckung.*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und benutzen dabei das Ergebnis aus Proposition 2.3.5.

Angenommen die Behauptung wäre falsch,

(2.3.7) dann gäbe es wegen Proposition 2.3.5 zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ eine Kugel mit Radius $\frac{1}{n}$, die in *keinem* U_i enthalten ist. Nennen wir die Kugeln $B_{\frac{1}{n}}(y_n)$.

Eine Teilfolge (y_{n_k}) der Mittelpunkte konvergierte dann wegen der Folgenkompaktheit nach einem Element y_0, das in einem U_{i_0} liegen müßte. Da U_{i_0} offen ist, gilt dann $y_{n_k} \in U_{i_0}$ f.f.a. k und damit auch $B_{\frac{1}{n_k}}(y_{n_k}) \subset U_{i_0}$ f.f.a. k, denn sei $z \in B_{\frac{1}{n_k}}(y_{n_k})$, so erhalten wir aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(y_0, z) &\leq d(z, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y_0) \\ &\leq \frac{1}{n_k} + d(y_{n_k}, y_0) \ \to 0. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

□

Aus dem gerade geführten Beweis schließen wir noch

2.3.7. Corollar (Lebesguesche Zahl)**.** *Sei E ein folgenkompakter metrischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung, dann existiert eine Zahl $r > 0$, so daß jede Kugel mit Radius r in mindestens einer Menge U_i enthalten ist. r heißt Lebesguesche Zahl.*

Beweis. Wäre das Corollar falsch, so wäre (2.3.7) richtig, was wir gerade widerlegt haben. □

Die Eigenschaften folgenkompakter Räume, die in Proposition 2.3.5 und Proposition 2.3.6 zum Ausdruck kommen, heißen *präkompakt* bzw. *kompakt.*

2.3.8. Definition. (i) Ein metrischer Raum E heißt *präkompakt*, falls zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_i \in E$, $i = 1, \dots, n$, existieren , so daß

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i). \tag{2.3.9}$$

(ii) Ein metrischer Raum E heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von E eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(iii) Teilmengen eines metrischen Raums heißen präkompakt bzw. kompakt, wenn sie als Teilräume diese Eigenschaft haben.

(iv) Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt A *relativ kompakt*, wenn der Abschluß $\bar{A}$ kompakt ist.

2.3.9. Bemerkung. *Kompaktheit* ist ein topologischer Begriff, *Präkompaktheit* nicht. Die Definition 2.3.8, (ii), gilt auch für allgemeine topologische Räume.

Wir wollen jetzt beweisen, daß in metrischen Räumen die Begriffe *folgenkompakt* und *kompakt* zusammenfallen.

2.3.10. Theorem. *Sei E ein metrischer Raum, dann sind äquivalent*

(i) *E ist folgenkompakt.*

(ii) *E ist präkompakt und vollständig.*

(iii) *E ist kompakt.*

Beweis. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“ Dies folgt aus Proposition 2.3.3 und Proposition 2.3.5.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“ Wir benutzen, daß jeder Teilraum eines präkompakten Raumes wieder präkompakt ist, vgl Lemma 2.3.11.

Sei nun $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von E und nehme an, daß keine endliche Teilüberdeckung existiert; wir werden dies zum Widerspruch führen, indem wir induktiv eine geschachtelte Folge von Mengen $A_n \neq \emptyset$ konstruieren

$$A_{n+1} \subset A_n, \quad \operatorname{diam} A_n \leq 2^{-n} \quad \forall\, n \tag{2.3.10}$$

mit der Eigenschaft, daß kein A_n von einer endlichen Teilfamilie der $(U_i)_{i\in I}$ überdeckt wird. Sei dann (y_n) eine Folge von Elementen $y_n \in A_n$, so bilden die y_n wegen (2.3.10) eine Cauchyfolge. Sei $y_0 = \lim y_n$, $y_0 \in U_{i_0}$, so folgt mit der Argumentation von (2.3.8), daß $A_n \subset U_{i_0}$ f.f.a. n; Widerspruch.

Konstruktion der Mengen A_n

1. $n = 1$ Wenn keine endliche Teilüberdeckung existiert, so gibt es eine Kugel B_1 mit Radius $r = 2^{-2}$, die nicht von einer endlichen Teilfamilie der $(U_i)_{i\in I}$ überdeckt wird. Setze $A_1 = B_1$.

2. Sei A_n schon konstruiert für $n \geq 1$, so fassen wir A_n als Teilraum auf und schließen, daß eine relative Kugel $A_{n+1} \subset A_n$ mit Radius $r = 2^{-(n+2)}$ existiert, die nicht von einer endlichen Teilfamilie der $(U_i)_{i\in I}$ überdeckt wird. Damit ist alles bewiesen.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“ Sei (x_n) eine Folge in E. Wenn kein Häufungspunkt der Folge existiert, dann besitzt jeder Punkt $x \in E$ eine offene Umgebung U_x in der nur endlich viele Folgenglieder liegen. Dies führt zu einem Widerspruch, da eine endliche Teilüberdeckung der $(U_x)_{x\in E}$ existieren soll. □

2.3.11. Lemma. *Sei E ein präkompakter Raum und $A \subset E$, dann ist auch A präkompakt.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, dann existieren endlich viele Kugeln $B_\epsilon(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, die E überdecken und damit auch A. Nehmen wir o.B.d.A. an, daß $A \cap B_\epsilon(x_i) \neq \emptyset \; \forall\, i$. Sei $y_i \in A \cap B_\epsilon(x_i)$, so folgt aus der Dreiecksungleichung $B_\epsilon(x_i) \subset B_{2\epsilon}(y_i)$ und daher

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{2\epsilon}(y_i). \tag{2.3.11}$$

□

2.3.12. Definition. Ein metrischer Raum E heißt *separabel*, wenn eine h.a. dichte Teilmenge $A \subset E$ existiert.

Wie aus Beispiel 2.1.19 ersichtlich, ist der $\mathbb{R}^n$ separabel.

2.3.13. Proposition. *Ein präkompakter Raum ist separabel.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ eine *endliche* Teilmenge $A_n \subset E$, so daß

$$E = \bigcup_{y\in A_n} B_{\frac{1}{n}}(y), \tag{2.3.12}$$

d.h. für ein beliebiges Element $x \in E$ ist

$$d(x, A_n) < \frac{1}{n} \qquad \text{(vgl. Definition 2.1.14)}. \tag{2.3.13}$$

Die Menge $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ ist dann h.a. und es gilt

$$d(x, A) \le d(x, A_n) < \frac{1}{n} \quad \forall\, x \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.3.14}$$

d.h. $d(x, A) = 0$ oder gleichbedeutend $\bar{A} = E$. □

2.3.14. Proposition. *Eine stetige Abbildung f eines kompakten metrischen Raumes E in einen metrischen Raum E' ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen die Behauptung wäre falsch, dann gäbe es $\epsilon > 0$ und Folgen (x_n), (y_n) in E, so daß

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \epsilon \le d(f(x_n), f(y_n)) \quad \forall\, n. \tag{2.3.15}$$

Wir könnten dann Teilfolgen (x_{n_k}), (y_{n_k}) auswählen, die nach x_0 bzw. y_0 konvergieren und würden aus (2.3.15) und der Stetigkeit von f schließen

$$d(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \epsilon \le d(f(x_0), f(y_0)) = 0; \tag{2.3.16}$$

Widerspruch. □

2.3.15. Proposition.

(i) *Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.*

(ii) *Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.*

Beweis. „(i)“ Jede kompakte Teilmenge ist vollständig, wie wir in Theorem 2.3.10 bewiesen haben, und folglich abgeschlossen.

„(ii)“ Jede Teilmenge eines kompakten Raumes ist präkompakt nach Lemma 2.3.11 und daher kompakt, wenn sie abgeschlossen und somit vollständig ist, vgl. Theorem 2.3.10. □

2.3.16. Proposition. *Seien E, E' metrische Räume, $f : E \to E'$ stetig und E kompakt, dann ist $f(E)$ kompakt.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß f surjektiv ist. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von E'. Dann ist $(V_i)_{i\in I}$, $V_i = f^{-1}(U_i)$, eine offene Überdeckung von E, vgl. Proposition 2.2.3, (v), und besitzt daher eine endliche Teilüberdeckung $(V_i)_{i\in J}$, $J \subset I$ endlich. Dann ist $(U_i)_{i\in J}$ eine endliche Überdeckung von E'. □

2.3.17. Theorem. *Sei $f : E \to \mathbb{R}$ stetig und E kompakt, dann gibt es $x_0, y_0 \in E$, so daß*

$$f(x_0) = \inf_{x\in E} f(x) \quad \text{und} \quad f(y_0) = \sup_{x\in E} f(x). \tag{2.3.17}$$

Beweis. Es genügt nachzuweisen, daß das Infimum von f angenommen wird—betrachte dann für das Supremum $-f$ anstelle von f.

Sei $x_n \in E$ eine sog. *Minimalfolge*, d.h.

$$f(x_n) \quad \to \quad \inf_{x\in E} f(x). \tag{2.3.18}$$

Eine solche Folge existiert sicherlich, da $f(E)$ kompakt und somit beschränkt[2] ist; wende dann Lemma 0.4.37, (ii), an.

Eine Teilfolge (x_{n_k}) konvergiert wegen der Kompaktheit von E nach einem Punkt x_0 und aus der Stetigkeit von f folgt schließlich die Behauptung. $\square$

2.3.18. Definition. Ein metrischer Raum E heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt $x \in E$ eine kompakte Umgebung besitzt.

Eine äquivalente Forderung ist, daß jeder Punkt $x \in E$ eine relativ kompakte offene Umgebung besitzt.

Der $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt.

2.3.19. Lemma. *In einem lokal kompakten metrischen Raum E besitzt jeder Punkt $x \in E$ eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen. Wir können die Umgebungsbasis sogar als Folge von kompakten Kugeln $\big(\bar{B}_{\epsilon_n}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\epsilon_n \to 0$, angeben.*

Beweis. Übungsaufgabe.

2.3.20. Theorem. *Sei E ein lokal kompakter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) *Es existiert eine aufsteigende Folge (Ω_n) von offenen, relativ kompakten Teilmengen Ω_n, so daß*

$$\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \quad \text{und} \quad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n. \tag{2.3.19}$$

(ii) *E ist abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen.*[3]

(iii) *E ist separabel.*

Zum Beweis des Theorems brauchen wir folgende Lemmata.

2.3.21. Lemma. (i) *Sei E ein separabler metrischer Raum, dann existiert eine h.a. Basis für die Topologie, d.h. es existieren h.a. viele offene Mengen $(A_n)_{n\in H}$, $H \subset \mathbb{N}$ h.a., so daß jede andere offene Menge A sich als Vereinigung von geeigneten Mengen A_n darstellen läßt*

$$A = \bigcup_{A_n \subset A} A_n. \tag{2.3.20}$$

[2] Auch wenn $f(E)$ möglicherweise unbeschränkt wäre, könnten wir eine Minimalfolge finden, wir müßten dann nur die Konvergenz in $\overline{\mathbb{R}}$ betrachten.

[3] Diese Eigenschaft nennt man auch *σ-kompakt*.

(ii) *Sei E separabel und lokal kompakt, dann existiert eine h.a. Basis aus relativ kompakten, offenen Mengen.*

Beweis. „(i)" Seien a_n, $n \in N \subset \mathbb{N}$, h.a. viele Elemente, die dicht in E liegen. Die Kugeln

$$\{ B_{\frac{1}{m}}(a_n) \colon n \in N,\ m \in \mathbb{N}^* \} \tag{2.3.21}$$

bilden dann eine h.a. Basis für die Topologie, denn sei $A \subset E$ offen und $x \in A$, so existiert eine Kugel $B_r(x) \subset A$. Wähle m und a_n so, daß $\frac{1}{m} < r$ und $a_n \in B_{\frac{1}{2m}}(x)$. Dann gilt $x \in B_{\frac{1}{2m}}(a_n) \subset A$, denn sei $y \in B_{\frac{1}{2m}}(a_n)$, so ist

$$d(y,x) \le d(y,a_n) + d(a_n,x) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}, \tag{2.3.22}$$

d.h. $y \in B_r(x) \subset A$.

„(ii)" Beim Beweis von (i) haben wir gesehen, daß es genügt nur Kugeln $B_{\frac{1}{m}}(a_n)$ zu betrachten, deren Radius genügend klein ist, d.h. für festes n muß m nicht alle positiven Zahlen durchlaufen, sondern nur *unendlich* viele.

Ist nun E zusätzlich lokal kompakt, so besitzt jedes a_n eine kompakte Umgebung U_n. Es gibt dann m_0, so daß $B_{\frac{1}{m_0}}(a_n) \subset U_n$.

Die Umgebungen

$$\{ B_{\frac{1}{m}}(a_n) \colon m \ge m_0 = m_0(n),\ n \in N \}, \tag{2.3.23}$$

sind dann alle relativ kompakt und bilden nach dem unter „(i)" bewiesenen ebenfalls eine Basis für die Topologie. □

2.3.22. Lemma. *Sei E ein lokal kompakter metrischer Raum E, $K \subset E$ kompakt und $V \subset E$ eine offene Teilmenge, die K enthält. Dann existiert eine relativ kompakte, offene Menge Ω, so daß*

$$K \subset \Omega \subset \bar{\Omega} \subset V. \tag{2.3.24}$$

Beweis. Zu jedem $x \in K$ existiert eine relativ kompakte, offene Umgebung $U(x)$, so daß $U \subset \bar{U} \subset V$; wähle z.B. $U = B_r(x)$, wobei wir annehmen, daß $\bar{B}_{2r}(x) \subset V$ kompakt ist, siehe Lemma 2.3.19. Da die Familie $(K \cap U(x))_{x \in K}$ eine offene Überdeckung des Teilraums K ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, d.h.

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) = \Omega. \tag{2.3.25}$$

Ω ist offen, relativ kompakt und $\bar{\Omega} \subset V$, denn

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U(x_i)} \subset V \tag{2.3.26}$$

und die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist wieder kompakt, wie als Übungsaufgabe gezeigt werden soll. □

2.3.23. Definition. Sei E ein metrischer Raum und $V \subset E$ offen. Wir sagen eine Teilmenge $A \subset E$ sei *kompakt enthalten* in V, in Zeichen, $A \Subset V$, falls A relativ kompakt ist und

$$A \subset \bar{A} \subset V. \tag{2.3.27}$$

Beweis von Theorem 2.3.20. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)" Klar.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)" Sei $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, K_n kompakt, so enthält jedes K_n eine h.a. dichte Teilmenge A_n.

$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist dann h.a. und dicht, denn

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n \subset \bar{A}. \tag{2.3.28}$$

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)" 1. Aus Lemma 2.3.21, (ii), schließen wir, daß E sich als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen K_n darstellen läßt— die K_n müssen nicht alle verschieden sein.

2. Definieren wir nun

$$\widetilde{K}_n = \bigcup_{m=0}^{n} K_m, \tag{2.3.29}$$

so erhalten wir eine Ausschöpfung von E durch kompakte Mengen $\widetilde{K}_n$, $\widetilde{K}_n \subset \widetilde{K}_{n+1}$.

3. Die Mengen Ω_n in (i) definieren wir induktiv mittels Lemma 2.3.22:

Ω_0 sei eine relativ kompakte, offene Menge, die $\widetilde{K}_0$ enthält.

Ist Ω_n schon definiert, so sei Ω_{n+1} eine relativ kompakte, offene Menge, die $\bar{\Omega}_n \cup \widetilde{K}_n$ enthält.

Die so definierten Mengen Ω_n haben die gewünschten Eigenschaften. □

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem wichtigen Satz

2.3.24. Theorem. *Sei E ein kompakter metrischer Raum und $f : E \to E'$ eine stetige, bijektive Abbildung in einen metrischen Raum E', dann ist f ein Homöomorphismus, d.h. f^{-1} ist stetig.*

Beweis. Nach Proposition 2.2.3, (v), genügt es zu zeigen, daß

$$f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{O}' \quad \forall\, A \in \mathcal{O}, \tag{2.3.30}$$

d.h. die Bilder offener Mengen unter f sollen wieder offen sein.[4] Gleichbedeutend damit ist, daß die Bilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind, denn

$$f(E \backslash A) = f(E) \backslash f(A) = E' \backslash f(A). \tag{2.3.31}$$

Nun ist jede abgeschlossene Menge $B \subset E$ kompakt, da E kompakt ist, vgl. Proposition 2.3.15, (ii), und daher ist nach Proposition 2.3.16 auch $f(B)$ kompakt und somit abgeschlossen. □

2.3.25. Aufgaben.

1 Man zeige, daß $A \subset E$ genau dann präkompakt ist, wenn $\bar{A}$ präkompakt ist.

2 Man beweise, daß $\bar{A} \subset E$ genau dann folgenkompakt ist, wenn jede Folge (x_n) aus A eine in E konvergente Teilfolge enthält.

3 Man beweise Lemma 2.3.19.

4 Sei E ein kompakter metrischer Raum und Λ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von E mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus Λ ungleich der leeren Menge ist. Dann gilt

$$\bigcap_{A \in \Lambda} A \neq \emptyset.$$

5 Sei E ein metrischer Raum und K_n eine monoton fallende Folge von nichtleeren kompakten Teilmengen, d.h. $K_{n+1} \subset K_n\ \forall\, n$. Dann gilt

$$\bigcap_n K_n \neq \emptyset.$$

6 Seien K_1, K_2 disjunkte kompakte Mengen in einem metrischen Raum E, so können K_1 und K_2 durch offene Mengen getrennt werden, d.h. es gibt disjunkte offene Mengen $\Omega_i \subset E$, $i = 1, 2$, so daß

$$K_i \subset \Omega_i, \qquad i = 1, 2.$$

[4] Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft nennen wir auch *offen*.

2.4. Der Tietze-Urysohnsche Fortsetzungssatz

2.4.1. Theorem (Tietze-Urysohn). *Sei E ein metrischer Raum, $A \subset E$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann existiert eine stetige Abbildung $g : E \to \mathbb{R}$, die mit f auf A übereinstimmt und für die ferner gilt*

$$\inf_E g(x) = \inf_A f(x), \qquad \sup_E g(x) = \sup_A f(x). \tag{2.4.1}$$

Beweis. Ist $f \equiv \text{const}$, so ist die Behauptung trivial. Im anderen Falle können wir durch eine Transformation der Art

$$f(x) \to \alpha f(x) + \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0, \tag{2.4.2}$$

immer erreichen,[5] daß für die transformierte Abbildung $\tilde{f}$ gilt

$$\inf_A \tilde{f}(x) = 1, \qquad \sup_A \tilde{f}(x) = 2. \tag{2.4.3}$$

Wenn wir für $\tilde{f}$ eine Fortsetzung der beschriebenen Art finden können, dann auch für f.

Wir nehmen daher an, (2.4.3) gelte schon für f und definieren

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \frac{\inf_A f(y) d(x,y)}{d(x,A)}, & x \notin A, \end{cases} \tag{2.4.4}$$

vgl. Definition 2.1.14.

Offensichtlich gilt dann

$$1 \leq g \leq 2, \qquad g_{|A} = f, \tag{2.4.5}$$

so daß wir nur noch die Stetigkeit von g nachweisen müssen.

g ist stetig.

Betrachte die Zerlegung $E = \mathring{A} \,\dot\cup\, \complement A \,\dot\cup\, \partial A$.

(i) In $\mathring{A}$ ist g stetig, da f stetig ist.

(ii) Sei $x_0 \in \complement A$, dann genügt es, die Stetigkeit von

$$h(x) = \inf_A f(y) d(x,y) \tag{2.4.6}$$

in x_0 nachzuweisen, da $d(x,A)$ stetig ist, siehe Aufgaben 2.2.29, Aufg. 1, und von Null verschieden in $\complement A$ wegen der Abgeschlossenheit von A.

---

[5]Wähle a so, daß $\inf(f + a) = 0$ und α so, daß $\sup \alpha(f + a) = 1$. Dann definiere $\tilde{f} = \alpha f + (\alpha a + 1)$.

Setze $r = d(x_0, A) > 0$ und wähle $0 < \epsilon < r$. Dann gilt für $x \in B_\epsilon(x_0)$ und $y \in A$

$$d(x_0, y) \le d(x, y) + d(x, x_0) \le d(x, y) + \epsilon \tag{2.4.7}$$

und folglich ist

$$h(x_0) \le h(x) + 2\epsilon, \qquad (\text{da } 1 \le f \le 2) \tag{2.4.8}$$

und entsprechend

$$h(x) \le h(x_0) + 2\epsilon, \tag{2.4.9}$$

d.h. h ist stetig in x_0.

(iii) Sei schließlich $x_0 \in \partial A$. Wegen der Stetigkeit von f existiert zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$|f(y) - f(x_0)| \le \epsilon \qquad \forall\, y \in A \cap B_\delta(x_0). \tag{2.4.10}$$

Wir wollen zeigen, daß

$$|g(x) - g(x_0)| \le \epsilon \qquad \forall\, x \in B_{\frac{\delta}{4}}(x_0). \tag{2.4.11}$$

Wegen (2.4.10) genügt es, die Abschätzung nur für $x \in \widetilde{B} = B_{\frac{\delta}{4}}(x_0) \cap \complement A$ herzuleiten; beachte, daß $x_0 \in A$, da A abgeschlossen, und somit $f(x_0) = g(x_0)$.

Setze $A_\delta = A \cap B_\delta(x_0)$ und $C = A \backslash A_\delta$. Dann erhalten wir für $x \in \widetilde{B}$

$$d(x, y) \ge d(x_0, y) - d(x, x_0) \ge \tfrac{3\delta}{4} \quad \forall\, y \in C \tag{2.4.12}$$

und daher

$$\inf_C f(y) d(x, y) \ge \tfrac{3\delta}{4}, \tag{2.4.13}$$

da $1 \le f$.

Andererseits ist wegen $f \le 2$

$$f(x_0) d(x, x_0) \le 2\tfrac{\delta}{4} \le \tfrac{3\delta}{4}, \tag{2.4.14}$$

so daß

$$\inf_A f(y) d(x, y) = \inf_{A_\delta} f(y) d(x, y) \qquad \forall\, x \in \widetilde{B}. \tag{2.4.15}$$

Für $y \in A_\delta$ schließen wir aber aus (2.4.10)

$$f(x_0) - \epsilon \le f(y) \le f(x_0) + \epsilon \tag{2.4.16}$$

und somit

$$(f(x_0)-\epsilon)\inf_{A_\delta} d(x,y) \le \inf_{A_\delta} f(y)d(x,y) \le (f(x_0)+\epsilon)\inf_{A_\delta} d(x,y). \tag{2.4.17}$$

Beachten wir nun noch, daß $d(x,A) = \inf_{A_\delta} d(x,y)$ und $f(x_0) = g(x_0)$, so folgt aus (2.4.15) und (2.4.17)

$$g(x_0)-\epsilon \le g(x) \le g(x_0)+\epsilon \qquad \forall\, x \in \widetilde{B}. \tag{2.4.18}$$

Damit ist die Stetigkeit von g bewiesen. □

2.4.2. Corollar. *Seien A, B zwei disjunkte, nichtleere, abgeschlossene Mengen eines metrischen Raumes E. Dann existiert eine stetige Funktion $f : E \to [0,1]$, so daß*

$$f_{|A} = 0 \quad \text{und} \quad f_{|B} = 1. \tag{2.4.19}$$

2.4.3. Lemma. *Sei E ein metrischer Raum, $A \subset E$ abgeschlossen und $V \subset E$ eine offene Teilmenge, die A enthält. Dann existiert eine offene Menge U, so daß*

$$A \subset U \subset \bar{U} \subset V. \tag{2.4.20}$$

Beweis. Setze $B = \complement V$. Dann ist B abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$, so daß nach Corollar 2.4.2 eine stetige Funktion $f : E \to [0,1]$ existiert mit

$$f_{|A} = 0 \quad \text{und} \quad f_{|B} = 1. \tag{2.4.21}$$

Die Menge $U = f^{-1}\big([0,\tfrac{1}{2})\big)$ ist dann offen und es gilt

$$A \subset U \subset \bar{U} \subset f^{-1}\big([0,\tfrac{1}{2}]\big) \subset V. \tag{2.4.22}$$

□

2.4.4. Definition. Sei E ein metrischer Raum, E' ein Vektorraum und $f : E \to E'$ eine beliebige Abbildung. Wir definieren den *Träger* von f, in Zeichen, $\operatorname{supp} f$,[6] durch

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{\, x \colon f(x) \ne 0 \,\}}. \tag{2.4.23}$$

Wir können jetzt die Existenz von sog. *Abschneidefunktionen* nachweisen.

[6] Die englische Bezeichnung *support* für Träger hat hier Pate gestanden.

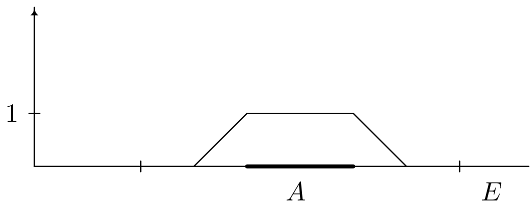
2.4.5. Proposition. (i) *Sei E ein metrischer Raum, $A \subset E$ abgeschlossen und V offen mit $A \subset V$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : E \to [0,1]$, so daß*

$$f_{|A} = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{supp} f \subset V. \tag{2.4.24}$$

(ii) *Ist darüberhinaus E lokal kompakt und A kompakt, so können wir f so wählen, daß*

$$f_{|A} = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{supp} f \Subset V. \tag{2.4.25}$$

Wir nennen f eine (stetige) Abschneidefunktion.



Graph einer stetigen Abschneidefunktion

Beweis. „(i)“ Nach Lemma 2.4.3 existiert eine offene Menge U, so daß

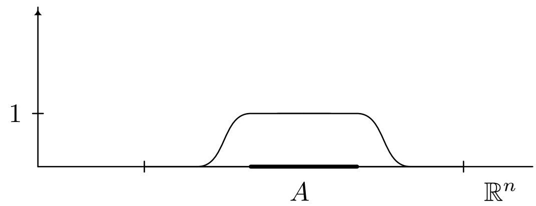
$$A \subset U \subset \bar{U} \subset V. \tag{2.4.26}$$

Setze $B = \complement U$ und wende Corollar 2.4.2 auf A, B an. Die Funktion f, die wir erhalten, verschwindet auf B, d.h. $\{\, x \colon f(x) \neq 0 \,\} \subset \complement B = U$ und daher

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{\, x \colon f(x) \neq 0 \,\}} \subset \bar{U} \subset V. \tag{2.4.27}$$

„(ii)“ Anstelle von Lemma 2.4.3 verwenden wir jetzt Lemma 2.3.22 und erhalten, daß die offene Menge U in (2.4.26) relativ kompakt gewählt werden kann. Die weitere Argumentation ist dieselbe. □

2.4.6. Bemerkung. Wenn wir in Proposition 2.4.5, (ii), $E = \mathbb{R}^n$ setzen, so werden wir später beweisen, daß die Abschneidefunktion f nicht nur stetig, sondern sogar unendlich oft differenzierbar gewählt werden kann.



Graph einer glatten Abschneidefunktion

2.4.7. Aufgaben.

1 Sei E ein metrischer Raum und $A_1, A_2 \subset E$ zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen, dann lassen sich A_1, A_2 durch offene Mengen trennen, d.h. es gibt disjunkte offene Mengen $\Omega_i \subset E$, $i = 1, 2$, so daß

$$A_i \subset \Omega_i, \qquad i = 1, 2.$$

2 Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Man gebe für diese Konfiguration einen einfachen Beweis für den Tietze-Urysohnschen Fortsetzungssatz und verallgemeinere ihn auf den Fall $f : \prod_{i=1}^{n} I_i \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $I_i = [a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$.

3 Man kann Corollar 2.4.2 auch direkt beweisen mit dem Ansatz

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

2.5. Zusammenhang

2.5.1. Definition. (i) Ein metrischer Raum E heißt *zusammenhängend*, falls er sich nicht als disjunkte Vereinigung von nichtleeren offenen Mengen schreiben läßt, d.h.

$$E = A \mathbin{\dot\cup} B,\ A, B \in \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad A = \emptyset \ \vee\ B = \emptyset. \tag{2.5.1}$$

(ii) Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt zusammenhängend, wenn sie als Teilraum zusammenhängend ist.

(iii) E heißt *lokal zusammenhängend*, wenn jeder Punkt aus E eine Umgebungsbasis besitzt, die aus zusammenhängenden Mengen besteht.

2.5.2. Bemerkung. (i) Jeder Punkt eines metrischen Raumes ist zusammenhängend, desgleichen die leere Menge.

(ii) Sei $E = B_1 \dot\cup B_2$ die Vereinigung zweier disjunkter Kugeln des $\mathbb{R}^n$, so ist E unzusammenhängend, da jedes B_i offen ist in E.

(iii) Die Zusammenhangsdefinition ist äquivalent zu

$$A \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F} \quad \Longleftrightarrow \quad A = \emptyset \;\vee\; A = E. \tag{2.5.2}$$

d.h. $\emptyset$ und E sind die einzigen Mengen in E, die sowohl offen als abgeschlossen sind.

2.5.3. Proposition. *Seien E, E' metrische Räume, $f : E \to E'$ stetig und E zusammenhängend, dann ist $f(E)$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß f surjektiv ist. Sei $E' = A \dot\cup B$, $A, B \in \mathcal{O}'$. Dann ist

$$E = f^{-1}(A) \dot\cup f^{-1}(B) \tag{2.5.3}$$

mit offenen Mengen $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$. Da E zusammenhängend, ist eine der Mengen leer, z.B. sei $f^{-1}(A) = \emptyset$, woraus, wegen der Surjektivität von f, $A = \emptyset$ folgt. □

2.5.4. Theorem.

(i) *Eine Teilmenge $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist (beschränkt oder unbeschränkt).*

(ii) $\mathbb{R}$ *ist zusammenhängend und lokal zusammenhängend.*

Beweis. Die zweite Behauptung folgt sofort aus der ersten, es genügt daher (i) zu beweisen.

„$\Longrightarrow$" Sei $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend. Enthält E nur einen Punkt, so ist E ein Intervall. Es gebe also $a, b \in E$ und o.B.d.A. $a < b$. Wir werden zeigen, daß hieraus

$$[a, b] \subset E \tag{2.5.4}$$

folgt, woraus wir schließen, daß E ein Intervall ist. (Übungsaufgabe)

Nehme an, es gäbe $x \in (a, b)$, das nicht E liegt, dann könnten wir E darstellen als $E = A \dot\cup B$ mit relativ offenen Mengen

$$A = (-\infty, x) \cap E \tag{2.5.5}$$

und

$$B = (x, \infty) \cap E. \tag{2.5.6}$$

A und B sind nichtleer, da $a \in A$ und $b \in B$; Widerspruch.

„$\Longleftarrow$" Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Wir wollen annehmen, I sei unzusammenhängend, d.h.

$$I = A \mathbin{\dot\cup} B, \quad A, B \in \mathcal{O}_I, \quad A, B \neq \emptyset, \tag{2.5.7}$$

wobei $A = \tilde{A} \cap I$ und $B = \tilde{B} \cap I$ mit offenen Mengen $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{O}$. Offensichtlich können A oder B nicht nur aus den Endpunkten a, b bestehen, sollten diese zu I gehören, d.h. auch das *offene* Intervall $\overset{\circ}{I}$ läßt sich wie in (2.5.7) aufspalten, wobei dann A und B nicht nur relativ offene Mengen sind, sondern offene Mengen in $\mathbb{R}$. Wir dürfen also o.B.d.A. voraussetzen, daß I ein offenes Intervall ist.

Sei nun $x \in A$ und $y \in B$ und nehme an, daß $x < y$, dann gilt $[x, y] \subset I$. Setze $z = \sup[x, y] \cap A$, so ist $z \in [x, y] \subset I$. z kann nicht zu B gehören, da B offen ist und

$$z = \lim x_n, \quad x_n \in A \quad \text{(vgl. Lemma 0.4.37, (i))}, \tag{2.5.8}$$

folglich ist $z \in A$.

Dies führt aber zu einem Widerspruch zur Definition von z, da wegen der Offenheit von A auch $[z, z + \epsilon) \subset A$ mit einem $\epsilon > 0$ und $z < y$ ist, denn $y \in B$.

I ist daher zusammenhängend. □

2.5.5. Corollar (Zwischenwertsatz)**.** *Sei E ein zusammenhängender metrischer Raum, $f : E \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in E$ zwei Punkte für die gilt $f(a) < f(b)$. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, d.h.*

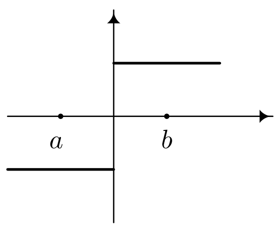
$$[f(a), f(b)] \subset f(E) \tag{2.5.9}$$

Beweis. Nach Proposition 2.5.3 ist $f(E)$ zusammenhängend und daher ein Intervall. □

Im Falle unstetiger Funktionen gilt der Zwischenwertsatz nicht, wie das Beispiel der Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

zeigt.



2.5.6. Proposition. *Sei E ein metrischer Raum und $A \subset E$ zusammenhängend. Dann ist auch jede Menge B mit $A \subset B \subset \bar{A}$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $B = X \,\dot\cup\, Y$, X und Y offen und nichtleer. Da A in B dicht liegt, gilt

$$A \cap X \neq \emptyset \quad \text{und} \quad A \cap Y \neq \emptyset. \tag{2.5.10}$$

Dann ist

$$A = (A \cap X) \,\dot\cup\, (A \cap Y) \tag{2.5.11}$$

eine disjunkte Zerlegung von A in nichtleere offene Mengen; Widerspruch. □

2.5.7. Corollar. *Der Abschluß einer zusammenhängenden Menge ist ebenfalls zusammenhängend.*

2.5.8. Proposition. *Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von zusammenhängenden Mengen $A_i \subset E$. Dann gilt*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset \implies A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{ist zusammenhängend.} \tag{2.5.12}$$

Beweis. Sei $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$ und nehme an, A sei unzusammenhängend

$$A = X \,\dot\cup\, Y, \quad X, Y \in \mathcal{O}_A,\ X, Y \neq \emptyset. \tag{2.5.13}$$

Gelte z.B. $a \in X$, dann folgt

$$X \cap A_i \neq \emptyset \quad \forall\, i \in I. \tag{2.5.14}$$

Ferner existiert $j \in I$, so daß $Y \cap A_j \neq \emptyset$ und daher ist

$$A_j = (X \cap A_j) \,\dot\cup\, (Y \cap A_j) \tag{2.5.15}$$

eine disjunkte Zerlegung von A_j in nichtleere offene Mengen; Widerspruch. □

2.5.9. Corollar. *Seien A_i, $i = 1, \ldots, n$, endliche viele zusammenhängende Mengen in E derart, daß*

$$A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n - 1, \tag{2.5.16}$$

dann ist ihre Vereinigung zusammenhängend.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis nach n.

1. Die Behauptung ist richtig für $n = 1$.
2. Sei sie schon für $n = k$ bewiesen, dann ist

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1} \equiv A \cup B. \tag{2.5.17}$$

A und B sind beide zusammenhängend und $A \cap B \neq \emptyset$. Daher ist nach Proposition 2.5.8 $A \cup B$ ebenfalls zusammenhängend. □

Aus diesem Corollar und Proposition 2.5.8 schließen wir weiter

2.5.10. Corollar. *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zusammenhängenden Mengen aus E derart, daß*

$$A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}, \tag{2.5.18}$$

dann ist ihre Vereinigung zusammenhängend.

Beweis. Nach Corollar 2.5.9 sind die endlichen Vereingungen $B_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ alle zusammenhängend und es ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = B_0 \neq \emptyset. \tag{2.5.19}$$

Wende dann Proposition 2.5.8 an. □

2.5.11. Definition (Zusammenhangskomponente)**.** Sei E ein metrischer Raum und $x \in E$. Wir definieren dann die *Zusammenhangskomponente* von x als die Vereinigung aller zusammenhängender Mengen aus E, die x enthalten, und bezeichnen sie mit $\mathcal{C}(x)$.

2.5.12. Bemerkung. In metrischen Räumen—oder allgemeiner in topologischen Räumen—gilt

(i) Nach Proposition 2.5.8 ist $\mathcal{C}(x)$ zusammenhängend und daher die *größte* zusammenhängende Menge in E, die x enthält.

(ii) $\mathcal{C}(x)$ ist abgeschlossen, wegen Proposition 2.5.6, und es gilt

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \emptyset,$$

d.h. zwei Zusammenhangskomponenten eines metrischen Raumes sind entweder disjunkt oder identisch.

(iii) Jeder metrische Raum läßt sich als die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten darstellen.

(iv) Ein metrischer Raum E ist genau dann zusammenhängend, wenn E nur eine Zusammenhangskomponente besitzt, die dann mit E übereinstimmen muß.

(v) Ist jede Zusammenhangskomponente von E auf einen Punkt reduziert, so heißt E *total unzusammenhängend*.

2.5.13. Beispiele.

1. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sind total unzusammenhängend.
2. Ein diskreter metrischer Raum ist total unzusammenhängend.
3. Ist E die Vereinigung von endlich vielen disjunkten Kugeln des $\mathbb{R}^n$, so sind die Zusammenhangskomponenten von E gerade diese Kugeln.

2.5.14. Proposition. *Die Zusammenhangskomponenten eines lokal zusammenhängenden Raumes E sind offen.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ Zusammenhangskomponente und $x \in \mathcal{C}$. Da x eine zusammenhängende Umgebung U besitzt, folgt $U \subset \mathcal{C}$. □

2.5.15. Proposition. *Jede nichtleere offene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ läßt sich als h.a. Vereinigung von offenen disjunkten Intervallen darstellen.*

Beweis. A ist lokal zusammenhängend, daher sind die Zusammenhangskomponenten $\mathcal{C}(r)$ in A von $r \in \mathbb{Q} \cap A$ offen. Jedes $\mathcal{C}(r)$ ist aber ein Intervall, Theorem 2.5.4, und

$$\mathcal{C}(r) \cap \mathcal{C}(s) = \emptyset \quad \vee \quad \mathcal{C}(r) = \mathcal{C}(s) \tag{2.5.20}$$

nach Bemerkung 2.5.12, (ii).

Wir müssen daher nur noch zeigen, daß

$$A = \bigcup_{r \in A \cap \mathbb{Q}} \mathcal{C}(r). \tag{2.5.21}$$

Sei $x \in A$. Dann existiert ein offenes Intervall I, so daß $x \in I \subset A$. Wähle $r \in I \cap \mathbb{Q}$, so folgern wir $x \in I \subset \mathcal{C}(r)$. □

Bogenzusammenhängende Räume

2.5.16. Definition. Sei E ein metrischer Raum. Eine *Kurve* $\Gamma \subset E$ ist das Bild einer stetigen Abbildung $\varphi : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to E$

$$\Gamma = \{\, \varphi(t) \colon a \leq t \leq b \,\} \tag{2.5.22}$$

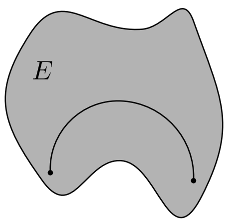
$\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ heißen *Endpunkte* der Kurve. Wir nennen das Argument t auch *Parameter* und das Paar (I, φ) *Parametrisierung* von Γ. Da alle beschränkte, abgeschlossene Intervalle zueinander homöomorph sind, können wir eine Kurve immer über dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$ parametrisieren. Wir sprechen dann auch von einer *kanonischen* Parametrisierung, die wir—wenn nichts anderes vereinbart ist—immer zugrunde legen wollen.

Γ heißt *geschlossen*, wenn $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Manchmal nennen wir eine Kurve auch *stetige Kurve* oder auch *Weg* bzw. *Bogen*.

2.5.17. Definition. (i) Ein metrischer Raum E heißt *bogenzusammenhängend*, falls zwei Punkte $x, y \in E$ immer durch eine stetige Kurve $\Gamma \subset E$ verbunden werden können, d.h. es existiert eine stetige Abbildung $\varphi : [0, 1] \to E$ mit $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$.

(ii) Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt bogenzusammenhängend, wenn sie als Teilraum bogenzusammenhängend ist.



Ein bogenzusammenhängender Raum

2.5.18. Beispiel. Jede *konvexe*[7] Teilmenge eines normierten Raumes E ist bogenzusammenhängend.

2.5.19. Proposition. *Jeder bogenzusammenhängende Raum E ist zusammenhängend.*

Beweis. Wir verwenden Bemerkung 2.5.12, (iv), und werden zeigen, daß zwei beliebige Zusammenhangskomponenten von E immer übereinstimmen.

Seien $x, y \in E$ beliebige Punkte, dann lassen sie sich durch eine Kurve Γ verbinden. Nach Proposition 2.5.3 ist Γ zusammenhängend, so daß Γ sowohl in der Zusammenhangskomponente $\mathcal{C}(x)$ als auch in $\mathcal{C}(y)$ enthalten ist, wegen Proposition 2.5.8. Wende dann Bemerkung 2.5.12, (ii), an. $\square$

[7] $A \subset E$ heißt konvex, falls mit $x, y \in A$ auch die Verbindungsstrecke $[x, y] = \{\, tx + (1 - t)y \colon 0 \le t \le 1 \,\}$ in A enthalten ist.

Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir noch eine Definition.

2.5.20. Definition. (i) Sei E ein normierter Raum. Eine stetige Abbildung $\varphi : I = [a, b] \to E$ heißt *stückweise affin*, falls eine Partition $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ von I existiert, so daß φ auf den Teilintervallen $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, *affin*[8] ist.

(ii) Ein Kurve $\Gamma \subset E$ heißt *Polygonzug*, wenn eine Parametrisierung (I, φ) mit einer stückweise affinen Funktion φ existiert.

2.5.21. Proposition. *Sei E ein normierter Raum und $\Omega \subset E$ offen. Dann ist Ω genau dann zusammenhängend, wenn Ω bogenzusammenhängend ist.*

Beweis. Wegen Proposition 2.5.19 genügt es zu zeigen, daß „zusammenhängend“ „bogenzusammenhängend“ impliziert.

Sei also $\Omega \neq \emptyset$ zusammenhängend und $x, y \in \Omega$ beliebig. Wir werden dann zeigen, daß x und y durch einen Polygonzug $\Gamma \subset \Omega$ verbunden werden können.

Definiere $K(x)$ als die Menge aller $z \in \Omega$, die sich mit x durch einen ganz in Ω verlaufenden Polygonzug verbinden lassen. $K(x) \neq \emptyset$, da $x \in K(x)$, und wir werden sehen, daß $K(x)$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist und damit gleich Ω nach Bemerkung 2.5.2, (iii).

$K(x)$ ist offen.

Übungsaufgabe.

$K(x)$ ist relativ abgeschlossen.

Sei $x_n \in K(x)$, $x_n \to x_0 \in \Omega$. Wähle eine Kugel $B_r(x_0)$ in E, die ganz in Ω enthalten ist, und ein $x_n \in B_r(x_0)$. x_n, x_0 lassen sich dann innerhalb von $B_r(x_0)$ durch eine Strecke verbinden, da $B_r(x_0)$ konvex ist, und wir erhalten $x_0 \in K(x)$. □

2.5.22. Bemerkung. Beim Beweis des vorstehenden Satzes haben wir eine wichtige Schlußweise benutzt, um in zusammenhängenden Räumen E nachzuweisen, daß eine Aussage in ganz E gilt, nämlich, man zeigt, daß die Menge der Punkte für die die Aussage wahr ist—im betreffenden Satz $K(x)$—nichtleer und sowohl offen als auch abgeschlossen ist; dann folgt, daß die Menge gleich E sein muß.

---

[8] $\varphi : I \to E$ ist affin, falls Vektoren $x, y \in E$ existieren, so daß $\varphi(t) = tx + y$.

2.5.23. Definition. Eine offene und zusammenhängende Menge Ω in einem normierten Raum nennen wir ein *Gebiet*.

2.5.24. Aufgaben.

1 Zeigen Sie, daß Proposition 2.5.8, Corollar 2.5.9 und Corollar 2.5.10 richtig bleiben, wenn man überall „zusammenhängend“ durch „bogenzusammenhängend“ ersetzt.

2 Sei E ein normierter Raum, $\dim E \geq 2$, dann sind $E \backslash \{0\}$, die punktierte Einheitskugel $\dot{B}_1(0) = B_1(0) \backslash \{0\}$ und die Einheitssphäre S_1 zusammenhängend.

3 Die Einheitssphäre $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend und $S^1 \backslash \{x_0\}$, wobei $x_0 \in S^1$ ein beliebiger Punkt ist.

4 Man zeige, daß $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ und $I = [0,1]$ nicht homoömorph sind und auch nicht $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

2.6. Produkträume

Wir wollen zunächst das kartesische Produkt zweier metrischer Räume betrachten und darauf eine Metrik definieren. Dies läßt sich dann sehr einfach auf das kartesische Produkt von endlich vielen metrischen Räumen erweitern. Die Definition kann auch so gefasst werden, daß die spezielle Struktur von normierten Räumen oder Skalarprodukträumen erhalten bleibt.

2.6.1. Definition. Seien $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ zwei metrische Räume, dann definieren wir auf dem kartesischen Produkt $E_1 \times E_2$ eine Metrik, die sog. *Produktmetrik* d, durch

$$d(x,y) = \max_i \big((d_i(x^i, y^i)\big), \tag{2.6.1}$$

wobei $x = (x^i)$, $y = (y^i)$.

Wir hätten die Produktmetrik auch anders definieren können, doch sind die meisten sinnvollen Definitionen einander äquivalent.

2.6.2. Bemerkung. (i) Die Metriken

$$d'(x,y) = d_1(x^1, y^1) + d_2(x^2, y^2) \tag{2.6.2}$$

und

$$d''(x,y) = \sqrt{d_1(x^1,y^1)^2 + d_2(x^2,y^2)^2} \tag{2.6.3}$$

sind zu d *äquivalente Metriken* auf $E_1 \times E_2$, d.h. es existieren positive Konstanten c_1, c_2, so daß

$$c_1 d \le d' \le c_2 d \tag{2.6.4}$$

und entsprechend für d''.

Für alle Fragen, die topologische Begriffe oder metrische—Cauchyfolge, gleichmäßige Stetigkeit, Präkompaktheit, Beschränktheit—beinhalten, ist es daher gleichgültig, welche der Metriken d, d', d'' zugrunde gelegt wird.

(ii) Bezeichnen wir die Kugeln in $E_1 \times E_2$, E_1 und E_2 bezüglich der Metriken d, d_1 und d_2 mit B, B^1 und B^2, so gilt für einen Punkt $x = (x^i) \in E_1 \times E_2$

$$B_r(x) = B_r^1(x^1) \times B_r^2(x^2) \tag{2.6.5}$$

und

$$\bar{B}_r(x) = \bar{B}_r^1(x^1) \times \bar{B}_r^2(x^2). \tag{2.6.6}$$

(iii) Die Abbildung $(x^1, x^2) \to (x^2, x^1)$ von $E_1 \times E_2 \to E_2 \times E_1$ ist eine Isometrie.

2.6.3. Beispiel. Die kanonische Metrik des $\mathbb{R}^2$ entspricht der Metrik d'' in (2.6.3).

2.6.4. Bemerkung. (i) Sind $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume über dem gemeinsamen Körper $\mathbb{K}$, so ist $E_1 \times E_2$ ebenfalls ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, wenn wir Addition und Multiplikation mit einem Skalar komponentenweise definieren

$$\begin{gathered} (x^i) + (y^i) = (x^i + y^i), \\ \lambda(x^i) = (\lambda x^i). \end{gathered} \tag{2.6.7}$$

Als *Produktnorm* definieren wir analog zu (2.6.1)

$$\|(x^i)\| = \max_i \big(\|x^i\|_i\big). \tag{2.6.8}$$

Es lassen sich in Anlehnung an (2.6.2) und (2.6.3) noch zwei andere Normen auf dem kartesischen Produkt einführen, die wiederum äquivalent zur Produktnorm sind. Die Äquivalenz ist genauso wie in Bemerkung 2.6.2,(i), definiert.

(ii) Wenn wir allerdings auf dem kartesischen Produkt zweier Skalarprodukträume $(E_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1})$, $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2})$ ein Skalarprodukt einführen wollen, dessen zugehörige Metrik äquivalent zur Produktmetrik ist, dann haben wir keine Wahl, sondern müssen es definieren als

$$\langle (x^i), (y^i)\rangle = \sum_i \langle x^i, y^i\rangle_{E_i}. \tag{2.6.9}$$

Die von diesem Skalarprodukt erzeugte Metrik ist dann gleich der Metrik d'' in (2.6.3).

Aus Bemerkung 2.6.2, (ii), schließen wir sofort

2.6.5. Proposition. *Seien E_i, $i = 1, 2$, metrische Räume, dann gilt*

$$A_i \in \mathcal{O}_{E_i} \implies A_1 \times A_2 \in \mathcal{O}_{E_1\times E_2} \tag{2.6.10}$$

$$U_i \in \mathcal{U}_{E_i}(x^i) \implies U_1 \times U_2 \in \mathcal{U}_{E_1\times E_2}\big((x^1, x^2)\big) \tag{2.6.11}$$

2.6.6. Proposition. *$x_n = (x^i_n)$ ist genau dann Cauchyfolge in $E_1 \times E_2$, wenn die Komponentenfolgen x^i_n Cauchyfolgen in E_i sind für $i = 1, 2$.*

Beweis. Übungsaufgabe.

2.6.7. Proposition. *Eine Folge $x_n = (x^i_n)$ konvergiert genau dann in $E_1 \times E_2$ nach $x = (x^i)$, wenn die einzelnen Komponentenfolgen nach x^i konvergieren.*

Beweis. Übungsaufgabe.

2.6.8. Corollar. *Seien $A_i \subset E_i$, $i = 1, 2$ so gilt*

$$\overline{A_1 \times A_2} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \tag{2.6.12}$$

Beweis. $x = (x^i)$ ist genau dann Element von $\overline{A_1 \times A_2}$, wenn x Limes einer Folge $x_n = (x^i_n) \in A_1 \times A_2$ ist. Diese Überlegung gilt natürlich auch für die einzelnen Komponenten, so daß die Behauptung aus Proposition 2.6.7 folgt. □

2.6.9. Proposition. *Sei E ein metrischer Raum und $f : E \to E_1 \times E_2$, $f = (f^i)$. Dann ist f genau dann stetig in $z \in E$, wenn die Funktionen $f^i : E \to E_i$ in z stetig sind.*

Beweis. Folgt aus Proposition 2.6.7. □

2.6.10. Proposition. *Sei E ein metrischer Raum und $f : E \to E_1 \times E_2$, $f = (f^i)$. Dann ist f genau dann gleichmäßig stetig, wenn die Komponenten f^i gleichmäßig stetig sind.*

Beweis. Übungsaufgabe.

2.6.11. Corollar. *Die Projektionen*[9] $\operatorname{pr}_i : E_1 \times E_2 \to E_i$, $i = 1, 2$, *sind gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wende Proposition 2.6.10 auf $\operatorname{id} : E_1 \times E_2 \to E_1 \times E_2$ an und beachte, daß $\operatorname{id} = (\operatorname{pr}_1, \operatorname{pr}_2)$. □

2.6.12. Proposition. *Die Projektionen* $\operatorname{pr}_i : E_1 \times E_2 \to E_i, i = 1, 2$, *sind offene Abbildungen.*

Beweis. Wir beweisen nur, daß pr_1 offen ist, d.h., daß die Bilder von offen Mengen wieder offen sind, vgl. Fußnote 4 auf Seite 130.

Sei $A \subset E_1 \times E_2$ offen und $x^1 \in \operatorname{pr}_1(A)$. Dann existiert ein $x^2 \in \operatorname{pr}_2(A)$, so daß $x = (x^1, x^2) \in A$ und ein $r > 0$, so daß die Kugel

$$B_r(x) = B_r^1(x^1) \times B_r^2(x^2) \subset A, \tag{2.6.13}$$

vgl. (2.6.5), und damit $B_r^1(x^1) \subset \operatorname{pr}_1(A)$. □

2.6.13. Bemerkung. Die Projektionen abgeschlossener Mengen sind im allgemeinen nicht abgeschlossen, betrachte z.B. einen Hyperbelast im positiven Quadranten des $\mathbb{R}^2$, seine Projektionen sind die offenen positiven Halbachsen der x- bzw. y-Achse.

2.6.14. Proposition. *Sei $a = (a^1, a^2) \in E_1 \times E_2$ fest, dann gilt*

(i) *Die Teilräume*

$$E_1 \times \{a^2\} \quad \textit{und} \quad \{a^1\} \times E_2 \tag{2.6.14}$$

sind abgeschlossen in $E_1 \times E_2$.

(ii) *Die Abbildungen $x^1 \to (x^1, a^2)$ und $x^2 \to (a^1, x^2)$ sind Isometrien von E_1 auf $E_1 \times \{a^2\}$ bzw. von E_2 auf $\{a^1\} \times E_2$.*

Beweis. „(i)“ Folgt aus Corollar 2.6.8.

„(ii)“ Folgt unmittelbar aus der Definition der Produktmetrik. □

[9] vgl. Definition 0.3.12

2.6.15. Theorem. *Seien E_1 und E_2 nichtleere metrische Räume, dann besitzt $E_1 \times E_2$ genau dann eine der folgenden Eigenschaften, wenn dies auf E_1 und E_2 zutrifft:*

(i) *vollständig*

(ii) *separabel*

(iii) *kompakt*

(iv) *präkompakt*

(v) *lokal kompakt*

(vi) *zusammenhängend*

(vii) *lokal zusammenhängend*

Beweis. „(i)“ Folgt aus Proposition 2.6.6 und Proposition 2.6.7.

„(ii)“ „$\Longrightarrow$“ Sei $D \subset E_1 \times E_2$ eine h.a. dichte Teilmenge. Setze $D_i = \mathrm{pr}_i(D)$, dann sind auch diese Mengen h.a. und wir werden zeigen, daß sie dicht liegen in E_i. Sei $x = (x^1, x^2) \in E_1 \times E_2$, dann existiert eine Folge $x_n = (x_n^i)$ in D, die nach x konvergiert. Die Elemente der Komponentenfolgen x_n^i gehören zu D_i und konvergieren nach x^i.

„$\Longleftarrow$“ Seien $D_i \subset E_i$ h.a. dichte Teilmengen, dann ist $D = D_1 \times D_2$ h.a. und dicht in $E_1 \times E_2$ nach Proposition 0.3.24 auf Seite 24 und Corollar 2.6.8.

„(iii)“ Wir benutzen die Äquivalenz von „kompakt“ und „folgenkompakt“, Theorem 2.3.10 auf Seite 124, und betrachten eine Folge $x_n = (x_n^i) \in E_1 \times E_2$. Sie besitzt genau dann eine konvergente Teilfolge, wenn die Komponentenfolgen eine besitzen.

„(iv)“ „$\Longrightarrow$“ Die E_i sind isometrisch zu Teilräumen von $E_1 \times E_2$ nach Proposition 2.6.14 und Teilräume von präkompakten Räumen sind wieder präkompakt, Lemma 2.3.11 auf Seite 125.

„$\Longleftarrow$“ Sei $\epsilon > 0$ und $(x_i^1)_{i\in I}$ bzw. $(x_j^2)_{j\in J}$ endlich viele Punkte in E_1 bzw. E_2, so daß

$$E_1 = \bigcup_{i\in I} B_\epsilon^1(x_i^1) \qquad \text{und} \qquad E_2 = \bigcup_{j\in J} B_\epsilon^2(x_j^2), \tag{2.6.15}$$

dann ist $\big(B_\epsilon\big((x_i^1, x_j^2)\big)\big)_{(i,j)\in I\times J}$ eine endliche Überdeckung von $E_1 \times E_2$, denn

$$B_\epsilon\big((x_i^1, x_j^2)\big) = B_\epsilon^1(x_i^1) \times B_\epsilon^2(x_j^2) \tag{2.6.16}$$

„(v)“ „$\Longrightarrow$“ Die Projektionen pr_i sind offen und stetig, daher sind die Projektionen von Umgebungen wieder Umgebungen und von kompakten Mengen wieder kompakte Mengen, vgl. Proposition 2.3.16 auf Seite 126.

„$\Longleftarrow$“ Sei $x = (x^1, x^2) \in E_1 \times E_2$ und $U_1 \subset E_1$, $U_2 \subset E_2$ kompakte Umgebungen von x^1 bzw. x^2, dann ist $U_1 \times U_2$ eine Umgebung von x, wegen (2.6.11), und kompakt nach dem gerade bewiesenen Punkt (iii).

„(vi)“ „$\Longrightarrow$“ Die stetigen Bilder von zusammenhängenden Mengen sind wieder zusammenhängend, Proposition 2.3.5 auf Seite 122, daher ist $E_i = \mathrm{pr}_i(E_1 \times E_2)$ zusammenhängend für $i = 1, 2$.

„$\Longleftarrow$“ Sei $E_1 \times E_2 = A \,\dot\cup\, B$ mit offenen nichtleeren Mengen A, B. Dann gilt

$$E_i = \mathrm{pr}_i(A) \cup \mathrm{pr}_i(B) \quad i = 1, 2. \tag{2.6.17}$$

Da die Projektionen offene Abbildungen sind, Proposition 2.6.12, und die E_i zusammenhängend, existiert $x^i \in \mathrm{pr}_i(A) \cap \mathrm{pr}_i(B)$ für $i = 1, 2$, d.h. es gilt $(x^1, x^2) \in A \cap B$; Widerspruch.

„(vii)“ „$\Longrightarrow$“ Wir zeigen nur, daß E_1 lokal zusammenhängend ist. Seien $x^1 \in E_1$, $x^2 \in E_2$ beliebige Punkte und $(U_i)_{i \in I}$ eine Umgebungsbasis von $x = (x^1, x^2) \in E_1 \times E_2$, die aus zusammenhängenden Umgebungen besteht. Setze $V_i = \mathrm{pr}_1(U_i)$, dann sind dies zusammenhängende Umgebungen von x^1, da pr_1 offen und stetig. Wir müssen nur noch zeigen, daß diese Mengen eine Basis für $\mathfrak{U}(x^1)$ bilden.

Sei $V \in \mathfrak{U}(x^1)$ beliebig, dann ist $V \times E_2$ eine Umgebung von x in $E_1 \times E_2$ nach (2.6.11) und daher existiert ein $i \in I$, so daß $U_i \subset V \times E_2$, woraus wir schließen

$$V_i = \mathrm{pr}_1(U_i) \subset \mathrm{pr}_1(V \times E_2) = V. \tag{2.6.18}$$

„$\Longleftarrow$“ Sei $x = (x^1, x^2) \in E_1 \times E_2$ ein beliebiger Punkt und $(U_i)_{i \in I}$, $(V_j)_{j \in J}$ Umgebungsbasen von x^1 bzw. x^2 mit zusammenhängenden Mengen U_i bzw. V_j. Die Mengen $U_i \times V_j$ sind dann zusammenhängende Umgebungen von x nach (2.6.11) und (vi). Um nachzuweisen, daß sie eine Basis darstellen, benutzen wir, daß die Kugeln

$$B_r(x) = B_r^1(x^1) \times B_r^2(x^2), \qquad r > 0, \tag{2.6.19}$$

eine Umgebungsbasis bilden.

Sei also $B_r(x)$ eine beliebige Kugel, dann existieren Indizes i, j, so daß

$$U_i \subset B_r^1(x^1) \qquad \text{und} \qquad V_j \subset B_r^2(x^2), \tag{2.6.20}$$

daher folgt $U_i \times V_j \subset B_r(x)$. □

Das Produkt endlich vieler Räume

2.6.16. Das Produkt zweier metrischer Räume läßt sich entweder direkt oder per Induktion sehr leicht auf den Fall erweitern, daß man das Produkt endlich vieler Räume $\Pi_{i=1}^{n} E_i$ betrachtet. Die Definition der Produktmetrik (2.6.1) bzw. der äquivalenten Metriken (2.6.2) und (2.6.3) im allgemeineren Falle dürfte klar sein; das gleiche gilt auch für die Definition der Norm (2.6.8) bzw. des Skalarproduktes (2.6.9), falls die Faktoren normierte Räume bzw. Skalarprodukträume sind.

Die eben bewiesenen Sätze lassen sich wörtlich übertragen.

Das Produkt zweier topologischer Räume

2.6.17. Seien $(E_1, \mathcal{O}_1)$, $(E_2, \mathcal{O}_2)$ zwei topologische Räume. Wenn man auf dem kartesischen Produkt eine Topologie $\mathcal{O}$ einführen will, so soll sie natürlich so beschaffen sein, daß die Projektionen $\mathrm{pr}_i : E_1 \times E_2 \to E_i$ stetig sind, das bedeutet, daß für jede offene Menge $A_i \subset E_i$ das Urbild $\mathrm{pr}_i^{-1}(A_i)$ offen sein muß.

Nun ist $\mathrm{pr}_1^{-1}(A_1) = A_1 \times E_2$ und $\mathrm{pr}_2^{-1}(A_1) = E_1 \times A_2$, so daß

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times E_2) \cap (E_1 \times A_2) \in \mathcal{O} \quad \forall\, A_i \in \mathcal{O}_{E_i}. \tag{2.6.21}$$

Diese Mengen bilden ein Mengensystem $\mathcal{B}$ mit folgenden Eigenschaften

$$B_i \in \mathcal{B},\ i = 1, \ldots, n, \implies \bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{B} \tag{$\mathcal{B}_1$}$$

$$E_1 \times E_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \tag{$\mathcal{B}_2$}$$

und bilden daher eine *Basis* für eine Topologie auf $E_1 \times E_2$.

2.6.18. Proposition. (i) *Sei E eine Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ ein Mengensystem mit den Eigenschaften ($\mathcal{B}_1$) und ($\mathcal{B}_2$), wobei natürlich in ($\mathcal{B}_2$) $E_1 \times E_2$ durch E ersetzt werden muß, so bildet $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie $\mathcal{O}$ auf E, d.h. das Mengensystem*

$$\mathcal{O} = \{\, A \colon A = \bigcup_{B \in I} B,\ I \subset \mathcal{B} \,\} \tag{2.6.22}$$

erfüllt die Axiome ($\mathcal{O}_1$), ($\mathcal{O}_2$), ($\mathcal{O}_3$), denen eine Topologie genügen muß.[10]

[10]Vgl. Ziffer 2.1.23 auf Seite 108.

(ii) *In dem speziellen Falle, wo* $\mathcal{B}$ *aus den Mengen in* (2.6.21) *besteht, bezeichnen wir die Topologie* $\mathcal{O}$ *auf* $E_1 \times E_2$ *als die Produkttopologie. Sie ist die gröbste Topologie, bezüglich derer die Projektionen* pr_i *stetig sind, vgl. die anschließende Definition.*

2.6.19. Definition. Sei E eine Menge und $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ zwei Topologien auf E. Dann heißt $\mathcal{O}_1$ *gröber* als $\mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_2$ *feiner* als $\mathcal{O}_1$, falls $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$. Topologien mit dieser Eigenschaft nennt man *vergleichbar*.

Beweis von Proposition 2.6.18. „(i)“ Übungsaufgabe.

„(ii)“ Dies folgt aus den Überlegungen in Ziffer 2.6.17. □

2.6.20. Proposition. *Versehen wir das Produkt zweier metrischer Räume mit der Produktmetrik, so stimmt die von der Metrik definierte Topologie mit der Produkttopologie überein.*

Beweis. Sei $\mathcal{O}_1$ die Produkttopologie und $\mathcal{O}_2$ die metrische Topologie, dann ist $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$ wegen (2.6.10).

Sei andererseits $\Omega \in \mathcal{O}_2$ und $x = (x^i) \in \Omega$, dann existiert eine Kugel $B_r(x) \subset \Omega$, die nach (2.6.5) das Produkt zweier offener Mengen aus E_1 bzw. E_2 ist, d.h. $\Omega \in \mathcal{O}_1$. □

2.6.21. Aufgaben.

1 Man beweise Proposition 2.6.6 und Proposition 2.6.7.

2 Man beweise Proposition 2.6.10.

3 Man beweise Teil (i) von Proposition 2.6.18.

4 Seien E, F metrische Räume und $f : E \to F$. Dann gilt

(i) Wenn f stetig ist, so ist $\operatorname{graph} f$ abgeschlossen in $E \times F$ und $\operatorname{pr}_1|_{\operatorname{graph} f}$ ist ein Homöomorphismus von $\operatorname{graph} f$ auf E.

(ii) Wenn F kompakt ist und $\operatorname{graph} f$ abgeschlossen in $E \times F$, so ist f stetig.

2.7. Stetige lineare Abbildungen

Wir wollen in diesem Abschnitt stetige lineare Abbildungen $A : E \to F$ zwischen normierten Räumen E und F etwas näher untersuchen. Die Betrachtungen bleiben allerdings oberflächlich; eine eingehendere Behandlung erfolgt in Band II.

2.7.1. Proposition. *Seien E, F normierte Räume über $\mathbb{K}$ und sei $A : E \to F$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent*

(i) *A ist stetig in 0.*

(ii) *A ist stetig.*

(iii) *Es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß*

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \qquad \forall\, x \in E. \tag{2.7.1}$$

Beweis. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“ Wegen der Linearität ist

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\|. \tag{2.7.2}$$

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“ Angenommen, (iii) wäre falsch, dann gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ $x_n \in E$, so daß

$$\|Ax_n\| \geq n\|x_n\|. \tag{2.7.3}$$

Setze

$$y_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|} \quad \to \quad 0, \tag{2.7.4}$$

so folgt

$$1 \leq \|Ay_n\| \qquad \forall\, n \tag{2.7.5}$$

im Widerspruch zu (ii), da $y_n \to 0$.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“ Klar. □

2.7.2. Definition. (i) Sei $A : E \to F$ stetig und linear, so definieren wir als *Norm* von A

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \neq 0}} \|Ax\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\|. \tag{2.7.6}$$

(ii) Wir bezeichnen die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von E nach F mit $L(E, F)$. $L(E, F)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, mit der eben definierten Norm versehen, sogar ein normierter Raum.

2.7.3. Proposition. (i) *Ist F ein Banachraum, so ist $L(E,F)$ vollständig.*

(ii) *Seien E, F, G drei normierte Räume und $A \in L(E,F)$, $B \in L(F,G)$, so gilt für die Komposition*

$$\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\|. \tag{2.7.7}$$

(iii) *Sei $A \in L(E)$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n, \tag{2.7.8}$$

wenn wir vereinbaren, daß $A^0 = I = \mathrm{id}_E$.

Beweis. Übungsaufgabe.

2.7.4. Bemerkung. (i) Ist E endlich dimensional, $\dim E = n$, so ist jede lineare Abbildung $A : E \to F$ stetig, denn sei e_i, $i = 1, \dots, n$, eine Basis von E, so daß jeder Vektor x sich in der Form

$$x = \sum_i \lambda^i e_i \tag{2.7.9}$$

darstellen läßt, dann konvergiert x_k genau dann nach 0, wenn die zugehörigen Basiskomponenten (λ_k^i) nach 0 konvergieren in $\mathbb{K}^n$, Aufgabe 2 von Aufgaben 2.7.5, und somit folgt

$$Ax_k = \sum_i \lambda_k^i A e_i \quad \to \quad 0. \tag{2.7.10}$$

(ii) Wir bezeichnen $L(E, \mathbb{K})$ mit E^* und nennen ihn den *Dualraum* von E. Die Elemente $\varphi \in E^*$ heißen stetige *Linearformen*. Statt $\varphi(x)$ mit $x \in E$ schreiben wir oft $\langle \varphi, x \rangle$, also

$$\langle \varphi, x \rangle = \varphi(x). \tag{2.7.11}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt die zu E, E^* gehörende *kanonische Bilinearform*.

Die Norm auf E^* wird auch als *duale Norm* bezeichnet.

(iii) Für den *Kern* von $A \in L(E,F)$ verwenden wir das Symbol $N(A)$ (*Nullraum*). $N(A)$ ist immer abgeschlossen, wenn A stetig ist, das Bild von A, $R(A)$, hingegen in der Regel nicht.

(iii) Im Gegensatz zum endlichen dimensionalen Fall sind für $A \in L(E) \equiv L(E,E)$ die Bedingungen „A injektiv“ bzw. „A surjektiv“ nicht immer gleichzeitig erfüllt. Betrachte zum Beispiel im Folgenraum l_2 die *shift Operatoren* S_r und S_l, die definiert sind durch

$$S_r : (x_0, x_1, \dots) \quad \to \quad (0, x_0, x_1, \dots) \tag{2.7.12}$$

bzw.

$$S_l : (x_0, x_1, \dots) \quad \to \quad (x_1, x_2, \dots). \tag{2.7.13}$$

S_r ist injektiv, sogar eine Isometrie, aber nicht surjektiv, während S_l surjektiv aber nicht injektiv ist.

2.7.5. Aufgaben.

1 Beweisen Sie Proposition 2.7.3.

2 Sei E ein endlich dimensionaler normierter Raum mit Basis e_i, $i = 1, \dots, n$, dann konvergiert

$$x_k = \sum_i \lambda_k^i e_i$$

genau dann nach 0, wenn die Basiskomponenten (λ_k^i) in $\mathbb{K}^n$ nach 0 konvergieren.

3 Sei E ein Banachraum und $A \in L(E)$. Dann gilt

(i) Die Reihe $((\frac{A^n}{n!}))$ konvergiert absolut in $L(E)$.

(ii) Setze $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$, so gilt $e^A e^B = e^{A+B}$, falls A, B *kommutieren*, d.h. falls der sog. *Kommutator* von A, B

$$[A, B] = AB - BA$$

gleich 0 ist.

4 Sei E ein Banachraum und $A \in L(E)$ mit $\|A\| < 1$. Dann gilt

(i) Die Reihe $((A^n))$ konvergiert. Man nennt sie *Neumannsche Reihe.*

(ii) $I - A$ ist stetig invertierbar, d.h. $(I - A)^{-1}$ existiert und ist stetig, wobei $I = \mathrm{id}_E$. Geben sie die Inverse an.

(iii) Die Menge der stetig invertierbaren Operatoren ist offen in $L(E)$.

5 Die Determinante ist stetig auf $L(\mathbb{K}^n)$.

6 Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{C}$, dann können wir E auch als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen; bezeichnen wir diesen Raum mit $E_{\mathbb{R}}$. Sei $\varphi \in E_{\mathbb{R}}^*$, dann existiert eine komplexe Linearform $\tilde{\varphi}$ auf E, so daß $\varphi = \mathrm{Re}\,\tilde{\varphi}$.
Man zeige,

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix),$$

$\tilde{\varphi}$ ist eindeutig bestimmt, $\tilde{\varphi} \in E^*$ und $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

2.8. Halbstetige Funktionen

2.8.1. Sei E ein metrischer Raum und $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Aus der Definition der Stetigkeit in einem Punkt $x_0 \in E$ folgt, daß f genau dann stetig ist in $x_0 \in E$, falls

$$\forall_{r<f(x_0)} \ \exists_{U\in\mathcal{U}(x_0)} \ \forall_{x\in U} \quad r < f(x) \tag{2.8.1}$$

und

$$\forall_{t>f(x_0)} \ \exists_{V\in\mathcal{U}(x_0)} \ \forall_{x\in V} \quad f(x) < t. \tag{2.8.2}$$

Wenn nur eine der Relationen zutrifft, so nennen wir f *halbstetig* in x_0.

2.8.2. Definition. Sei E ein metrischer Raum und $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. f heißt *unterhalbstetig* (u.h.s.) in $x_0 \in E$, falls (2.8.1) zutrifft und *oberhalbstetig* (o.h.s.) in $x_0 \in E$, falls (2.8.2) gilt.

f heißt *unterhalbstetig* (*oberhalbstetig*) in E, falls f in allen Punkten u.h.s. (o.h.s.) ist.

2.8.3. Bemerkung. (i) f ist genau dann stetig in $x_0 \in E$, wenn f sowohl u.h.s. als auch o.h.s. in x_0 ist.

(ii) f u.h.s. in x_0 ist äquivalent zu $-f$ o.h.s. in x_0.

2.8.4. Proposition. (i) *$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann u.h.s. in $x_0 \in E$, falls*

$$\forall_{r<f(x_0)} \quad f^{-1}((r,\infty]) \in \mathcal{U}(x_0). \tag{2.8.3}$$

(ii) *f ist genau dann u.h.s. in E, falls*

$$\forall_{r\in\mathbb{R}} \quad f^{-1}((r,\infty]) \in \mathcal{O}_E. \tag{2.8.4}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

2.8.5. Corollar. *Eine Teilmenge $A \subset E$ ist genau dann offen bzw. abgeschlossen, wenn die charakteristische Funktion χ_A*[11] *u.h.s. bzw. o.h.s. ist.*

Beweis. Übungsaufgabe.

---

[11] $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

Die halbstetigen Funktionen lassen sich auch mittels Limes inferior und Limes superior charakterisieren.

2.8.6. Proposition. *Sei $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, dann gilt*

(i) *f ist genau dann u.h.s. in $x_0 \in E$, falls*

$$x_n \to x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_0) \leq \underline{\lim}\, f(x_n). \tag{2.8.5}$$

(ii) *f ist genau dann o.h.s. in $x_0 \in E$, falls*

$$x_n \to x_0 \quad \Longrightarrow \quad \overline{\lim}\, f(x_n) \leq f(x_0). \tag{2.8.6}$$

Beweis. Es genügt (i) zu beweisen, wegen Bemerkung 2.8.3 und wegen der Beziehung

$$\underline{\lim}(-f(x_n)) = -\overline{\lim}\, f(x_n). \tag{2.8.7}$$

Wir verweisen auch auf Aufgabe 8 auf Seite 120 von Aufgaben 2.2.29.

„(i) $\Longrightarrow$“ Sei also f u.h.s. in $x_0 \in E$ und $x_n \to x_0$. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $-\infty < f(x_0)$, denn sonst brauchen wir nichts mehr zu beweisen.

Sei $r < f(x_0)$, dann existiert $U \in \mathfrak{U}(x_0)$, so daß

$$r < f(x) \qquad \forall\, x \in U. \tag{2.8.8}$$

Da f.a. x_n in U liegen, folgt

$$r \leq \underline{\lim}\, f(x_n) \tag{2.8.9}$$

und somit

$$f(x_0) \leq \underline{\lim}\, f(x_n). \tag{2.8.10}$$

„$\Longleftarrow$“ f genüge der Implikation (2.8.5). Sei $r < f(x_0)$ (wir dürfen wieder o.B.d.A. annehmen, daß $-\infty < f(x_0)$). Wenn dann die Bedingung (2.8.1) nicht erfüllt ist, so existiert in jeder Kugel $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ ein x_n mit $f(x_n) \leq r$, woraus wir schließen

$$f(x_0) \leq \underline{\lim}\, f(x_n) \leq r; \tag{2.8.11}$$

im Widerspruch zur Annahme $r < f(x_0)$. $\square$

2.8.7. Theorem. *Sei E kompakt und $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ u.h.s., dann existiert $x_0 \in E$ mit*

$$f(x_0) = \inf_{x \in E} f(x). \tag{2.8.12}$$

Beweis. Betrachte eine Minimalfolge[12] $x_n \in E$, d.h.

$$f(x_n) \to \inf_{x \in E} f(x). \tag{2.8.13}$$

Da E kompakt, existiert eine konvergente Teilfolge, die wir nicht umbenennen, so daß $x_n \to x_0$. Es gilt dann

$$f(x_0) \le \underline{\lim} f(x_n) = \lim f(x_n) = \inf_{x \in E} f(x) \le f(x_0). \tag{2.8.14}$$

□

2.8.8. Bemerkung. Sei $f_i : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in I$, eine Familie von Funktionen. Wir erweitern unsere frühere Definition von $\sup_{i\in I} f_i$ und $\inf_{i \in I} f_i$, vgl. Definition 0.4.41 auf Seite 48, indem wir setzen

$$\begin{aligned} (\sup_{i\in I} f_i)(x) &= \sup_{i\in I} f_i(x), \\ (\inf_{i\in I} f_i)(x) &= \inf_{i\in I} f_i(x), \end{aligned} \tag{2.8.15}$$

siehe auch Bemerkung 0.4.39 auf Seite 46.

2.8.9. Theorem. *Sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen $f_i : E \to \overline{\mathbb{R}}$, die in $x_0 \in E$ u.h.s. sind, dann ist auch $f = \sup_i f_i$ u.h.s. in x_0.*

Beweis. Sei $r < f(x_0)$, dann existiert f_i mit

$$r < f_i(x_0) \le f(x_0) \tag{2.8.16}$$

und weiter—wegen der Unterhalbstetigkeit von f_i— eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x_0)$, so daß

$$r < f_i(x) \le f(x) \qquad \forall\, x \in U. \tag{2.8.17}$$

□

2.8.10. Corollar. *Sei $f_i : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in I$, eine Familie von stetigen Funktionen, so ist $f = \sup_i f_i$ u.h.s. auf E.*

2.8.11. Aufgaben.

1 Man beweise Proposition 2.8.4 und Corollar 2.8.5.

2 Man verifiziere (2.8.7).

---

[12] Eine solche Minimalfolge existiert immer: wenn $\inf_E f$ HP von $f(E)$ ist, dann finden wir eine nichttriviale Minimalfolge, ist $\inf_E f$ kein HP von $f(E)$, dann existiert $x_0 \in E$, so daß $f(x_0) = \inf_E f$ und die stationäre Folge $x_n = x_0$ ist Minimalfolge.

3 Sei $f_i : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in I$, eine endliche Familie von Funktionen, die in $x_0 \in E$ u.h.s. sind, dann ist auch $f = \inf_i f_i$ in x_0 u.h.s..

Man zeige durch ein Gegenbeispiel, daß diese Behauptung im Falle einer unendlichen Indexfamilie nicht zu gelten braucht.

4 Seien $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ u.h.s. Funktionen, dann sind auch die Funktionen $f + g$ und—falls $f, g \geq 0$—, fg in allen Punkten uh.s., in denen die Summe bzw. das Produkt definiert sind.

KAPITEL 3

Differentiation in einer Variablen

3.1. Differenzierbare Funktionen

Wir betrachten Abbildungen $f : \Omega \to F$, die eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{K}$ in einen Banachraum F abbilden, wobei F natürlich ein Vektorraum über $\mathbb{K}$[1] ist.

3.1.1. Definition. $f : \Omega \to F$ heißt in $x_0 \in \Omega$ *differenzierbar*, falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.1.1}$$

existiert. Den Limes der *Differenzenquotienten* bezeichnen wir mit $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ und nennen ihn die *Ableitung* von f an der Stelle x_0.

$f'(x_0)$ ist ein Vektor in F und

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.1.2}$$

ist gleichbedeutend damit, daß

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right\| \to 0, \tag{3.1.3}$$

falls $x \to x_0$.

Ist f in jedem Punkt $x \in \Omega$ differenzierbar, so heißt f *differenzierbar* in Ω. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f' : \Omega &\to F, \\ x &\to f'(x) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

nennen wir dann *Ableitung* von f. Wenn die Ableitung f' stetig ist, so heißt f *stetig differenzierbar*.

[1] Wir erinnern daran, daß $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Aus der Definition folgt unmittelbar

3.1.2. Bemerkung. (i) Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f auch stetig in x_0.

(ii) Die in Ω differenzierbaren Funktionen mit gleicher Zielmenge F bilden einen Vektorraum über $\mathbb{K}$.

3.1.3. Das Symbol $\frac{df}{dx}$ für die Ableitung geht auf Leibniz[2] zurück und wird daher auch als Leibnizsches Symbol bezeichnet. Kürzen wir die Differenzen $f(x)-f(x_0)$ bzw. $x-x_0$ mit Δf bzw. Δx ab, so ergibt sich im Grenzübergang

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{df}{dx}. \tag{3.1.5}$$

3.1.4. Definition (Landausche Symbole)**.** (i) Seien E, F Banachräume, $\Omega\subset E$ offen und $f:\Omega\to F$ eine Abbildung. Wir sagen „f verschwindet in x_0 von höherer Ordnung als α“ mit einem $\alpha>0$, falls

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}\frac{f(x)}{\|x-x_0\|^\alpha}=0. \tag{3.1.6}$$

Um diesen Sachverhalt einfach beschreiben zu können, führen wir das *Landausche Symbol* „o“ („Klein-o“) ein und schreiben anstelle des Limes

$$f(x)=o(\|x-x_0\|^\alpha). \tag{3.1.7}$$

Wir können o als Funktion auffassen, die eine Umgebung der 0 in $\mathbb{R}^*_+$ nach F abbildet und die die Eigenschaft besitzt, daß

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{o(t)}{t}=0. \tag{3.1.8}$$

Gelegentlich ist es nützlich, eine Funktion $\epsilon=\epsilon(t)$ zu definieren durch

$$\epsilon(t)=\begin{cases}\frac{o(t)}{t}, & t>0,\\ 0, & t=0,\end{cases} \tag{3.1.9}$$

um dann (3.1.7) auszudrücken als

$$f(x)=\epsilon(\|x-x_0\|^\alpha)\,\|x-x_0\|^\alpha \tag{3.1.10}$$

oder einfach

$$f(x)=\epsilon\|x-x_0\|^\alpha, \tag{3.1.11}$$

[2]Nicht nur das Symbol geht auf Leibniz zurück, sondern die ganze Differentialrechnung. Leibniz und Newton haben sie unabhängig voneinander begründet.

wobei die Funktion ϵ die Bedingung

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \epsilon(t) = 0 \tag{3.1.12}$$

erfüllt.

(ii) Wenn f so beschaffen ist, daß eine Konstante c und eine Kugel $B_r(x_0) \subset \Omega$ existiert, so daß

$$\|f(x)\| \leq c\|x - x_0\|^\alpha \qquad \forall\, x \in B_r(x_0), \tag{3.1.13}$$

so führen wir zur Abkürzung dieses Sachverhalts das Landausche Symbol „O“ („Groß-o“) ein, indem wir schreiben

$$f(x) = O(\|x - x_0\|^\alpha). \tag{3.1.14}$$

(iii) Wenn wir formal in den obigen Definitionen $\alpha = 0$ setzen, so ist $\|x - x_0\|^\alpha = 1$, und wir vereinbaren, daß

$$f(x) = o(1) \quad (x \to x_0) \tag{3.1.15}$$

bedeutet

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \tag{3.1.16}$$

und

$$f(x) = O(1) \quad (x \to x_0), \tag{3.1.17}$$

daß f in einer Umgebung von x_0 beschränkt ist.

(iv) Diese Definitionen sind auch sinnvoll, wenn f nicht in x_0 definiert ist, sondern nur in einer punktierten Umgebung

$$\dot{B}_r(x_0) = B_r(x_0) \backslash \{x_0\}. \tag{3.1.18}$$

3.1.5. Beispiele. (i) Sei $E = F = \mathbb{K}$ und $f(x) = (x - x_0)^n, n \in \mathbb{N}^*$, ein Polynom, so ist

$$f(x) = o(|x - x_0|^\alpha) \qquad \forall\, 0 < \alpha < n \tag{3.1.19}$$

und

$$f(x) = O(|x - x_0|^n) \tag{3.1.20}$$

(ii) Sei $E = F = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}_+^*$ und $f(x) = \sqrt{x}$, so ist

$$f(x) = o(x^\alpha) \qquad \forall\, 0 < \alpha < \tfrac{1}{2} \tag{3.1.21}$$

und

$$f(x) = O(\sqrt{x}). \tag{3.1.22}$$

(iii) Sei $E = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}$ und $f(x) = x^1 x^2$, $x = (x^1, x^2)$, so ist

$$f(x) = o(|x|^\alpha) \qquad \forall\, 0 < \alpha < 2 \tag{3.1.23}$$

und

$$f(x) = O(|x|^2) \tag{3.1.24}$$

3.1.6. Proposition. *$f : \Omega \to F$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn ein Vektor $u \in F$ existiert, so daß*

$$f(x) = f(x_0) + u(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{3.1.25}$$

Es gilt dann $u = f'(x_0)$.

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Wähle $u = f'(x_0)$ und definiere

$$o(\|x - x_0\|) = f(x) - f(x_0) - u(x - x_0). \tag{3.1.26}$$

„$\Longleftarrow$“ Wenn (3.1.25) richtig ist, so erhalten wir für $x \neq x_0$

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - u \right\| = \frac{\|o(|x - x_0|)\|}{|x - x_0|} \to 0, \tag{3.1.27}$$

falls $x \to x_0$. Daher ist f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = u$. □

3.1.7. Eine *lineare* Abbildung $A : \mathbb{K} \to F$ läßt sich immer in der Form

$$Ax = A(1)x \equiv ux \tag{3.1.28}$$

mit einem Vektor $u \in F$ darstellen.

Umgekehrt ist für festes $u \in F$ die Abbildung $x \to ux$ linear und *stetig*.

Wir können daher Proposition 3.1.6 auch so formulieren:

3.1.8. Proposition. *Eine Abbildung $f : \Omega \to F$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn eine stetige lineare Abbildung $A : \mathbb{K} \to F$ existiert, so daß*

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{3.1.29}$$

3.1.9. Es ist gebräuchlich, und im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen auch sinnvoll, die Ableitung $f'(x_0)$, die ein Vektor ist, mit der ihr zugeordneten linearen Abbildungen zu identifizieren.

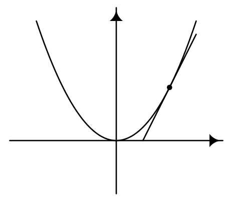
Die Ableitung einer Funktion f im Punkte x_0 ist dann eine *(lokale) stetige lineare Approximation* von $f - f(x_0)$, so daß der Fehler, den wir auch als *Restglied* bezeichnen, ein $o(\|x - x_0\|)$ ist.

Beachte, daß für eine beliebige stetige lineare Abbildung $A : \mathbb{K} \to F$ wir f „approximieren“ können in der Form

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R \tag{3.1.30}$$

mit einem geeigneten Restglied R, das jedoch nur dann ein $o(\|x - x_0\|)$ ist, wenn $A = f'(x_0)$.

Im Falle $\mathbb{R} = \mathbb{K} = F$ können wir die lineare Approximierung auch graphisch veranschaulichen. Sei $\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, so ist φ eine affine Abbildung und graph φ, der eine Gerade ist, berührt[3] graph f im Punkte $(x_0, f(x_0))$, d.h. graph φ ist *Tangente* an graph f in dem betreffenden Punkt.



Die Identifizierung einer linearen Abbildung mit einem Vektor in ihrem Bild geht natürlich nur, wenn der Definitionsbereich eindimensional ist. Wir wollen daher, um der begrifflichen Klarheit willen und auch wegen der bereits angesprochenen Verallgemeinerungen, folgende Definition einführen:

3.1.10. Definition. (i) Ist $f : \Omega \to F$ in x_0 differenzierbar, so bezeichnen wir mit $Df(x_0)$ die stetige lineare Abbildung, die in (3.1.29) mit A abgekürzt ist.

(ii) Seien E, F normierte Räume über einem gemeinsamen Körper, so bilden die stetigen linearen Abbildungen von E nach F einen Vektorraum, für den wir das Symbol $L(E, F)$ verwenden.

(iii) Ist f in Ω differenzierbar, so bezeichnen wir als *Ableitung*[4] von f, in Zeichen, Df, die Abbildung

$$Df : \Omega \to L(\mathbb{K}, F), \qquad x \to Df(x). \tag{3.1.31}$$

[3]Unter *berühren* verstehen wir immer *tangential* berühren im Gegensatz zu *schneiden*.

[4]Die Ambiguität mit der früheren Verwendung von Ableitung für f', kann durch die Identifizierung von $L(\mathbb{K}, F)$ mit F aufgehoben werden. Eine Verwechslung ist jedenfalls wegen der unterschiedlichen Symbole f' und Df ausgeschlossen.

3.1.11. Proposition. *Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ in x_0 differenzierbar, so gilt*

(i)
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$
$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Diese Regeln gelten auch für vektorwertige Funktionen.

(ii) $$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad (\textit{Produktregel})$$

(iii) *Ist $g(x_0) \neq 0$, so gilt die Quotientenregel*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis. „(i)" Folgt unmittelbar aus der Definition und den Grenzwertsätzen.

„(ii)" Es gilt die Identität

(3.1.32)
$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + \big(g(x) - g(x_0)\big)f(x_0).$$

Dividiere dann durch $x - x_0$, $x \neq x_0$, und gehe zum Limes über.

„(iii)" Folgt aus (ii), wenn wir beachten, daß aus Stetigkeitsgründen g auch in in einer Umgebung von x_0 nicht verschwindet, so daß in dieser Umgebung

(3.1.33)
$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}$$

Bilden wir nun den Differenzenquotienten und lassen $x \to x_0$ streben, so erhalten wir

(3.1.34)
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

□

Aus der Produktregel schließen wir induktiv

3.1.12. Corollar. *Die Potenzfunktionen $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$, sind differenzierbar in $\mathbb{K}$ und ihre Ableitung ist*

(3.1.35)
$$f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar; sei sie also schon für $n-1 \geq 0$ bewiesen, dann folgt aus der Produktregel, angewandt auf $f_n = f_{n-1}f_1$,

$$\begin{aligned} f_n' &= f_{n-1}'f_1 + f_{n-1}f_1' \\ &= (n-1)x^{n-2}x + x^{n-1} = nx^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.1.36}$$

□

3.1.13. Theorem (Kettenregel)**.** *Sei $g : \Omega \to \mathbb{K}$ in x_0 und $f : B_r(g(x_0)) \to F$ in $g(x_0)$ differenzierbar, so ist die Komposition $f \circ g$ in einer Umgebung $B_\delta(x_0)$ definiert und in x_0 ebenfalls differenzierbar mit*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) \tag{3.1.37}$$

Beweis. (i) Da g in x_0 stetig ist, bildet g eine kleine Kugel $B_\delta(x_0)$ in $B_r(g(x_0))$ ab. Für solche Werte von x erhalten wir dann aus (3.1.29), angewandt auf $f = f(y)$, $y = g(x)$ und $y_0 = g(x_0)$,

$$\begin{aligned} f \circ g(x) - f \circ g(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) \\ = f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) \\ + o(|g(x) - g(x_0)|). \end{aligned} \tag{3.1.38}$$

Nun ist

$$g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|), \tag{3.1.39}$$

so daß

$$\begin{aligned} f \circ g(x) - f \circ g(x_0) &= f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + f'(g(x_0))o(|x - x_0|) + o(|g(x) - g(x_0)|). \end{aligned} \tag{3.1.40}$$

(ii) Das Restglied

$$f'(g(x_0))o(|x - x_0|) + o(|g(x) - g(x_0)|) \tag{3.1.41}$$

ist ein $o(|x - x_o|)$: Dies trifft sicherlich auf den ersten Summanden zu. Um den zweiten Term abzuschätzen, verwenden wir die Überlegungen in (3.1.9) und (3.1.10), d.h. wir schreiben

$$o(|g(x) - g(x_0)|) = \epsilon(|g(x) - g(x_0)|)|g(x) - g(x_0)| \tag{3.1.42}$$

und sehen, daß nach Division durch $x - x_0$ und anschließendem Grenzübergang $x \to x_0$, die rechte Seite nach $\epsilon(0)|g'(x_0)| = 0$ konvergiert. □

3.1.14. Bemerkung. Man kann sich die Kettenregel mittels der Leibnizschen Symbole sehr einfach merken. Bezeichnen wir die Variable von f mit y und die von g mit x, so ist, wenn wir der Übersichtlichkeit halber die Argumente weglassen,

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{3.1.43}$$

Die Verknüpfung $f \circ g$ fassen wir als Variablentransformation auf, $y = g(x)$, und die Ableitung bez. der neuen Variablen erhält man, indem man zunächst f nach der alten Variablen differenziert und dann die alte Variable nach der neuen. Das Ergebnis ergibt sich auch formal durch Kürzung von „Zähler“ und „Nenner“ in den jeweiligen „Brüchen“ .

3.1.15. Beispiele. (i) Sei $f(y) = \sin y$ und $y = g(x) = e^x$, $x, y \in \mathbb{R}$, dann ist die Ableitung von $f \circ g$[5]

$$(f \circ g)' = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = \cos(e^x)e^x. \tag{3.1.44}$$

(ii) Sei $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda, x \in \mathbb{K}$, so gilt

$$f'(x) = \lambda e^{\lambda x}. \tag{3.1.45}$$

(iii) Sei $f(y) = e^y$ und $y = g(x) = \log x$. Nehmen wir einmal an, wir wüßten zwar, daß g die Inverse der Exponentialfunktion ist und differenzierbar, aber noch nicht, daß $g' = \frac{1}{x}$.

Dann läßt sich der Wert der Ableitung von g mittels der Kettenregel sehr leicht ermitteln, nämlich, aus $x = (f \circ g)(x)$ schließen wir

$$1 = (f \circ g)' = \frac{df}{dy}\frac{dg}{dx} = e^y\frac{dg}{dx}, \tag{3.1.46}$$

und damit

$$\frac{dg}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \tag{3.1.47}$$

Diese Folgerung aus der Kettenregel gilt auch allgemein.

3.1.16. Corollar. *Seien Ω, Ω' offene Teilmengen von $\mathbb{K}$, $f : \Omega \to \Omega'$ invertierbar mit Inverser $g : \Omega' \to \Omega$, und nehme an, daß f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$, dann gilt*

$$g'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}. \tag{3.1.48}$$

[5] Wir unterstellen im Augenblick, daß die Ableitungen der elementaren Funktionen bekannt sind. Eine Herleitung wird später erfolgen.

Beweis. Aus id $= g \circ f$ schließen wir mittels der Kettenregel

$$1 = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{3.1.49}$$

Daher sind beide Ableitungen von 0 verschieden und die Behauptung bewiesen. □

3.1.17. Definition (höhere Ableitungen)**.** (i) Sei $f : \Omega \to F$. Wir definieren dann induktiv die höheren Ableitungen von f durch $f^{(0)} = f$, und $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, $n \ge 1$. Wenn $f^{(n)}$ existiert, so heißt $f^{(n)}$ die *n-te Ableitung* von f; f selbst heißt *n-mal differenzierbar*.

Es ist auch die Bezeichnung $\frac{d^n f}{dx^n}$ anstelle $f^{(n)}$ gebräuchlich.

f heißt *n-mal stetig differenzierbar*, wenn die n-te Ableitung stetig ist.

Wenn beliebig hohe Ableitungen von f existieren, so nennen wir f *unendlich oft differenzierbar*.

(ii) Wir führen noch folgende *Funktionenräume* ein

$$\begin{aligned}
C^0(\Omega, F) &= \{\, f \colon f : \Omega \to F,\ f \text{ stetig} \,\}, \\
C^0(\bar{\Omega}, F) &= \{\, f \colon f : \bar{\Omega} \to F,\ f \text{ stetig} \,\}, \\
C^k(\Omega, F) &= \{\, f \colon f\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \,\}, \\
C^k(\bar{\Omega}, F) &= \{\, f \in C^k(\Omega, F) \colon \underset{0 \le n \le k}{\forall} f^{(n)} \text{ stetig fortsetzbar auf } \bar{\Omega} \,\}, \\
C^\infty(\Omega, F) &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(\Omega, F), \\
C^\infty(\bar{\Omega}, F) &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(\bar{\Omega}, F).
\end{aligned}$$

Falls $F = \mathbb{R}$, so schreiben wir meist $C^0(\Omega)$ anstelle von $C^0(\Omega, F)$, entsprechend für die anderen Räume.

3.1.18. Bemerkung. Die oben definierten Funktionenräume sind Vektorräume über $\mathbb{K}$. Wir werden später auf einigen eine Norm einführen und sehen, daß sie Banachräume sind.

3.1.19. Proposition. *$f : \Omega \to \mathbb{K}^n$, $f = (f^i)$, ist genau dann in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, wenn die Komponenten f^i differenzierbar sind in x_0. Es gilt dann*

$$f'(x_0) = ((f^i)'(x_0)). \tag{3.1.50}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

3.1.20. Aufgaben.

1 $f(x) = O(\|x - x_0\|^\alpha) \implies f(x) = o(\|x - x_0\|^\beta) \quad \forall\, 0 < \beta < \alpha.$

2 Sei $f : \Omega \to F$ n-mal differenzierbar, $n \geq 1$, so folgt $f \in C^{n-1}(\Omega, F)$.

3 Man beweise, daß $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$, im Ursprung nicht differenzierbar ist.

4 Man zeige, daß die Funktion $f(z) = \bar{z}, z \in \mathbb{C}$, nirgends differenzierbar ist.

5 Man bestimme die Ableitung der reellen Funktionen

(i) $a^x, a > 0$

(ii) $\log\log(1 + x)$, $x > 0$

(iii) $(x^x)^x$, $x > 0$

6 Man zeige, daß

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

zu $C^2(\mathbb{R}) \backslash C^3(\mathbb{R})$ gehört.

7 Beweisen Sie Proposition 3.1.19.

8 Sei $f : \Omega \to F$ differenzierbar in x_0 und sei $\varphi : F \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional, dann ist $g = \varphi \circ f$ differenzierbar in x_0, und es gilt $g'(x_0) = \varphi(f'(x_0))$.

9 Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen und beschränkt und F ein Banachraum über $\mathbb{K}$, dann definieren wir in $C^n(\bar{\Omega}, F)$ eine Norm

$$\|f\|_{n,\bar{\Omega}} = \sup_{0 \leq k \leq n} \sup_{x \in \Omega} \|f^{(k)}(x)\|.$$

Im Falle $F = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ schreiben wir $|f|_{n,\bar{\Omega}}$ anstelle von $\|f\|_{n,\bar{\Omega}}$. Man zeige, daß $C^n(\bar{\Omega}, F)$ bezüglich dieser Norm ein Banachraum ist.

3.2. Der Mittelwertsatz und seine Folgerungen

In diesem Abschnitt wollen wir besonders *reelle Funktionen* untersuchen, d.h. Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, die auf einem offenen oder abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind. Die Eigenschaft von $\mathbb{R}$, ein *geordneter* Körper zu sein, wird uns zusätzliche Informationen über differenzierbare Funktionen liefern.

Wir definieren zunächst

3.2.1. Definition. Sei E ein metrischer Raum und $f : E \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Abbildung. Wir sagen, f besitze in $x_0 \in E$ ein *lokales (globales) Minimum*, falls eine Umgebung $U = U(x_0)$ existiert, so daß

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in U \tag{3.2.1}$$

bzw., falls

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in E. \tag{3.2.2}$$

Völlig analog wird definiert, wann ein *lokales (globales) Maximum* vorliegt. Minima oder Maxima nennt man zusammengefaßt *Extrema* und die entsprechenden Punkte, in denen sie angenommen werden, *Extremalstellen*.

Gelten in (3.2.1) bzw. (3.2.2) für $x \neq x_0$ die strikten Ungleichungen, so sprechen wir von einem *strikten* lokalen (globalen) Minimum; analog wenn ein Maximum vorliegt.

3.2.2. Proposition. *Nehme an, daß $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum besitze. Wenn dann f in x_0 differenzierbar ist, so muß notwendigerweise $f'(x_0) = 0$ gelten.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß in x_0 ein lokales Minimum vorliegt (bei einem Maximum betrachte $-f$ anstelle von f).

Gelte also

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in B_\epsilon(x_0), \tag{3.2.3}$$

dann folgt

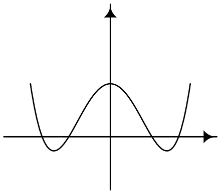
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \forall\, x_0 < x < x_0 + \epsilon, \tag{3.2.4}$$

und daher ist $f'(x_0) \geq 0$.

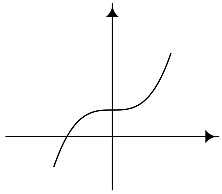
Betrachten wir den Differenzenquotienten für $x < x_0$ und gehen dann zum Limes über, so erhalten wir $f'(x_0) \leq 0$, d.h. $f'(x_0) = 0$. □

3.2.3. Punkte in denen die Ableitung einer differenzierbaren Funktion verschwindet, nennen wir *kritische Punkte* (der Funktion). Das Ergebnis, das wir eben bewiesen haben, läßt sich daher auch so ausdrücken: Extremalstellen von reellen, differenzierbaren Funktionen sind kritische Punkte.

Die folgenden Abbildungen zeigen zwei Funktionen, von denen die eine drei lokale Extrema besitzt, während die andere zwar einen kritischen Punkt hat, der jedoch keine Extremalstelle ist.



Extrema



Wendepunkt

3.2.4. Proposition (Rolle). *Sei $f \in C^0([a,b])$ differenzierbar in (a,b) und gelte $f(a) = f(b)$, so existiert $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Setze

$$m = \inf f([a,b]) \quad \text{und} \quad M = \sup f([a,b]). \tag{3.2.5}$$

Infimum und Supremum werden angenommen, da $[a,b]$ kompakt ist, vgl. Theorem 2.3.17 auf Seite 126. Wenn $m = M = f(a)$, so ist $f \equiv \text{const}$ und $f' \equiv 0$.

Nehme daher z.B. an, daß $M \neq f(a)$, dann wird das Maximum im Innern angenommen, d.h. es existiert $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = M$, woraus nach dem oben bewiesenen $f'(\xi) = 0$ folgt. □

3.2.5. Theorem (Mittelwertsatz (MWS)). *Sei $f \in C^0([a,b])$ differenzierbar in (a,b), dann existiert $\xi \in (a,b)$, so daß*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{3.2.6}$$

Beweis. Wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \tag{3.2.7}$$

an. □

Für vektorwertige Funktionen nimmt der MWS die Form einer Ungleichung an.

3.2.6. Theorem. *Sei F ein reeller Banachraum und $f : [a,b] \to F$ stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b), dann gilt*

$$\|f(b) - f(a)\| \le \sup_{x \in (a,b)} \|f'(x)\|(b-a). \tag{3.2.8}$$

Beweis. Sei $\varphi \in F^*$ ein beliebiges Element mit $\|\varphi\| = 1$. Definiere $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \langle \varphi, f(x) \rangle. \tag{3.2.9}$$

Dann ist $g \in C^0([a,b])$, differenzierbar in (a,b) und als Ableitung erhält man

$$g'(x) = \langle \varphi, f'(x) \rangle, \tag{3.2.10}$$

wie man leicht sieht, vgl. Aufgabe 8 von Aufgaben 3.1.20 auf Seite 168. Beachte auch, daß wir die Schreibweise in (2.7.11) auf Seite 152 benutzen, um $\varphi \circ f(x)$ auszudrücken.

Wenden wir den MWS auf g an, so folgt

$$\langle \varphi, f(b) - f(a) \rangle = \langle \varphi, f'(\xi) \rangle (b-a) \tag{3.2.11}$$

mit einem geeigneten $\xi \in (a,b)$, oder, nach Definition der dualen Norm

$$|\langle \varphi, f(b) - f(a) \rangle| \le \|f'(\xi)\|(b-a) \le \sup_{x \in (a,b)} \|f'(x)\|(b-a). \tag{3.2.12}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus dem anschließenden Lemma 3.2.7. □

3.2.7. Lemma. *Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, dann gilt für alle $u \in E$*

$$\|u\| = \sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\|=1}} |\langle \varphi, u \rangle|. \tag{3.2.13}$$

Beweis. Offensichtlich ist wegen $|\langle \varphi, u \rangle| \le \|\varphi\|\|u\|$

$$\sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\|=1}} |\langle \varphi, u \rangle| \le \|u\|, \tag{3.2.14}$$

so daß wir nur noch die umgekehrte Abschätzung beweisen müssen.

Diesen Teil des Beweises können wir aber im Augenblick nur führen, wenn E ein Hilbertraum ist. Den allgemeinen Fall werden wir später in Band II beweisen, wenn uns einige funktionalanalytische Hilfsmittel zur Verfügung stehen, wie z.B. der Satz von Hahn-Banach, vgl. Theorem **??** und insbesondere Corollar **??** von Analysis II.

Sei also E ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann können wir jeden Vektor $v \in E$ auch als Element $\varphi \in E^*$ auffassen, indem wir definieren

$$\varphi(u) = \langle u, v \rangle \qquad \forall\, u \in E, \tag{3.2.15}$$

wobei wir jetzt $\varphi(u)$ schreiben anstatt $\langle \varphi, u \rangle$, wegen der Verwechslungsmöglichkeit mit dem Skalarprodukt.

Für diese *Einbettung* $j : E \to E^*$, $j(v) = \varphi$, gilt $\|\varphi\| = \|v\|$, wie man sich leicht überlegt, vgl. Aufgabe 6 von Aufgaben 3.2.16.

Zum Beweis der Abschätzung

$$\sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(u)| \geq \|u\|, \tag{3.2.16}$$

dürfen wir annehmen, daß $u \neq 0$, denn sonst brauchen wir nichts zu beweisen. Wählen wir nun $\varphi = j(\frac{u}{\|u\|})$, so sehen wir, daß

$$\|u\| = \varphi(u) \qquad \text{und} \qquad \|\varphi\| = 1. \tag{3.2.17}$$

Damit ist alles bewiesen. □

Wir können auch eine Variante des Mittelwertsatzes herleiten für differenzierbare Funktionen, die eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ in einen Banachraum abbilden.

3.2.8. Theorem. *Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen und konvex,*[6] *F ein Banachraum über $\mathbb{K}$ und $f : \Omega \to F$ differenzierbar. Dann gilt für beliebige Punkte x, $x_0 \in \Omega$*

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \sup_{y \in [x_0, x]} \|f'(y)\| \, |x - x_0|. \tag{3.2.18}$$

Beweis. Wir wenden Theorem 3.2.6 auf die Funktion

$$g(t) = f(tx + (1-t)x_0), \qquad 0 \leq t \leq 1, \tag{3.2.19}$$

und beachten dabei, daß nach der Kettenregel

$$g'(t) = f'(tx + (1-t)x_0)(x - x_0). \tag{3.2.20}$$

□

Aus diesem Resultat können wir zwei Folgerungen ziehen

3.2.9. Corollar. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.2.8 gilt die Abschätzung*

$$\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| \leq \sup_{y \in [x_0, x]} \|f'(y) - f'(x_0)\| \, |x - x_0|. \tag{3.2.21}$$

Beweis. Fixiere $x_0 \in \Omega$ und wende Theorem 3.2.8 auf die Abbildung

$$g(x) = f(x) - f'(x_0)x \tag{3.2.22}$$

an. □

3.2.10. Corollar. *Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, $f : \Omega \to F$ differenzierbar und gelte $f' \equiv 0$, so ist $f \equiv \mathrm{const}$.*

[6] Vgl. die Definition in Fußnote 7 auf Seite 141.

Beweis. Sei $y \in \Omega$ ein beliebiger Punkt. Setze $\Lambda = \{ x \in \Omega \colon f(x) = f(y) \}$. $\Lambda \neq \emptyset$, da $y \in \Lambda$ und wir werden zeigen, daß Λ sowohl offen als auch abgeschlossen ist und damit gleich Ω, vgl. Bemerkung 2.5.22 auf Seite 142.

Die Abgeschlossenheit von Λ folgt sofort aus der Stetigkeit von f (differenzierbare Funktionen sind stetig), so daß wir nur noch die Offenheit beweisen müssen.

Sei $x_0 \in \Lambda$; wähle r so, daß $B_r(x_0) \subset \Omega$ und wende Theorem 3.2.8 auf f in $B_r(x_0)$ an. Dann erhalten wir $B_r(x_0) \subset \Lambda$. □

Monotone Funktionen

3.2.11. Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine Intervall. Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* bzw. *monoton fallend*, falls für alle x_1, $x_2 \in I$ gilt

$$x_1 \le x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2) \tag{3.2.23}$$

bzw.

$$x_1 \le x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2). \tag{3.2.24}$$

Bleiben die Implikationen richtig, wenn „$\le$" bzw. „$\ge$" durch die strikten Ungleichungen ersetzt werden, so heißt die Abbildung *strikt monoton wachsend* bzw. *strikt monoton fallend*.

3.2.12. Proposition. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f genau dann monoton wachsend bzw. fallend, wenn $f'(x) \ge 0$ bzw. $f'(x) \le 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$.*

Gilt $f' > 0$ bzw. $f' < 0$, so ist die Monotonie strikt.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß f monoton wächst.

„$\Longrightarrow$" Sei f monoton wachsend, dann ist für $x > x_0$ der Differenzenquotient nicht-negativ und somit $f'(x_0) \ge 0$.

„$\Longleftarrow$" Die Umkehrung und der letzte Teil der Behauptung folgen aus dem MWS. □

3.2.13. Theorem (Existenz der Inversen)**.** *Sei $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte $f' \neq 0$ in I, dann ist $J = f(I)$ ein offenes Intervall und es existiert eine differenzierbare Inverse von f, $f^{-1} : J \to I$, mit*

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} \qquad \forall\, x \in I. \tag{3.2.25}$$

Beweis. „(i)“ Aus dem Satz von Rolle erhalten wir, daß f injektiv ist.

„(ii)“ $J = f(I)$ ist ein Intervall, da f stetig ist und stetige Bilder von zusammenhängenden Mengen wieder zusammenhängend sind, vgl. Proposition 2.5.3 auf Seite 136 und Theorem 2.5.4. Gehörte einer der Endpunkte von J zu J, so hieße dies, daß f sein Maximum oder sein Minimum in I annähme im Widerspruch zu $f' \neq 0$ (siehe Proposition 3.2.2). Daher ist J offen.

Die gleiche Schlußweise zeigt, daß f offene Teilintervalle von I in offene Teilintervalle von J abbildet und somit offen ist, d.h. $f^{-1} : J \to I$ ist stetig und f ein Homöomorphismus von I auf J.

„(iii)“ Da f ein Homöomorphismus ist, gilt

$$x \to x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \to f(x_0). \tag{3.2.26}$$

Setze $\xi = f(x)$, dann ist

$$\frac{f^{-1}(\xi) - f^{-1}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)^{-1}, \tag{3.2.27}$$

woraus wegen (3.2.26) die Behauptung folgt. □

Wir können auch eine Variante dieses Theorems für komplexe Funktionen beweisen.

3.2.14. Theorem. *Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \Omega'$ ein differenzierbarer Homöomorphismus, so daß $f'(z) \neq 0 \;\forall\, z \in \Omega$. Dann ist die Inverse $f^{-1} : \Omega' \to \Omega$ ebenfalls differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(f(z)) = (f'(z))^{-1} \qquad \forall\, z \in \Omega. \tag{3.2.28}$$

Beweis. Da wir jetzt voraussetzen, daß f ein Homöomorphismus ist, folgt die Behauptung direkt aus Teil (iii) des vorigen Beweises. □

3.2.15. Beispiele. (i) Die Potenzfunktionen $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ mit $f_n(x) = x^n$ erfüllen die Voraussetzungen von Theorem 3.2.13, so daß die Ableitung der Wurzelfunktionen $g_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$ existiert und $g_n'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

(ii) Wir werden bald beweisen, daß die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ differenzierbar ist und $f' = f$. Daraus folgern wir, daß die Inverse $\log x$, $x > 0$, differenzierbar ist mit $\log'(x) = \frac{1}{x}$.

3.2.16. Aufgaben.

1 Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig, so ist f monoton.

2 Beweisen Sie, daß unter den Voraussetzungen von Theorem 3.2.13 f strikt monoton ist und daher f' ein Vorzeichen besitzt.

3 Bestimmen sie die Ableitung von $f(x) = a^x$, $a > 0$, und von der Inversen von f.

4 Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

überall differenzierbar ist, daß aber f' im Ursprung unstetig ist.

5 Man beweise, ohne die Exponentialfunktion zu benutzen, daß die Funktion $f(x) = x^p$, $x \in \mathbb{R}^*_+$, $p \in \mathbb{Q}$, differenzierbar ist und $f'(x) = px^{p-1}$.

6 Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $j : H \to H^*$ die in (3.2.15) beschriebene Identifikation von einem Vektor $v \in H$ mit einem Element $\varphi = j(v) \in H^*$. Man zeige, daß j eine injektive, semilineare[7] und normtreue Abbildung ist, d.h. $\|j(v)\| = \|v\| \; \forall \, v \in H$.

3.3. Die Regeln von de l'Hospital

Aus der Reihendarstellung von e^x sehen wir sofort, daß der Limes

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} \tag{3.3.1}$$

existiert, ohne daß wir ihn formal durch

$$\frac{\lim_{x \to 0}(e^x - 1)}{\lim_{x \to 0} x} \tag{3.3.2}$$

darstellen können, da wir dann einen undefinierten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ erhalten.

In diesem Abschnitt wollen wir ganz allgemein untersuchen unter welchen Bedingungen die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{3.3.3}$$

existieren, wenn sowohl f als auch g in a verschwinden oder unendlich werden. a ist dabei ein Element von $\overline{\mathbb{R}}$ und die Konvergenz ist ebenfalls im Sinne von $\overline{\mathbb{R}}$ zu verstehen.

Das entscheidende Hilfsmittel ist der sog. *verallgemeinerte Mittelwertsatz*

[7] Seien E, F Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $j : E \to F$ heißt *semilinear*, falls $j(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} j(x) + \bar{\mu} j(y) \; \forall \, x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

3.3.1. Theorem (verallgemeinerter MWS). *Seien die Funktionen* $f, g \in C^0([a,b])$, $a, b \in \mathbb{R}$, *in* $I = (a,b)$ *differenzierbar und gelte* $g'(x) \neq 0 \;\forall\, x \in I$. *Dann existiert* $\xi \in I$, *so daß*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{3.3.4}$$

Da g' in I nirgends verschwindet, ist insbesondere $g(b) \neq g(a)$ (Satz von Rolle), so daß der Quotient wohldefiniert ist. Wendeten wir auf Zähler und Nenner getrennt den bekannten MWS an, so folgte

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\eta)}, \qquad \xi, \eta \in I. \tag{3.3.5}$$

Das Besondere an (3.3.4) ist daher, daß wir $\xi = \eta$ wählen können.

Beweis von Theorem 3.3.1. „(i)" g ist stetig und injektiv und somit monoton, Aufgabe 1 von Aufgaben 3.2.16 auf Seite 174. Nehmen wir o.B.d.A. an, daß g monoton wächst, so folgt $g([a,b]) = [\alpha, \beta]$ mit $\alpha = g(a)$, $\beta = g(b)$ und $g' > 0$, Aufgabe 2 von Aufgaben 3.2.16.

„(ii)" Nach Theorem 3.2.13 auf Seite 173 existiert daher die Inverse φ von g und ist differenzierbar in $J = (\alpha, \beta)$ mit

$$\varphi'(g(x)) = (g'(x))^{-1} \qquad \forall\, x \in I. \tag{3.3.6}$$

Wenden wir nun den gewöhnlichen MWS auf die Komposition $h = f \circ \varphi$ an, so erhalten wir

$$h(\beta) - h(\alpha) = h'(\gamma)(\beta - \alpha) \tag{3.3.7}$$

mit $\alpha < \gamma < \beta$.

Damit ist bereits alles bewiesen, denn

$$\begin{aligned} h(\beta) &= f(b), \qquad & h(\alpha) &= f(a) \\ \beta &= g(b), \qquad & \alpha &= g(a) \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

und

$$h'(\gamma) = f'(\varphi(\gamma))\varphi'(\gamma) = f'(\varphi(\gamma))\frac{1}{g'(\varphi(\gamma))}. \tag{3.3.9}$$

$\xi = \varphi(\gamma)$ ist daher die gesuchte Zahl. □

Dem gerade durchgeführten Beweis entnehmen wir auch, daß eine vektorwertige Variante des verallgemeinerten MWS existiert

3.3.2. Theorem (vektorwertige Variante)**.** *Sei F ein reeller Banachraum, $f \in C^0([a,b],F)$ und $g \in C^0([a,b])$, $a,b \in \mathbb{R}$, und nehme an, f,g seien in $I = (a,b)$ differenzierbar und gelte $g'(x) \neq 0 \; \forall \, x \in I$. Dann ist*

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \sup_{\xi \in I} \left\| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right\| |g(a) - g(b)|. \tag{3.3.10}$$

Beweis. Der Beweis ist weitgehend identisch mit dem vorherigen. Der einzige Unterschied ist, daß wir auf die Funktion $h = f \circ \varphi$ den MWS für vektorwertige Funktionen, Theorem 3.2.6 auf Seite 170, anwenden. □

3.3.3. Proposition. *Sei $U = U(a)$ eine einseitige Umgebung*[8] *von $a \in \mathbb{R}$ und seien $f, g \in C^0(U)$ differenzierbar in $\dot{U} = U \backslash \{a\}$. Gelte ferner $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(x) \neq 0 \; \forall \, x \in \dot{U}$. Dann existiert*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{3.3.11}$$

wenn

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{3.3.12}$$

existiert, und die beiden Limites stimmen überein.

Beweis. Wir nehmen an, die Voraussetzungen lägen in dem Intervall $I = [a,b] \subset U$, $a < b$, vor, wenden dann den verallgemeinerten MWS im Intervall $[a,x]$ für ein beliebiges $x \in I \backslash \{a\}$ an und erhalten

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \text{mit} \quad a < \xi < x. \tag{3.3.13}$$

Daraus folgen aber die Behauptungen unmittelbar. □

3.3.4. Proposition. *Sei U eine einseitige Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ und seien $f, g \in C^0(\dot{U})$ differenzierbar in $\dot{U}$ mit $g'(x) \neq 0 \; \forall \, x \in \dot{U}$. Gelte ferner*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty, \tag{3.3.14}$$

dann existiert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{3.3.15}$$

---

[8] Damit meinen wir $U = [a, a+\epsilon)$ oder $U = (a-\epsilon, a]$.

falls

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{3.3.16}$$

existiert, und die beiden Limites stimmen überein.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß a der linke Endpunkt von U ist und daß $I=[a,b]\subset U$. Für beliebige Paare (x,x_0), $a<x<x_0<b$ folgt dann nach dem verallgemeinerten MWS

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \text{mit} \quad x<\xi<x_0. \tag{3.3.17}$$

Sei

$$\alpha=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.3.18}$$

Zu beliebigem $\epsilon>0$ gibt es dann x_0, so daß

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\le\alpha+\epsilon \qquad \forall\, a<\xi<x_0. \tag{3.3.19}$$

Mit dieser Wahl von x_0 folgt nun aus (3.3.17)

$$\overline{\lim_{x\to a}}\,\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\le\alpha+\epsilon. \tag{3.3.20}$$

Aus der Identität

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}\Big(1+\frac{g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\Big)-\frac{f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \tag{3.3.21}$$

und der Annahme $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ schließen wir andererseits

$$\overline{\lim_{x\to a}}\,\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\overline{\lim_{x\to a}}\,\frac{f(x)}{g(x)}, \tag{3.3.22}$$

und somit

$$\overline{\lim_{x\to a}}\,\frac{f(x)}{g(x)}\le\alpha. \tag{3.3.23}$$

Entsprechend beweist man, daß

$$\alpha\le\underline{\lim}_{x\to a}\,\frac{f(x)}{g(x)}; \tag{3.3.24}$$

man muß dazu nur anstelle der Ungleichung (3.3.19) die Abschätzung

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\ge\alpha-\epsilon \qquad \forall\, a<\xi<x_0 \tag{3.3.25}$$

mit einem geeigneten x_0 betrachten und analog zu eben weiterschließen. □

3.3.5. Proposition. *Seien f, g in einer Umgebung U von ∞ definiert und differenzierbar und gelte $g'(x) \neq 0 \; \forall \, x \in U \cap \mathbb{R}$, sowie*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \tag{3.3.26}$$

bzw.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty. \tag{3.3.27}$$

Dann existiert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{3.3.28}$$

falls

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{3.3.29}$$

existiert, und die beiden Limites stimmen überein.

Beweis. Wende Proposition 3.3.3 bzw. Proposition 3.3.4 auf die Funktionen

$$\varphi(x) = f(x^{-1}), \qquad \varphi(0) = \lim_{x\to\infty} f(x) \tag{3.3.30}$$

$$\psi(x) = g(x^{-1}), \qquad \psi(0) = \lim_{x\to\infty} g(x) \tag{3.3.31}$$

an, die in einem Intervall $I = [0, b]$ definiert, stetig[9] und im Innern differenzierbar sind mit $\psi' \neq 0$.

Dann erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.3.32}$$

□

[9]Wenn $\varphi(0) = \psi(0) = \infty$, so dürften wir eigentlich wie in Proposition 3.3.4 nur von $\varphi, \psi \in C^0((a, b])$ sprechen.

3.3.6. Bemerkung. (i) Die Behauptungen in den obigen Sätzen gelten entsprechend, wenn das Verhalten für $x \to -\infty$ untersucht werden soll, oder wenn eine der Funktionen nach $-\infty$ konvergiert.

(ii) Ergibt sich bei der Berechnung von $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ wieder ein unbestimmter Ausdruck, so kann dieser Grenzwert durch $\lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ ausgedrückt werden, sofern $g''(x) \neq 0$ in einer Umgebung von a und sofern f, g zweimal differenzierbar sind, usw..

(iii) Unbestimmte Ausdrücke der Form „$0 \cdot \infty$“ bzw. „$\infty - \infty$“ muß man durch Umformen auf die Gestalt „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ bringen.

3.3.7. Beispiele.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$.
3. Definiere φ in $[0,1]$ durch
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
so ist $\varphi \in C^0([0,1])$.

Beweis. Wir betrachten nur das dritte Beispiel. Zunächst formen wir φ um

$$\varphi(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x}, \tag{3.3.33}$$

um im Limes einen unbestimmten Ausdruck zu erhalten, den wir behandeln können. Der Quotient der ersten Ableitungen liefert im Limes wieder einen unbestimmten Ausdruck, so daß erst die zweiten Ableitungen ein Ergebnis liefern

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \varphi(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0 = \varphi(0). \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

□

3.3.8. Aufgaben.

1 Man verifiziere die ersten beiden Aussagen in Beispiele 3.3.7.

2 Man bestimme die folgenden Grenzwerte

(i) $\lim_{x\to\infty}((1+\frac{1}{x})^x - e)$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{1}{x})^x - e\log\left((1+\frac{1}{x})^x\right)\right)$

(iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(iv) $\lim_{x\downarrow 0} x^x$

3 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = 2.$

4 $\lim_{x\to\infty} x\log(1+\frac{1}{x}) = 1.$

5 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{\cos ax}-\sqrt{\cos bx})x^{-2} = \frac{b^2-a^2}{4}.$

3.4. Differentiation von Funktionenfolgen

Wir wollen zunächst ein früheres Ergebnis, Theorem 1.6.5 auf Seite 91, umformulieren, so daß es sich besser in unsere jetzigen Überlegungen integrieren läßt.

3.4.1. Theorem. *Seien E, F metrische Räume, F zudem vollständig, und $f_n : E \to F$ eine Folge von stetigen Funktionen, die gleichmäßig nach einer Funktion f konvergieren, dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $x_0 \in E$ und (x_m) eine Folge, die nach x_0 konvergiert, dann müssen wir $f(x_0) = \lim f(x_m)$ nachweisen oder gleichbedeutend damit, die Vertauschbarkeit die Grenzübergänge

$$\lim_m \lim_n f_n(x_m) = \lim_n \lim_m f_n(x_m). \tag{3.4.1}$$

Dies ist aber gerade die Aussage von Theorem 1.6.5. □

Wie früher, Theorem 1.6.8 auf Seite 93, gilt auch jetzt eine entsprechende Aussage für Reihen.

3.4.2. Theorem. *Sei E ein metrischer Raum, F ein Banachraum und $f_n : E \to F$ eine Folge von stetigen Funktionen. Nehme an, die Reihe $((f_n(x)))$ konvergiere gleichmäßig nach $f(x)\ \forall\, x \in E$, dann ist f stetig.*

Beweis. Wende Theorem 3.4.1 auf die Folge der Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \tag{3.4.2}$$

an. □

3.4.3. Theorem. *Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$, F ein Banachraum über $\mathbb{K}$ und $f_n : \Omega \to F$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen, die folgende Bedingung*[10] *erfüllen*

$$\begin{aligned} f_n &\to f, \\ f_n' &\rightrightarrows g. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Dann ist auch f stetig differenzierbar und $f' = g$.

Um den Beweis etwas transparenter zu machen, führen wir zunächst den Stetigkeitsmodul einer Funktion ein.

3.4.4. Definition (Oszillation, Stetigkeitsmodul)**.** Seien E, F metrische Räume, $f : E \to F$ eine Abbildung und $\emptyset \neq A \subset E$, dann definieren wir die *Oszillation* von f in A, in Zeichen, $\omega_f(A)$, durch

$$\omega_f(A) = \sup_{x,y\in A} d(f(x), f(y)). \tag{3.4.4}$$

Wenn A eine Kugel ist, $A = B_r(x_0)$, so bezeichnet man $\omega_f(B_r(x_0))$ auch als den *Stetigkeitsmodul* von f in $B_r(x_0)$ und schreibt dafür $\omega_f(x_0, r)$. Wir definieren noch

$$\omega_f(x) = \lim_{r\to 0} \omega_f(x, r). \tag{3.4.5}$$

Eine andere gebräuchliche Bezeichnung für $\omega_f(A)$ ist $\operatorname{osc}_f(A)$.

3.4.5. Bemerkung. f ist genau dann stetig in x_0, wenn

$$\omega_f(x_0) = 0. \tag{3.4.6}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Beweis von Theorem 3.4.3. Da die Stetigkeit von g aus Theorem 3.4.1 folgt, genügt es nachzuweisen, daß g die Ableitung von f ist.

Sei $x_0 \in \Omega$ ein beliebiger Punkt und $B_r(x_0) \subset \Omega$. Wir wenden dann Corollar 3.2.9 auf Seite 172 auf f_n an und erhalten für $x \in \dot{B}_r(x_0)$ die Abschätzung

$$\left\| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0) \right\| \leq \sup_{y\in[x_0,x]} \|f_n'(y) - f_n'(x_0)\|. \tag{3.4.7}$$

---

[10] Wir erinnern an die Definition 1.6.1 auf Seite 89 des Symbols $f_n \rightrightarrows f$ (gleichmäßige Konvergenz). Mit dem einfachen Pfeil $f_n \to f$ wollen wir ausdrücken, daß f_n punktweise nach f konvergiert.

Gehen wir zum Limes über, so erhalten wir wegen der punktweisen Konvergenz von f_n und der gleichmäßigen Konvergenz der Ableitungen

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right\| \le \sup_{y \in [x_0, x]} \|g(y) - g(x_0)\|. \tag{3.4.8}$$[11]

Die rechte Seite von (3.4.8) können wir durch den Stetigkeitsmodul $\omega_g(x_0, r)$ von g nach oben abschätzen, d.h.

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right\| \le \omega_g(x_0, r) \quad \forall\, x \in \dot{B}_r(x_0), \tag{3.4.9}$$

woraus wir sofort ablesen, daß f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) = g(x_0)$, da wegen der Stetigkeit von g $\lim_{r \to 0} \omega_g(x_0, r) = 0$. □

3.4.6. Theorem. *Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$, F ein Banachraum über $\mathbb{K}$ und $f_n : \Omega \to F$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen. Nehme an, daß für jedes $x \in \Omega$ die Reihe $((f_n(x)))$ konvergiert, so daß hierdurch eine Funktion f definiert wird*

$$f(x) = \sum_n f_n(x) \qquad x \in \Omega. \tag{3.4.10}$$

Nehme weiter an, daß $((f'_n(x)))$ gleichmäßig nach einer Funktion $g(x)$ konvergiert $\forall\, x \in \Omega$, dann ist f differenzierbar und $f' = g$.

Beweis. Wende Theorem 3.4.3 auf die Partialsummen der Reihe an und beachte Theorem 3.4.2. □

3.4.7. Bemerkung. Wir haben bis jetzt nur Potenzreihen der Form $((a_n x^n))$ mit $x \in \mathbb{R}$ betrachtet, doch können wir natürlich auch $x \in \mathbb{C}$ zulassen. Die Definition des Konvergenzradius, vgl. Definition 1.2.22 auf Seite 69, ändert sich nicht und es bleibt auch richtig, daß eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ innerhalb einer jeden Kugel $B_{r_0}(0)$, $r_0 < r$, gleichmäßig absolut konvergiert, vgl. Beispiel 4 in Beispiele 1.6.2 auf Seite 90.

3.4.8. Lemma. *Sei $((a_n x^n))$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $r > 0$ und $((n a_n x^{n-1}))_{n \ge 1}$ die Potenzreihe, die wir durch gliedweise Differentiation erhalten. Dann besitzt diese Reihe den gleichen Konvergenzradius.*

---

[11] Die Konvergenz der rechten Seite von (3.4.7) nach der von (3.4.8) soll in Aufgabe 1 von Aufgaben 3.4.11 bewiesen werden.

Beweis. Da die Multiplikation mit $x \neq 0$ an dem Konvergenzradius einer Potenzreihe nichts ändert, genügt es zu zeigen, daß der Konvergenzradius ρ der Reihe $((na_n x^n))$ gleich r ist.

Nun gilt

$$\rho^{-1} = \overline{\lim_n}(n|a_n|)^{\frac{1}{n}} = \lim_n n^{\frac{1}{n}} \overline{\lim_n}(|a_n|)^{\frac{1}{n}} = r^{-1}, \tag{3.4.11}$$

denn für $n \geq 1$ ist

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}} \tag{3.4.12}$$

und

$$\frac{\log n}{n} \to 0 \tag{3.4.13}$$

nach der Regel von de l'Hospital, vgl. Beispiel 2 von Beispiele 3.3.7 auf Seite 180. □

3.4.9. Proposition. *Sei $((a_n x^n))$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $r > 0$, dann ist die durch die Potenzreihe definierte Funktion*

$$f(x) = \sum_n a_n x^n \qquad x \in B_r(0) \tag{3.4.14}$$

in $B_r(0)$ differenzierbar und f' erhält man durch gliedweise Differentiation

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{3.4.15}$$

Da $f'(x)$ ebenfalls eine Potenzreihe ist mit gleichem Konvergenzradius wie $f(x)$, folgt insbesondere, daß eine Potenzreihe innerhalb ihrer Konvergenzkugel unendlich oft differenzierbar ist.

Beweis. Setze zur Abkürzung $f_n(x) = a_n x^n$, $x \in B_r(0)$. Dann konvergiert die Reihe $((f_n'(x)))$ in jedem $B_{r_0}(0)$, $r_0 < r$, gleichmäßig nach einer Funktion $g(x)$, vgl. Lemma 3.4.8 und Bemerkung 3.4.7. Der erste Teil der Behauptung folgt daher aus Theorem 3.4.6.

Die restlichen Aussagen sind offensichtlich. □

3.4.10. Beispiel. Wir definieren die Exponentialfunktion auch für komplexe Argumente durch die Potenzreihe

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{C}. \tag{3.4.16}$$

Dann folgt für die Ableitung

$$\exp' x = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp x. \tag{3.4.17}$$

3.4.11. Aufgaben.

1 Beweisen Sie bitte, daß die rechte Seite der Ungleichung (3.4.7) nach der von (3.4.8) konvergiert.

2 Man beweise Bemerkung 3.4.5.

3 Sei $((a_n x^n))$ eine in $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{K}$ absolut konvergente Potenzreihe und $f = f(x)$ ihre Summe, dann gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

4 Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, konvex und beschränkt, F ein Banachraum und $f_n : \Omega \to F$ eine Folge von differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen gleichmäßig in Ω konvergieren. Nehme an, f_n konvergiert in einem Punkt $x_0 \in \Omega$, dann konvergiert f_n gleichmäßig in Ω.

3.5. Die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$

Sei E ein reeller Banachraum und $A \in L(E)$. Wir wollen dann die lineare Differentialgleichung erster Ordnung $\dot{x} = Ax$ zu vorgegebenem Anfangswert $x_0 \in E$ lösen, d.h. wir suchen ein Intervall $I = [0, T), T > 0$, und eine Funktion $x = x(t) \in C^1((0,T), E) \cap C^0([0,T), E)$, die das sog. *Anfangswertproblem* (AWP)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \qquad \text{in } I, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

löst.

Solche Differentialgleichungen haben ihren Ursprung in physikalischen, chemischen oder biologischen Problemen und der Parameter t, von dem die gesuchte Funktion abhängt, steht meist für die Zeit. Aus historischen Gründen ist es dann üblich die Ableitung nach t mit einem Punkt zu symbolisieren.

Die Differentialgleichung ist eine *lineare* Differentialgleichung, d.h. wenn x, y zwei Lösungen der Differentialgleichung sind, so ist auch $x+y$ eine Lösung und entsprechend bei der Multiplikation mit einem Skalar. Man beachte, daß wir unterscheiden zwischen der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ und der Vorgabe des Anfangswertes $x(0) = x_0$, d.h. verschiedene Lösungen der Differentialgleichung werden verschiedene Anfangswerte besitzen. In der Tat werden wir beweisen, daß dies so sein muß, es sei denn, die Lösungen sind identisch.

Wir werden in Band II ausführlicher auf *gewöhnliche*[12] Differentialgleichungen eingehen—auch auf *nichtlineare*.

Die eindeutige Lösbarkeit des AWP (3.5.1) wird im nächsten Abschnitt benutzt werden, um die Existenz und wichtige Eigenschaften von gewissen elementaren Funktion nachzuweisen, so daß es sinnvoll ist, diese Differentialgleichung jetzt schon zu behandeln. Es ist zudem eine schöne Anwendung der abstrakten technischen Fertigkeiten, die in den vorangegangen Kapiteln erworben wurden.

Ein wichtiges Hilfsmittel zum Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit ist das sog. *Gronwallsche Lemma.*

3.5.1. Lemma (Gronwallsches Lemma)**.** *Sei $I = [0, T]$, $T > 0$, und genüge die beschränkte Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ der Ungleichung*

$$\varphi(t) \le \varphi(t_0) + c(t - t_0) \sup_{t_0 \le \tau \le t} \varphi(\tau) \quad \forall\, 0 \le t_0 \le t \le T \tag{3.5.2}$$

mit einer positiven Konstanten c, dann gilt

$$\varphi(t) \le 2\varphi(t_0) 2^{4c(t-t_0)} \quad \forall\, 0 \le t_0 \le t \le T. \tag{3.5.3}$$

Insbesondere ist $\varphi \equiv 0$, wenn $\varphi(0) = 0$.

Beweis. (i) Definiere für $0 \le t' \le t \le T$

$$\psi(t', t) = \sup_{t' \le \tau \le t} \varphi(\tau). \tag{3.5.4}$$

ψ ist wohl definiert, da φ beschränkt, monoton wachsend in t und monoton fallend in t'.

Fixiere t_0, $0 \le t_0 < T$. Für beliebige Punkte s', s aus $[t_0, T]$ mit $s' < s$ erhalten wir dann aus (3.5.2)

$$\varphi(t) \le \varphi(s') + c(s - s')\psi(s', s) \qquad \forall\, s' \le t \le s, \tag{3.5.5}$$

oder, wenn wir zum Supremum übergehen,

$$\psi(s', s) \le \psi(s', s') + c(s - s')\psi(s', s) \qquad \forall\, t_0 \le s' \le s \le T, \tag{3.5.6}$$

wobei wir beachten, daß $\varphi(s') = \psi(s', s')$.

(ii) *Wir machen nun eine Fallunterscheidung*:

[12] Das sind solche, in denen nur nach einer reellen Variablen differenziert wird.

a) Wenn $T - t_0 \leq \frac{1}{2c}$, dann schließen wir aus (3.5.6)

$$\varphi(s) \leq \psi(t_0, s) \leq 2\psi(t_0, t_0) = 2\varphi(t_0) \quad \forall\, t_0 \leq s \leq T, \tag{3.5.7}$$

und haben in diesem Fall die Abschätzung (3.5.3) hergeleitet.

b) Wenn $T - t_0 > \frac{1}{2c}$, so wählen wir $n \in \mathbb{N}$ minimal, so daß

$$\epsilon = \frac{T - t_0}{n} \leq \frac{1}{2c} \tag{3.5.8}$$

und zerlegen das Intervall $[t_0, T]$ in n Teilintervalle $[s_i, s_{i+1}]$ mit Endpunkten

$$s_i = t_0 + i\epsilon, \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{3.5.9}$$

Es gilt dann $s_0 = t_0$, $s_n = T$ und

$$\frac{1}{4c} \leq \epsilon \leq \frac{1}{2c}. \tag{3.5.10}$$

Letztere Abschätzung folgt aus der Minimalität von n, die $\frac{T-t_0}{n-1} > \frac{1}{2c}$ impliziert; beachte, daß $n \geq 2$.

Aus (3.5.6) erhalten wir nun die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \psi(s_i, s_{i+1}) &\leq \psi(s_i, s_i) + c(s_{i+1} - s_i)\psi(s_i, s_{i+1}) \\ &= \psi(s_i, s_i) + c\epsilon\psi(s_i, s_{i+1}) \\ &\leq \psi(s_i, s_i) + \tfrac{1}{2}\psi(s_i, s_{i+1}) \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

oder

$$\psi(s_i, s_{i+1}) \leq 2\psi(s_i, s_i), \qquad i = 0, \ldots, n-1. \tag{3.5.12}$$

Da $\psi(s_i, s_i) \leq \psi(s_{i-1}, s_i)$ für $1 \leq i \leq n$, schließen wir weiter

$$\psi(s_i, s_{i+1}) \leq 2\psi(s_{i-1}, s_i), \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3.5.13}$$

Setzen wir $s_{-1} = s_0$, so stimmt diese Rekursionsformel auch für $i = 0$, wie man sofort aus (3.5.12) abliest, d.h. es gilt

$$\psi(s_i, s_{i+1}) \leq 2^{i+1}\psi(s_0, s_0) = 2^{i+1}\varphi(t_0) \quad \forall\, 0 \leq i \leq n-1. \tag{3.5.14}$$

Sei nun $s \in [t_0, T)$ beliebig, so existiert i, so daß

$$s_i \leq s < s_{i+1}, \tag{3.5.15}$$

und wir erhalten dann aus (3.5.14)

$$\varphi(s) \leq \psi(s_i, s_{i+1}) \leq 2^{i+1}\varphi(t_0). \tag{3.5.16}$$

Andererseits gilt

$$s_0 + i\epsilon = s_i \le s \tag{3.5.17}$$

und damit

$$i \le \epsilon^{-1}(s - s_0), \tag{3.5.18}$$

so daß

$$\varphi(s) \le 2\varphi(t_0)2^{\epsilon^{-1}(s-s_0)} \qquad \forall\, t_0 \le s < T. \tag{3.5.19}$$

Die endgültige Abschätzung (3.5.3) folgt nun mittels (3.5.10). □

3.5.2. Bemerkung. Die Aussage und der Beweis des Gronwallschen Lemmas ändern sich übrigens nicht, wenn wir statt des Intervalls $[0, T]$ ein beliebiges Intervall $[T_1, T_2]$, $-\infty < T_1 < T_2 < \infty$, betrachten.

3.5.3. Theorem. *Sei E ein reeller Banachraum, $A \in L(E)$ und $x_0 \in E$, dann besitzt das AWP*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$. Die Lösung läßt sich darstellen als

$$x(t) = e^{tA}x_0, \tag{3.5.21}$$

wobei

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}. \tag{3.5.22}$$

Die Reihe und ihre gliedweise Ableitung konvergieren in $L(E)$ gleichmäßig absolut, wenn t sich in kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ bewegt.

Beweis. „*Existenz*“ Wegen der Abschätzung (2.7.8) auf Seite 152 konvergiert die Reihe $((\frac{t^n A^n}{n!}))$ absolut in $L(E)$; die Konvergenz ist gleichmäßig absolut, solange $|t|$ beschränkt bleibt nach Lemma 1.6.3 auf Seite 90.

Setzen wir zur Abkürzung $f_n(t) = \frac{t^n A^n}{n!}$, so gilt die gleiche Aussage auch für die Reihe $((f_n'(t)))$, so daß nach Theorem 3.4.3 auf Seite 182 die operatorwertige Funktion

$$\Phi : \mathbb{R} \to L(E), \qquad \Phi(t) = e^{tA} \tag{3.5.23}$$

stetig differenzierbar ist und man die Ableitung durch gliedweise Differentiation der Reihe in (3.5.22) erhält.

Es folgt dann

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A, \tag{3.5.24}$$

da A und die Partialsummen der Reihe $((\frac{t^n A^n}{n!}))$ kommutieren.
Durch Iteration folgt hieraus $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}, L(E))$.

Definieren wir nun $x(t) = e^{tA}x_0$, so ist $x \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$ und

$$\dot{x}(t) = Ae^{tA}x_0 = Ax.^{13} \tag{3.5.25}$$

„*Eindeutigkeit*" Zum Beweis der Eindeutigkeit der Lösung wollen wir nur abgeschwächte Existenz und Regularitätsforderungen an die Lösung stellen, d.h. wir nehmen an, in dem Intervall $I = (0, T), T > 0$ würden zwei Lösungen $x, y \in C^0(\bar{I}, E) \cap C^1(I, E)$ des AWP (3.5.20) existieren. Die Differenz $z = x - y$ löst dann das AWP mit Anfangswert $z(0) = 0$ und wir werden jetzt mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas und des MWS hieraus schließen, daß $z \equiv 0$.

Zunächst erhalten wir für $0 < t_0 < t < T$ aus Theorem 3.2.8 auf Seite 172

$$\begin{aligned} \|z(t) - z(t_0)\| &\leq \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\dot{z}(\tau)\|(t - t_0) \\ &= \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|Az(\tau)\|(t - t_0) \\ &\leq \|A\| \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|z(\tau)\|(t - t_0). \end{aligned} \tag{3.5.26}$$

Mit der Dreicksungleichung schließen wir weiter

$$\|z(t)\| \leq \|z(t_0)\| + \|A\|(t - t_0) \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|z(\tau)\|. \tag{3.5.27}$$

Nun ist $\varphi = \|z\| \in C^0(\bar{I})$, so daß die Ungleichung (3.5.27) für alle $0 \leq t_0 \leq t \leq T$ richtig ist und die Behauptung $\varphi \equiv 0$ aus dem Gronwallschen Lemma folgt. □

3.5.4. Bemerkung. Die Eindeutigkeit der Lösung von (3.5.20) gilt auch, wenn wir annehmen, die Lösung wäre in einem Intervall $(-T, 0)$, $T > 0$ definiert. Durch die Transformation $y(t) = x(-t)$ erhalten wir nämlich ein AWP in $(0, T)$ mit Operator $-A$ und Anfangswert x_0.

3.5.5. Aufgaben.

1 Wenn man nur die Teilaussage „$\varphi \equiv 0$, wenn $\varphi(0) = 0$" des Gronwallschen Lemmas beweisen möchte, so gibt es einen einfacheren Beweis, wenn man noch $\varphi \in C^0([0, T])$ zuläßt.

---

[13] Man überzeugt sich leicht, daß, wenn $\Phi : \mathbb{R} \to L(E)$ in t_0 differenzierbar ist und $x_0 \in E$ fest, die Abbildung $x = \Phi x_0$ ebenfalls in t_0 differenzierbar ist und $\dot{x}(t_0) = \Phi'(t_0)x_0$.

2 Sei $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ eine Lösung der Gleichung $\dot{x} = Ax$, $A \in L(E)$, so folgt $x \equiv 0$, falls $x(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$.

3 Man beweise die Formeln (3.5.24) und (3.5.25).

4 Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, E ein Banachraum und $A \in C^0(\Omega, L(E))$. Nehme an, $A(x_0)$ sei stetig invertierbar, dann existiert eine Umgebung U von x_0, so daß $A(x)$ stetig invertierbar ist für alle $x \in U$. Die Abbildung $B(x) = A(x)^{-1}$ ist dann stetig in U. Sei darüber hinaus A in x_0 differenzierbar, so ist auch B in x_0 differenzierbar und es gilt

$$B'(x_0) = -A(x_0)^{-1}A'(x_0)A(x_0)^{-1}.$$

3.6. Die elementaren Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Potenzfunktionen, die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen eingehend analysieren, auch wenn dies teilweise schon in den vorangegangenen Kapiteln geschehen ist.

3.6.1. Die Potenzfunktionen. Die Funktionen $f_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$, sind unendlich oft differenzierbar, strikt monoton wachsend, da

$$f_n'(x) = nx^{n-1} > 0 \qquad \forall\, x > 0, \tag{3.6.1}$$

und bilden daher $\mathbb{R}_+$ homöomorph auf sich selbst ab.

Die Umkehrfunktionen $g_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$ sind in $\mathbb{R}_+$ stetig und in $\mathbb{R}_+^*$ unendlich oft differenzierbar, Theorem 3.2.13 auf Seite 173, siehe auch Beispiele 3.2.15, (i).

Für $a > 0$ und $n, m \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$(a^n)^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n, \tag{3.6.2}$$

wie man durch Potenzieren mit m beweist.

Wir definieren dann

$$\begin{aligned} a^{\frac{n}{m}} &= (a^n)^{\frac{1}{m}}, \\ a^{-\frac{n}{m}} &= (a^{-1})^{\frac{n}{m}}. \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Es gelten die *Potenzgesetze*

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y, \\ (a^x)^y &= a^{xy} \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{Q}$, vgl. Aufgabe 2 von Aufgaben 1.5.16 auf Seite 88.

3.6.2. Die Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion exp ist bereits früher durch die Potenzreihe

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.6.5}$$

definiert worden, die auf kompakten Teilmengen gleichmäßig absolut konvergiert.

Nach (1.5.38) auf Seite 87 gilt

$$\exp(x+y) = \exp x \exp y \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \tag{3.6.6}$$

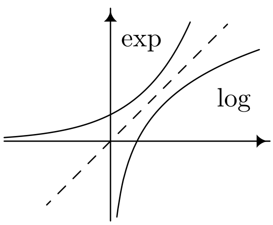
so daß $\exp x \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, denn

$$1 = \exp 0 = \exp x \exp(-x) \tag{3.6.7}$$

und weiter

$$\exp x = \exp(\tfrac{x}{2}) \exp(\tfrac{x}{2}) > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3.6.8}$$

Die Exponentialfunktion ist unendlich oft differenzierbar und $\exp' = \exp$, Beispiel 3.4.10 auf Seite 184.



Die Umkehrfunktion, der Logarithmus $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, ist ebenfalls unendlich oft differenzierbar und $\log' x = \frac{1}{x}$, Beispiel (ii) von Beispiele 3.2.15 auf Seite 174.

3.6.3. Lemma. *Für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{Q}$ gilt*

$$(\exp x)^y = \exp(xy). \tag{3.6.9}$$

Setzen wir $x = \log a$, $a > 0$, so folgt

$$a^y = \exp(y \log a) \qquad \forall\, y \in \mathbb{Q}. \tag{3.6.10}$$

Beweis. Wir brauchen nur (3.6.9) zu beweisen.

Fassen wir die linke Seite der Gleichung als Funktion $f = f(x)$ und die rechte als Funktion $g = g(x)$, so folgt aus Aufgabe 5 von Aufgaben 3.2.16 auf Seite 174 und der Kettenregel $f' = yf$ und $g' = yg$. f und g lösen daher die gleiche lineare Differentialgleichung und stimmen somit überein, da $f(0) = g(0)$, vgl. Theorem 3.5.3 auf Seite 188.

Eine zweite Beweismöglichkeit wäre, die Positivität von f, g zu benutzen und zu schließen, daß $(\log f)' = y = (\log g)'$ und daher $\log f = \log g$ oder $f = g$ wegen Corollar 3.2.10 auf Seite 172. □

Wir können jetzt Potenzen mit irrationalem Exponenten definieren, indem wir

$$a^r = \exp(r \log a) \tag{3.6.11}$$

vereinbaren für r irrational und $a > 0$. Wir erhalten dann

$$a^x = \exp(x \log a) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3.6.12}$$

Speziell für $a = e = \exp 1$ folgt

$$e^x = \exp x. \tag{3.6.13}$$

3.6.4. Proposition. *Für die Exponentialfunktion gilt*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.6.14}$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} e^x |x|^n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.6.15}$$

Beweis. „(3.6.14)" Folgt sofort aus der Reihendarstellung: $e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ für $x > 0$.

„(3.6.15)" Setze $y = -x$ und wende dann die erste Behauptung an. □

3.6.5. Proposition. *Für den Logarithmus gilt*

$$\log xy = \log x + \log y, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \tag{3.6.16}$$

$$\log x^\lambda = \lambda \log x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.6.17}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^\epsilon} = 0, \qquad \forall\, \epsilon > 0. \tag{3.6.18}$$

Beweis. Die beiden ersten Relationen verifiziert man durch Anwendung der Exponentialfunktion.

Die dritte folgt aus der Regel von de l'Hospital, Proposition 3.3.5 auf Seite 179. □

Die trigonometrischen Funktionen

Betrachten wir in $\mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung A, die als Matrix ausgedrückt, $A = (a^i_j)$,[14] die Form hat

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6.19}$$

d.h. für einen Vektor $x = (x^j)$ ist

$$(Ax)^i = \sum_j a^i_j x^j. \tag{3.6.20}$$

Aus Theorem 3.5.3 auf Seite 188 erhalten wir dann

3.6.6. Proposition. *Die Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ x(0) &= (0,1) \end{aligned} \tag{3.6.21}$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Die erste Komponente nennen wir Sinus, $x^1(t) = \sin t$, und die zweite Cosinus, $x^2(t) = \cos t$.

3.6.7. Bemerkung. Die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ lautet in Komponenten zerlegt

$$\dot{x}^1 = x^2, \qquad \dot{x}^2 = -x^1, \tag{3.6.22}$$

d.h. es ist

$$\sin' t = \cos t, \qquad \cos' t = -\sin t. \tag{3.6.23}$$

3.6.8. Proposition. *Es gilt*

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.6.24}$$

Hierbei verwenden wir die Schreibweise $\sin^2 t = (\sin t)^2$ und entsprechend für den Cosinus.

---

[14] Der obere Index i ist der Zeilenindex, der untere Index j der Spaltenindex. Wir werden später den oberen Index auch als *kontravarianten* und den unteren als *kovarianten* Index bezeichnen.

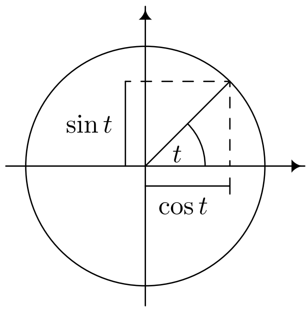
Beweis. Setze

$$\varphi(t) = \sin^2 t + \cos^2 t \tag{3.6.25}$$

und differenziere. Dann folgt wegen (3.6.23) $\dot{\varphi} \equiv 0$, d.h.

$$\varphi(t) = \varphi(0) = 1 \qquad \forall\, t. \tag{3.6.26}$$

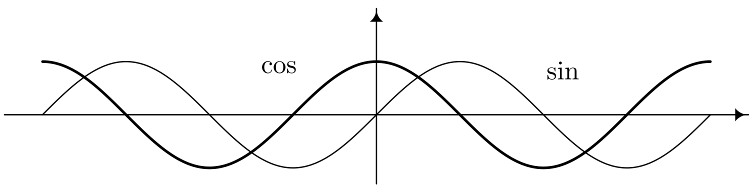
□



3.6.9. Proposition. *Sinus ist eine ungerade Funktion und Cosinus eine gerade, d.h.*

$$\begin{aligned} \sin t &= -\sin(-t), \\ \cos t &= \cos(-t). \end{aligned} \tag{3.6.27}$$

Beweis. Setze $\varphi(t) = -\sin(-t)$ und $\psi(t) = \cos(-t)$. Dann genügen die Funktionen der Gleichung (3.6.22); weiter ist $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 1$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung folgt daher die Behauptung. □



3.6.10. Proposition (Additionstheoreme)**.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig, dann genügen Sinus und Cosinus den Additionstheoremen*

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{3.6.28}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{3.6.29}$$

Beweis. Fassen wir $(\sin(x+y), \cos(x+y))$ zu einer vektorwertigen Funktion zusammen

$$\Phi(x) = (\sin(x+y), \cos(x+y)) \tag{3.6.30}$$

und entsprechend die rechten Seiten der Gleichungen zu einer Funktion $\Psi = \Psi(x)$, so sehen wir, daß beide Lösungen der Differentialgleichung in (3.6.21) sind mit Anfangswert

$$\Phi(0) = \Psi(0) = (\sin y, \cos y). \tag{3.6.31}$$

Daher gilt $\Phi = \Psi$. □

Aus (3.6.24) folgt

$$|\sin x| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\cos x| \leq 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3.6.32}$$

Wir werden jetzt beweisen, daß die Bilder von Sinus und Cosinus mit dem Intervall $[-1, 1]$ übereinstimmen.

Als erstes zeigen wir

3.6.11. Lemma. *Es existiert* $x > 0$*, so daß* $\cos x = 0$.

Beweis. Angenommen die Behauptung wäre falsch, dann wäre wegen des ZWS und wegen $\cos 0 = 1$

$$\cos x > 0 \qquad \forall\, x \geq 0, \tag{3.6.33}$$

d.h. $\sin x$ wäre auf $\mathbb{R}_+$ strikt monoton wachsend ($\sin' x = \cos x$) und somit

$$0 = \sin 0 < \sin 1 \leq \sin x \quad \forall\, x \geq 1. \tag{3.6.34}$$

Wende jetzt den MWS auf den Cosinus im Intervall $[1, x]$ an

$$\cos x - \cos 1 = \sin \xi\,(x-1), \qquad 1 \leq \xi \leq x. \tag{3.6.35}$$

Hieraus würde dann wegen (3.6.34)

$$\lim_{x \to \infty} \cos x = \infty \tag{3.6.36}$$

folgen, im Widerspruch zu (3.6.32). □

3.6.12. Definition (Die Zahl π)**.** Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist die Nullstellenmenge M des Cosinus in $\mathbb{R}_+$ nichtleer

$$M = \{\, x \in \mathbb{R}_+ \colon \ \cos x = 0 \,\} \neq \emptyset. \tag{3.6.37}$$

M ist abgeschlossen und daher existiert $0 < \xi \in M$ mit

$$\xi = \inf M. \tag{3.6.38}$$

Wir definieren π (Pi) durch

$$\pi = 2\xi, \tag{3.6.39}$$

d.h. es gilt

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0. \tag{3.6.40}$$

3.6.13. Proposition. *Auf dem Intervall* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *ist der Sinus strikt monoton wachsend und es gilt*

$$0 = \sin 0 < \sin x < \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{3.6.41}$$

Beweis. Die strikte Monotonie folgt aus

$$\sin' x = \cos x > 0 \qquad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{3.6.42}$$

Ferner folgt aus (3.6.24), $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, daß $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$. Wegen der Monotonie ist daher $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. □

Aus den Additionstheoremen, Proposition 3.6.10, erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \sin\pi &= 0, & \cos\pi &= -1, \\ \sin 2\pi &= 0, & \cos 2\pi &= 1, \end{aligned} \tag{3.6.43}$$

oder allgemein

3.6.14. Proposition. *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \qquad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x, \tag{3.6.44}$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x, \tag{3.6.45}$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x. \tag{3.6.46}$$

3.6.15. Corollar. *Die Bilder von Sinus und Cosinus stimmen mit dem Intervall* $[-1, 1]$ *überein.*

Beweis. Folgt aus Proposition 3.6.14, (3.6.24) und (3.6.43) mit Hilfe des ZWS. □

Die Relation (3.6.46) besagt, daß Sinus und Cosinus *periodisch* sind mit *Periode* 2π.

3.6.16. Definition. Sei E ein Vektorraum und F eine Menge. Eine Abbildung $f : E \to F$ heißt *periodisch* mit *Periode* ξ, falls $0 \neq \xi \in E$ existiert, so daß

$$f(x+\xi) = f(x) \qquad \forall\, x \in E. \tag{3.6.47}$$

Es gilt dann natürlich auch

$$f(x+n\xi) = f(x) \qquad \forall\, x \in E,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.6.48}$$

3.6.17. Proposition. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^2, \\ t &\to (\cos t, \sin t) \end{aligned} \tag{3.6.49}$$

ist injektiv und beschreibt die Einheitssphäre S^1 in $\mathbb{R}^2$, vgl. hierzu auch die Abbildung nach dem Beweis von Proposition 3.6.8.

Beweis. (i) Nach Proposition 3.6.13 wächst der Sinus in $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton von 0 nach 1 und der Cosinus ist positiv, daher folgt aus (3.6.24)

$$\varphi([0, \frac{\pi}{2}]) = S^1 \cap \bar{\Gamma}^2_+, \tag{3.6.50}$$

wobei wir definieren

$$\Gamma^n_+ = \{\, x = (x^i) \in \mathbb{R}^n \colon x^i > 0, i = 1, \ldots, n \,\}. \tag{3.6.51}$$

(ii) Im Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ fällt der Sinus monoton von 1 nach 0 und der Cosinus ist negativ, wie aus (3.6.44) folgt. Daher bildet φ das Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ auf die Einheitssphäre im zweiten Quadranten ab.

(iii) Aus diesen Überlegungen und (3.6.45) schließen wir weiter, daß auch der Teil von S^1, der im unteren Halbraum $\{x^2 < 0\}$ liegt, von φ überdeckt wird und darüber hinaus, daß φ injektiv ist. $\square$

Eine Verknüpfung der trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion liefert die sog. *Eulersche Formel*

3.6.18. Proposition (Eulersche Formel)**.** *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \tag{3.6.52}$$

Beweis. Wir fassen $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auf, so daß wir formal Theorem 3.5.3 auf Seite 188 anwenden können.

Sei $z(t) = e^{it}$, dann ist z differenzierbar und nach der Kettenregel gilt

$$\dot{z} = ie^{it} = iz. \tag{3.6.53}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung, deren Lösungen zu vorgegebenem Anfangswert eindeutig bestimmt sind.

Nun löst

$$\zeta(t) = \cos t + i \sin t \tag{3.6.54}$$

ebenfalls diese Differentialgleichung und die Anfangswerte stimmen überein $z(0) = \zeta(0)$. □

Aus der Eulerschen Formel erhalten wir sofort eine Reihenentwicklung für Sinus und Cosinus

3.6.19. Proposition. *Sinus und Cosinus lassen sich durch (reelle) Potenzreihen darstellen, deren Konvergenzradius* ∞ *ist.*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.6.55}$$

und

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{3.6.56}$$

Beweis. Aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion folgt für reelle x

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}. \tag{3.6.57}$$

Zerlegen wir diese Reihe in zwei Reihen, indem wir die geraden bzw. die ungeraden Indizes zusammenfassen, so ergibt sich

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.6.58}$$

und damit die Behauptung wegen (3.6.52). □

Eine weitere Folgerung aus der Eulerschen Formel ist

3.6.20. Proposition.

(i) $e^z = 1 \iff z = 2\pi i n, \; n \in \mathbb{Z}.$

(ii) $e^z = -1 \iff z = i\pi + 2\pi i n, \; n \in \mathbb{Z}.$

Beweis. Schreiben wir $z = x + iy$, so folgt cvs

$$e^z = e^x e^{iy}, \tag{3.6.59}$$

d.h.

$$|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x. \tag{3.6.60}$$

Es gilt daher

$$|e^z| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Re} z = 0. \tag{3.6.61}$$

Demnach müssen wir nur herausfinden, für welche $y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad e^{iy} = -1 \tag{3.6.62}$$

gilt.

Wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus und wegen (3.6.27), dies entspricht den Termen $2\pi in$, $n \in \mathbb{Z}$, in den obigen Relationen, dürfen wir uns darauf beschränken, (3.6.62) in $[0, 2\pi)$ zu lösen. Zu diesem Zweck ist es ratsam, e^{iy} als Vektor in $\mathbb{R}^2$ zu schreiben

$$e^{iy} = (\cos y, \sin y), \qquad y \in [0, 2\pi). \tag{3.6.63}$$

e^{iy} stimmt dann mit der Funktion φ in (3.6.49) überein, die $[0, 2\pi)$ bijektiv auf S^1 abbildet. Daher sind $y = 0$ bzw. $y = \pi$ die einzigen Lösungen in $[0, 2\pi)$ von (3.6.62). □

Als Corollar erhalten wir

3.6.21. Corollar. *Die Exponentialfunktion ist periodisch mit Periode* $2\pi i$

$$e^z = e^{z+2\pi i}. \tag{3.6.64}$$

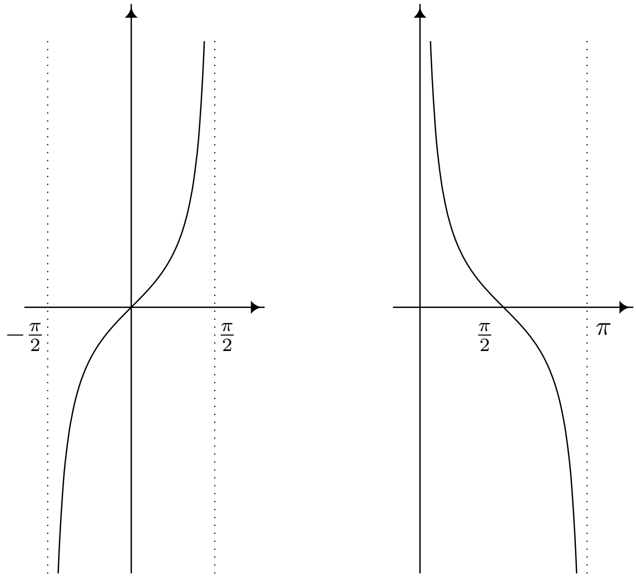
Tangens und Cotangens

3.6.22. Definition. (i) Wir definieren in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ den *Tangens*, in Zeichen, $\tan x$, durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{3.6.65}$$

(ii) Der *Cotangens*, in Zeichen, $\cot x$, ist in $(0, \pi)$ definiert durch

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{3.6.66}$$



Tangens Cotangens

3.6.23. Bemerkung. Tangens und Cotangens sind unendlich oft differenzierbar und bilden ihren jeweiligen Definitionsbereich bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Es gilt

$$\begin{aligned} \tan' x &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \\ \cot' x &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x. \end{aligned} \tag{3.6.67}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Die trigonometrischen Umkehrfunktionen

3.6.24. Die Arcusfunktionen. Für die trigonometrischen Funktionen gilt

$$\begin{aligned} \sin' x &= \cos x \neq 0, \\ \tan' x &= \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \end{aligned} \tag{3.6.68}$$

für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bzw.

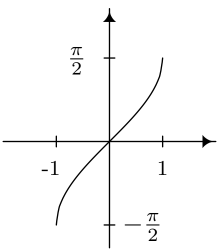
$$\begin{aligned} \cos' x &= -\sin x \neq 0, \\ \cot' x &= -\frac{1}{\sin^2 x} \neq 0 \end{aligned} \tag{3.6.69}$$

für $x \in (0, \pi)$.

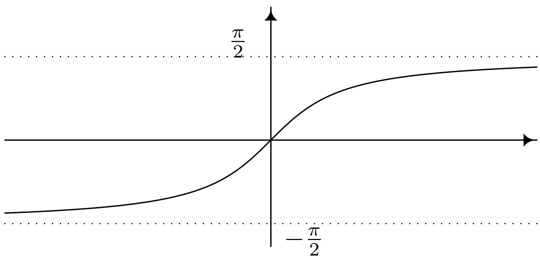
Daher existieren nach Theorem 3.2.13 auf Seite 173 die Umkehrfunktionen, die *Arcusfunktionen* oder auch *zyklometrische Funktionen* genannt werden. Wir bezeichnen sie mit

$$\begin{aligned} \arcsin &= (\sin|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}: & (-1,1) &\to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ \arccos &= (\cos|_{(0,\pi)})^{-1}: & (-1,1) &\to (0,\pi), \\ \arctan &= (\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}: & \mathbb{R} &\to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ \operatorname{arccot} &= (\cot|_{(0,\pi)})^{-1}: & \mathbb{R} &\to (0,\pi). \end{aligned} \tag{3.6.70}$$

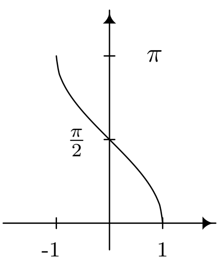
Die folgenden Abbildungen zeigen ihre graphische Darstellung.



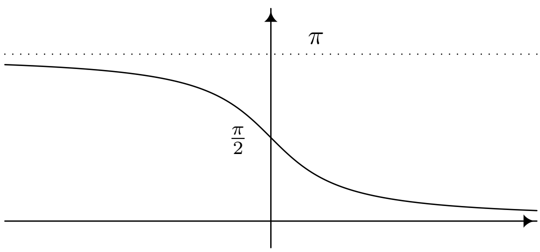
Arcussinus



Arcustangens



Arcuscosinus



Arcuscotangens

3.6.25. Proposition. *Für die Ableitungen der Arcusfunktionen gilt*

$$\begin{aligned} \arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \arccos' x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned} \tag{3.6.71}$$

und

$$\begin{aligned} \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2}, \\ \operatorname{arccot}' x &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned} \tag{3.6.72}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Polarkoordinaten

3.6.26. Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$. Wir können jeden von 0 verschiedenen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ darstellen als

$$x = |x|\frac{x}{|x|} \equiv r\xi, \qquad \xi \in S^1, r > 0. \tag{3.6.73}$$

Das Paar (r, ξ) charakterisiert den Vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$ eindeutig. Andererseits können wir nach Proposition 3.6.17 jeden Einheitsvektor $\xi \in S^1$ eindeutig durch einen Wert $t \in [0, 2\pi)$ beschreiben, die Abbildung $\varphi(t) = (\cos t, \sin t) = \xi$ ist bijektiv und unendlich oft differenzierbar.

Wir bezeichnen $(r, t), r \in \mathbb{R}_+^*$, $t \in [0, 2\pi)$, als *Polarkoordinaten* in $\mathbb{R}^2$.

Da $\mathbb{C}$ als Menge mit $\mathbb{R}^2$ identisch ist, können wir diese Darstellung natürlich auch auf eine komplexe Zahl $z \neq 0$ anwenden und wir nennen

$$z = re^{it}, \qquad r = |z|, t = \arg z \tag{3.6.74}$$

eine *Polarkoordinatendarstellung* von z, vgl. Teil ii von Bemerkung 1.7.4 auf Seite 95 und die dortige Abbildung.

Die hyperbolischen Funktionen

Aus der Eulerschen Formel erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \end{aligned} \tag{3.6.75}$$

so daß wir die komplexen trigonometrischen Funktionen definieren können durch

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \end{aligned} \tag{3.6.76}$$

wobei $z \in \mathbb{C}$.

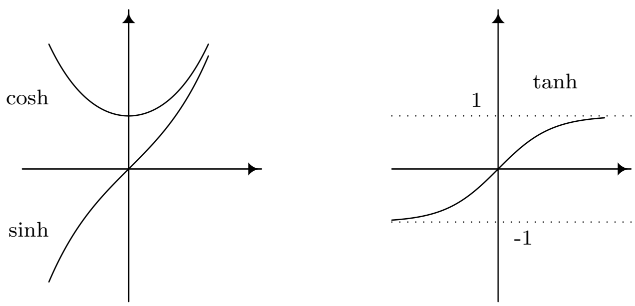
Die komplexen trigonometrischen Funktionen erfüllen die gleichen Regeln (Additionstheoreme, Ableitungen, etc.) wie die reellen.

Setzen wir speziell $z = ix, x \in \mathbb{R}$, in (3.6.76) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos ix &= \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}), \\ \sin ix &= -\frac{1}{2i}(e^{x} - e^{-x}). \end{aligned} \tag{3.6.77}$$

3.6.27. Definition (hyperbolische Funktionen)**.** Die reellen Funktionen $\cos ix$ bzw. $-i \sin ix$ nennen wir $\cosh x$ (*Cosinus hyperbolicus*) bzw. $\sinh x$ (*Sinus hyperbolicus*). Wir definieren auch *Tangens hyperbolicus*, in Zeichen, $\tanh x$, durch

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.6.78}$$



3.6.28. Proposition. *Es gilt*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tag{3.6.79}$$

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \end{aligned} \tag{3.6.80}$$

und

$$\sinh' x = \cosh x, \quad \cosh' x = \sinh x, \quad \tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}. \tag{3.6.81}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Der komplexe Logarithmus

Die komplexe Exponentialfunktion ist im Gegensatz zu ihrem reellen Analogon nicht injektiv, da sie $2\pi i$ periodisch ist, wie wir in Corollar 3.6.21 gesehen haben.

Wenn wir daher ihre Umkehrfunktion definieren wollen, müssen wir uns auf *Zweige* beschränken. Betrachten wir zunächst die Einschränkung der Exponentialfunktion auf den Streifen

$$S = \{\, z = x + iy \colon 0 \le y < 2\pi \,\} \tag{3.6.82}$$

3.6.29. Lemma. *Die Abbildung $z \to e^z$ bildet S bijektiv auf $\mathbb{C}^*$ ab.*

Beweis. (i) „*Injektivität*“ Seien $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$ aus S, so daß $e^z = e^{z'}$, d.h.

$$e^x e^{iy} = e^{x'} e^{iy'}. \tag{3.6.83}$$

Dann folgt $x = x'$ und $y = y'$ wegen Proposition 3.6.20 und der Vorgabe z, $z' \in S$, die bedingt

$$|y - y'| < 2\pi. \tag{3.6.84}$$

(ii) „*Surjektivität*“ Sei $z \in \mathbb{C}^*$, dann besitzt z nach (3.6.74) eine eindeutige Polarkoordinaten Darstellung

$$z = |z| e^{i \arg z}, \qquad 0 \le \arg z < 2\pi. \tag{3.6.85}$$

Wählen wir

$$x = \log|z|, \qquad y = \arg z, \tag{3.6.86}$$

so ist $w = x + iy \in S$ und $e^w = z$. $\square$

Wir könnten daher folgende Definition des Logarithmus versuchen

3.6.30. Sei $z \in \mathbb{C}^*$ in Polarkoordinaten dargestellt als $z = |z|e^{i \arg z}$, so definieren wir $\log z$, durch

$$\log z = \log|z| + i \arg z. \tag{3.6.87}$$

Diese Definition hat aber den Nachteil, daß der Logarithmus auf der positiven reellen Achse unstetig ist. Nähern wir uns z.B. $(1,0)$ durch die Folgen $z_n = (1, \frac{1}{n})$ bzw. $z_n' = (1, -\frac{1}{n})$, so konvergieren die Logarithmen nach 0 bzw. $2\pi i$. Der reelle Logarithmus hingegen ist dort stetig.

Wenn der komplexe Logarithmus eine stetige Fortsetzung des reellen Logarithmus sein soll, so müssen wir die Argumentfunktion arg anders definieren, denn sie ist die Ursache für die Unstetigkeit des komplexen Logarithmus.

3.6.31. Definition. Wir definieren eine andere Argumentfunktion $\arg_l : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ durch folgende Festsetzung: Sei $0 \neq z = x + iy$, so ist

$$\arg_l z = \begin{cases} \arg z, & y \geq 0, \\ \arg z - 2\pi, & y < 0. \end{cases} \tag{3.6.88}$$

3.6.32. Bemerkung. Diese Argumentfunktion ist auf der negativen reellen Achse unstetig und auf der positiven stetig.

Beachte, daß $e^{i \arg z} = e^{i \arg_l z}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

Analog zu Lemma 3.6.29 gilt

3.6.33. Lemma. *Die Exponentialfunktion bildet den Streifen*

$$S_l = \{\, z = x + iy \colon\ -\pi < y \leq \pi \,\} \tag{3.6.89}$$

bijektiv auf $\mathbb{C}^*$ *ab.*

Beweis. (i) „*Injektivität*" Die Argumentation ist identisch zu der früheren.

(ii) „*Surjektivität*" Sei $z \in \mathbb{C}^*$, so definieren wir

$$x = \log|z|, \qquad y = \arg_l z, \tag{3.6.90}$$

dann ist $w = x + iy \in S_l$ und $e^w = z$. □

Wir können jetzt den komplexen Logarithmus definieren.

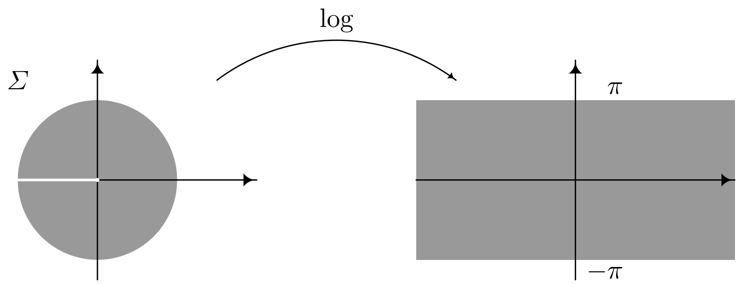
3.6.34. Definition (komplexer Logarithmus)**.** Der *komplexe Logarithmus*, $\log : \mathbb{C}^* \to S_l$, ist definiert durch

$$\log z = \log|z| + i \arg_l z. \tag{3.6.91}$$

Er ist die Umkehrfunktion von $\exp_{|S_l}$, des sog. *Hauptzweiges* der Exponentialfunktion.

Die Unstetigkeitsstellen des komplexen Logarithmus liegen auf der Achse $\{ z \in \mathbb{C}^* \colon \arg z = \pi \}$. Daher ist die Exponentialfunktion im offenen Streifen $\overset{\circ}{S}_l$ ist nicht nur bijektiv, sondern auch ein differenzierbarer Homöomorphismus auf $\Sigma = \{ z \in \mathbb{C}^* \colon \arg z \neq \pi \}$ mit $\exp' z = \exp z \neq 0$, so daß wir nach Theorem 3.2.14 auf Seite 174 schließen können

3.6.35. Proposition. *Der komplexe Logarithmus ist in Σ unendlich oft differenzierbar und es gilt* $\log' z = \frac{1}{z}$.



3.6.36. Aufgaben.

1 Man weise nach, daß Proposition 3.6.10 auch für komplexe Argumente richtig ist.

2 Man beweise die *Formel von de Moivre*

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

3 Man beweise Proposition 3.6.25.

4 Man beweise Proposition 3.6.28.

5 Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, so gilt

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

3.7. Polynome

3.7.1. Definition. Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim E \geq 1$. Ein *Polynom* in $x \in \mathbb{K}$ mit *Koeffizienten* in E ist eine Funktion $f : \mathbb{K} \to E$, die sich in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad x \in \mathbb{K}, \tag{3.7.1}$$

schreiben läßt mit konstanten Koeffizienten $a_k \in E$. Der größte Exponent $k \in \{0, \ldots, n\}$ mit der Eigenschaft $a_k \neq 0$ heißt *Grad* von f, in Zeichen, $\operatorname{Grad} f$, und den zugehörigen Koeffizienten nennen wir den *führenden Koeffizienten* von f, in Zeichen, $\operatorname{lc}(f, x)$.

Ist $f = 0$, so setzen wir $\operatorname{Grad} f = -\infty$.

Polynome f mit $\operatorname{Grad} f \leq 0$ bezeichnen wir auch als *konstante* Polynome.

Die Menge aller Polynome von $\mathbb{K}$ nach E bezeichnen wir mit dem Symbol $P(\mathbb{K}, E)$. $P(\mathbb{K}, E)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Gilt $E = \mathbb{K}$, so schreiben wir $P(\mathbb{K})$ anstelle von $P(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

3.7.2. Bemerkung. Eine Funktion der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k, \qquad x \in \mathbb{K},\ a_k \in E, \tag{3.7.2}$$

$x_0 \in \mathbb{K}$ fest, ist natürlich auch ein Polynom, aber kein Polynom in x sondern eins in $(x - x_0)$. Wir sagen auch, f sei um $x_0 \in \mathbb{K}$ *entwickelt.* Den führenden Koeffizienten eines solchen Polynoms kürzen wir mit $\operatorname{lc}(f, x, x_0)$ ab.

3.7.3. Lemma. *Sei $0 \neq f \in P(\mathbb{K}, E)$ vom Grade n und $x_0 \in \mathbb{K}$. Dann läßt sich f als Polynom in $(x - x_0)$ schreiben*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k. \tag{3.7.3}$$

mit $a_n \neq 0$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k, \qquad b_n \neq 0. \tag{3.7.4}$$

Die Substitution $x = (x - x_0) + x_0$ und die verallgemeinerte binomische Formel liefern dann—wir nehmen o.B.d.A. $x_0 \neq 0$ an—

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_k \big((x - x_0) + x_0\big)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (x - x_0)^m x_0^{k-m}. \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

Setzen wir $\binom{k}{m} = 0$, falls $m > k$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} b_k \binom{k}{m} x_0^{k-m} (x - x_0)^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} a_m (x - x_0)^m \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

mit

$$a_m = \sum_{k=0}^{n} b_k \binom{k}{m} x_0^{k-m}, \tag{3.7.7}$$

so daß $a_n = b_n$. □

3.7.4. Lemma. *Sei $f \in P(\mathbb{K}, E)$, dann sind $\operatorname{lc}(f, x)$ und $\operatorname{Grad} f$ eindeutig bestimmt. Auch bei einer Entwicklung um einen Punkt $0 \neq x_0 \in \mathbb{K}$ gilt $\operatorname{lc}(f, x) = \operatorname{lc}(f, x, x_0)$.*

Beweis. (i) Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß E ein Banachraum ist, denn seien

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &= \sum_{i=0}^{m} b_i (x - x_0)^i \end{aligned} \tag{3.7.8}$$

zwei Darstellungen von f mit von 0 verschiedenen führenden Koeffizienten a_n und b_m, von denen wir zeigen wollen, daß $n = m$ und $a_n = b_m$ gelten muß, so können wir annehmen, daß f eine Abbildung von $\mathbb{K}$ in einen endlich dimensionalen Vektorraum $F \subset E$ ist, der von den Koeffizienten a_k, b_i aufgespannt wird.

Sei $\dim F = p \geq 1$, dann ist F isomorph zu $\mathbb{K}^p$, d.h. es existiert eine bijektive lineare Abbildung $A : F \to \mathbb{K}^p$. Sei nun $|\cdot|$ die kanonische Norm auf $\mathbb{K}^p$, so ist

$$\|x\| = |Ax|, \qquad x \in F \tag{3.7.9}$$

eine Norm auf F. A ist bezüglich dieser Norm eine Isometrie und F daher vollständig, wie übrigens jeder endlich dimensionale normierte Raum.

(ii) Sei also E ein Banachraum. Betrachte zwei beliebige Darstellungen von f wie in (3.7.8). f ist unendlich oft differenzierbar und wir erhalten, wenn wir die erste Darstellung zugrunde legen,

$$f^{(n)} = n!a_n \tag{3.7.10}$$

und bei der zweiten Darstellung

$$f^{(m)} = m!b_m. \tag{3.7.11}$$

Wäre nun o.B.d.A. $m < n$, so folgte aus (3.7.11) $f^{(n)} = 0$, im Widerspruch zu (3.7.10) und der Annahme $a_n \neq 0$. Daher gilt $n = m$ und folglich $a_n = b_m$ wegen (3.7.10) und (3.7.11). $\square$

3.7.5. Theorem. *Sei $f \in P(\mathbb{K}, E)$, $n = \operatorname{Grad} f \geq 1$, und $x_0 \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von f, so können wir f als Produkt darstellen*

$$f(x) = (x - x_0)g, \qquad g \in P(\mathbb{K}, E), \tag{3.7.12}$$

wobei

$$\operatorname{Grad} g = \operatorname{Grad} f - 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{lc}(f, x) = \operatorname{lc}(g, x). \tag{3.7.13}$$

Beweis. Zunächst entwickeln wir f um x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \tag{3.7.14}$$

mit $a_n \neq 0$.

Wegen $f(x_0) = 0$ folgt $a_0 = 0$, d.h.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^k \\
&= (x-x_0) \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (x-x_0)^k.
\end{aligned}
\tag{3.7.15}
$$

Damit haben wir alle Behauptungen bewiesen bis auf $\mathrm{lc}(f,x) = \mathrm{lc}(g,x)$, doch ergibt sich diese Aussage unmittelbar aus der Aufspaltung und Lemma 3.7.4. □

3.7.6. Bemerkung. Sei $f \in P(\mathbb{K}, E)$, $\operatorname{Grad} f = n \geq 1$, und x_0 eine Nullstelle, so daß wir den Linearfaktor $(x - x_0)$ abspalten können wie in (3.7.12). Wenn x_0 auch eine Nullstelle von g ist, so können wir diesen Prozeß wiederholen und erhalten nach einer endlichen Anzahl von Schritten eine Darstellung der Form

$$f(x) = (x-x_0)^m g, \tag{3.7.16}$$

wobei $1 \leq m \leq n$, $\operatorname{Grad} g = n - m$ und x_0 keine Nullstelle von g ist.

Wir nennen dann m die *Vielfachheit* der Nullstelle x_0.

Es gilt ferner $\mathrm{lc}(f,x) = \mathrm{lc}(g,x)$.

3.7.7. Proposition. *Sei $f \in P(\mathbb{K}, E)$ vom Grade $n \geq 1$. Dann besitzt f höchstens n Nullstellen, wenn wir die Vielfachheiten mitzählen.*

Beweis. Folgt sofort per Induktion aus Bemerkung 3.7.6; Übungsaufgabe.

3.7.8. Bemerkung. Ein Polynom vom Grade $n \geq 1$ kann auch gar keine Nullstelle besitzen, wie im Falle $\mathbb{K} = E = \mathbb{R}$ das Beispiel $f(x) = x^2 + 1$ lehrt.

3.7.9. Proposition. *Sei $f \in P(\mathbb{K}, E)$ ein Polynom vom Grade $n \geq 1$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad a_n \neq 0, \tag{3.7.17}$$

und nehme an, daß f n Nullstellen, $x_1, \dots, x_n$, habe unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten. Dann läßt sich f als Produkt von Linearfaktoren darstellen

$$f(x) = a_n (x-x_1) \cdots (x-x_n). \tag{3.7.18}$$

Beweis. Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sei sie also schon für $\operatorname{Grad} g \le n - 1$ bewiesen und sei x_1 eine Nullstelle von f der Vielfachheit $m_1 \ge 1$. Dann spalten wir f nach Bemerkung 3.7.6 auf

$$f(x) = (x - x_1)^{m_1} g(x), \tag{3.7.19}$$

wobei $\operatorname{Grad} g = n - m_1$ und x_1 keine Nullstelle von g ist. Die anderen $n - m_1$ Nullstellen von f müssen daher Nullstellen von g sein. Nach Bemerkung 3.7.6 gilt ferner $\operatorname{lc}(f, x) = \operatorname{lc}(g, x)$. Wende dann die Induktionsvoraussetzung an. □

3.7.10. Proposition (Identitätssatz für Polynome)**.** *Seien f, g Polynome aus $P(\mathbb{K}, E)$ und gelte* $\operatorname{Grad} f = m$, $\operatorname{Grad} g = n$ *mit $m \le n$. Nehme an, daß*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k, \end{aligned} \tag{3.7.20}$$

an $n + 1$ verschiedenen Punkten übereinstimmen, dann folgt $m = n$ und

$$a_k = b_k \qquad \forall\, 0 \le k \le n. \tag{3.7.21}$$

Beweis. Betrachte das Polynom $h = g - f$; es gilt $\operatorname{Grad} h \le n$. Wenn $\operatorname{Grad} h \ge 1$, so erhalten wir einen Widerspruch zu Proposition 3.7.9.

Sei also $\operatorname{Grad} h = 0$, so bedeutet dies, daß $m = n$ und

$$a_k = b_k \qquad \forall\, 1 \le k \le n, \tag{3.7.22}$$

so daß $h = b_0 - a_0$. Andererseits soll h Nullstellen besitzen, d.h. $a_0 = b_0$. □

Der Fundamentalsatz der Algebra

Wir wollen diesen Abschnitt mit dem sog. *Fundamentalsatz der Algebra* und einigen Folgerungen hieraus schließen.

3.7.11. Theorem (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ein nichtkonstantes Polynom $f \in P(\mathbb{C})$ besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Wir werden zeigen, daß die Funktion $\varphi(z) = |f(z)|$ ihr Infimum in $\mathbb{C}$ annimmt und daß es gleich 0 sein muß.

Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad a_n \neq 0, \tag{3.7.23}$$

dann können wir φ nach unten abschätzen durch

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\geq |a_n||z|^n - \Big|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\Big| \\ &\geq |z|^n \Big(|a_n| - \frac{1}{|z|}\Big|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k+1-n}\Big|\Big), \end{aligned} \tag{3.7.24}$$

woraus wir schließen

$$\lim_{|z| \to \infty} \varphi(z) = \infty. \tag{3.7.25}$$

Daher nimmt φ sein Minimum an, d.h. es existiert $z_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(z_0) \leq \varphi(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{3.7.26}$$

Wegen des nachfolgenden Lemmas bedeutet das aber $\varphi(z_0) = 0$. □

3.7.12. Lemma. *Sei $f \in P(\mathbb{C})$ ein nichtkonstantes Polynom und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $f(z_0) \neq 0$. Dann gibt es in jeder Umgebung von z_0 Punkte z mit*

$$|f(z)| < |f(z_0)|. \tag{3.7.27}$$

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $z_0 = 0$ und $f(0) = 1$, sonst transformierem wir die Variablen gemäß $z \to z - z_0$ und ersetzen f durch $f(0)^{-1} f$. Nehme weiter an, daß f die Gestalt wie in (3.7.23) hat, so daß $a_0 = f(0) = 1$.

Sei $m \geq 1$ der erste Index, der der Bedingung $a_m \neq 0$ genügt, so daß also

$$f(z) = 1 + \sum_{k=m}^{n} a_k z^k. \tag{3.7.28}$$

Für kleine $|z|$ dominiert in der Summe der Term $a_m z^m$. Schreiben wir z in Polarkoordinaten, $z = re^{it}$, so können wir t so wählen, daß

$$a_m e^{imt} = -|a_m|, \tag{3.7.29}$$

denn, sei $a_m = |a_m| e^{i\tau}$, so wähle

$$t = \begin{cases} \frac{\pi-\tau}{m}, & 0 \leq \tau \leq \pi, \\ \frac{3\pi-\tau}{m}, & \pi < \tau < 2\pi. \end{cases} \tag{3.7.30}$$

Mit dieser Wahl von t und für hinreichend kleine r erhalten wir aus (3.7.28)

$$|f(z)| \leq \left|1 - \left(|a_m| - \sum_{k=1}^{n-m} |a_{m+k}| r^k\right) r^m\right| < 1. \tag{3.7.31}$$

□

Kombinieren wir nun Theorem 3.7.5 und Theorem 3.7.11, so folgt mit einem einfachen Induktionsschluß

3.7.13. Corollar. *Jedes Polynom $f \in P(\mathbb{C})$ vom Grade $n \geq 1$ besitzt genau n Nullstellen, wenn wir die Vielfachheiten mitzählen, und läßt sich als ein Produkt von Linearfaktoren schreiben wie in* (3.7.18)*.*

Rationale Funktionen

3.7.14. Definition. Seien $f, g \in P(\mathbb{K})$, $g \neq 0$, so heißt ein Ausdruck der Form $h = \frac{f}{g}$ *rationale Funktion* (in $\mathbb{K}$).[15]

In den Nullstellen von g ist h nicht definiert, doch abgesehen von diesen endlich vielen Stellen ist jede rationale Funktion unendlich oft differenzierbar.

Eine rationale Funktion h heißt *echt rationale Funktion*, falls in der Darstellung $h = \frac{f}{g}$ $\operatorname{Grad} f < \operatorname{Grad} g$ gilt.

3.7.15. Proposition (Divisionsalgorithmus)**.** *Seien $f, g \in P(\mathbb{K})$ und $g \neq 0$, dann existieren zwei eindeutig bestimmte Polynome $p, q \in P(\mathbb{K})$, so daß*

$$f = pg + q \quad \text{und} \quad \operatorname{Grad} q < \operatorname{Grad} g. \tag{3.7.32}$$

Zum Beweis des Satzes benötigen wir ein einfaches Lemma

3.7.16. Lemma. *Seien $f, g \in P(\mathbb{K})$, dann gilt*

$$\operatorname{Grad}(fg) = \operatorname{Grad} f + \operatorname{Grad} g. \tag{3.7.33}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

[15]Um Mißverständnisse zu vermeiden, sprechen wir gelegentlich auch von einer reellen bzw. komplexen rationalen Funktion.

Beweis von Proposition 3.7.15. (i) „*Existenz*“ Sollte der Grad von f kleiner sein als der Grad von g, so wählen wir $p = 0$ und $q = f$.

Sei also $n = \operatorname{Grad} f \geq \operatorname{Grad} g = m$ und $a_n = \operatorname{lc}(f, x)$, $b_m = \operatorname{lc}(g, x)$. Wir setzen dann $p_1(x) = b_m^{-1} a_n x^{n-m}$ und $q_1 = f - p_1 g$. Dann ist q_1 ein Polynom mit $\operatorname{Grad} q_1 < \operatorname{Grad} f$.

Gilt nun immer noch $\operatorname{Grad} q_1 \geq \operatorname{Grad} g$, so wiederholen wir den ersten Schritt, wobei wir f durch q_1 ersetzen und dann q_1 durch q_2, usw., bis wir nach endlich vielen Schritten Polynome p und q erhalten, die (3.7.32) genügen.

(ii) „*Eindeutigkeit*“ Seien (p, q), $(\tilde{p}, \tilde{q})$ zwei Paare von Polynomen, die (3.7.32) erfüllen. Bilden wir die Differenz, so folgt

(3.7.34) $$(p - \tilde{p})g = q - \tilde{q}.$$

Ist nun $p - \tilde{p} \neq 0$, so schließen wir aus Lemma 3.7.16

(3.7.35) $$\operatorname{Grad} g \leq \operatorname{Grad}(q - \tilde{q}) < \operatorname{Grad} g;$$

Widerspruch. Daher ist $p = \tilde{p}$ und $q = \tilde{q}$. □

3.7.17. Corollar. *Jede rationale Funktion in $\mathbb{K}$ läßt sich als Summe eines Polynoms und einer echt rationalen Funktion ausdrücken, wobei Zähler und Nenner der echt rationalen Funktion keine gemeinsamen Nullstellen haben.*

3.7.18. Definition. Unter einem *Teilbruch* in $\mathbb{K}$ verstehen einen Ausdruck der Form

(3.7.36) $$\frac{c}{(x - \xi)^m}, \qquad c, x, \xi \in \mathbb{K}, \ m \in \mathbb{N},$$

wobei x variabel ist.

3.7.19. Proposition (Partialbruchzerlegung)**.** *Jede komplexe echt rationale Funktion $h = \frac{f}{g}$ läßt sich als Summe endlich vieler Teilbrüche darstellen. Sind ζ_i, $1 \leq i \leq m$, die Nullstellen des Nenners mit Vielfachheiten m_i, so treten nur Teilbrüche der Form*

(3.7.37) $$\frac{c_{ij}}{(z - \zeta_i)^j}, \qquad 1 \leq j \leq m_i,$$

auf, d.h.

(3.7.38) $$h(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(z - \zeta_i)^j}.$$

Die Zerlegung ist eindeutig.

Beweis. (i) „*Existenz*" Wir führen einen Induktionsbeweis nach $\operatorname{Grad} g$.

Ist $\operatorname{Grad} g = 1$, so ist h bereits ein Teilbruch.

Sei daher $\operatorname{Grad} g = n > 1$ und die Behauptung bereits für $\operatorname{Grad} g \le n-1$ bewiesen. Sei ζ eine Nullstelle von g mit Vielfachheit m, dann gilt nach Bemerkung 3.7.6

$$g(z) = (z-\zeta)^m g_1(z), \qquad g_1(\zeta) \neq 0. \tag{3.7.39}$$

Wir werden jetzt zeigen, daß der Ausdruck

$$\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{c}{(z-\zeta)^m}, \tag{3.7.40}$$

bei geeigneter Wahl von $c \in \mathbb{C}$, ein echt rationaler Bruch ist, auf den die Induktionsvoraussetzungen anwendbar sind.

Wir formen zunächst um

$$\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{c}{(z-\zeta)^m} = \frac{f(z) - cg_1(z)}{(z-\zeta)^m g_1(z)}. \tag{3.7.41}$$

Wählen wir nun c so, daß

$$f(\zeta) - cg_1(\zeta) = 0, \quad \text{also} \quad c = \frac{f(\zeta)}{g_1(\zeta)}, \tag{3.7.42}$$

dann ist das Polynom $f - cg_1$ durch $(z-\zeta)$ teilbar, und somit

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{c}{(z-\zeta)^m} + \frac{f_1(z)}{(z-\zeta)^{m-1} g_1(z)}. \tag{3.7.43}$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite ist nun eine echt rationale Funktion, auf die die Induktionsvoraussetzungen anwendbar sind.

(ii) „*Eindeutigkeit*" Sei $g = a\Pi_{i=1}^m (z-\zeta_i)^{m_i}$ und einmal h zerlegt wie in (3.7.38) und sei

$$h(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{d_{ij}}{(z-\xi_i)^j}. \tag{3.7.44}$$

eine andere Zerlegung von h in Teilbrüche, wobei die ξ_i alle verschieden sind. Man sieht sofort, daß die ξ_i alle Nullstellen von g sind und daß umgekehrt alle Nullstellen von g in der Zerlegung auftauchen müssen. Die Vielfachheiten müssen sich auch entsprechen, d.h. es muß gelten

$$n = m \quad \text{und} \quad n_i = m_i \quad \forall\, 1 \le i \le m. \tag{3.7.45}$$

Wir müssen daher nur noch nachweisen, daß die Koeffizienten c_{ij} und d_{ij} übereinstimmen bei entsprechender Nummerierung, d.h. wenn $\zeta_i = \xi_i$.

Es genügt zu zeigen, daß

$$d_{1j} = c_{1j}, \qquad 1 \leq j \leq m_1. \tag{3.7.46}$$

Zu diesem Zweck multiplizieren wir die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(z-\zeta_i)^j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{d_{ij}}{(z-\zeta_i)^j} \tag{3.7.47}$$

mit $(z-\zeta_1)^{m_1}$ und lassen $z \to \zeta_1$, dann folgt $c_{1,m_1} = d_{1,m_1}$.

Entsprechend erhält man sukzessive die Gleichheit

$$c_{1,j} = d_{1,j}, \qquad \forall\, m_1 \geq j \geq 1. \tag{3.7.48}$$

□

3.7.20. Aufgaben.

1 Man beweise Proposition 3.7.7.

2 Man zerlege die rationalen Funktionen $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ und $g(z) = \frac{3z+4}{(z-1)(z-3)}$ in Teilbrüche.

3 Sei $f \in P(\mathbb{C})$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dann gilt für jede Nullstelle z, daß auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von f ist.

4 Sei $f \in P(\mathbb{R})$ ein Polynom mit $\operatorname{Grad} f$ ungerade. Man gebe zwei Beweise für die Behauptung an, daß f eine reelle Nullstelle besitze.

3.8. Taylorsche Formeln

In diesem Abschnitt wollen wir die polynomiale Approximation von Funktionen $f \in C^n(\Omega, E)$ untersuchen, wobei E ein Banachraum ist und $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen.

Betrachten wir zunächst ein Polynom $f \in P(\mathbb{K}, E), \operatorname{Grad} f = n \geq 0$, und entwickeln wir es um einen Punkt $x_0 \in \mathbb{K}$, vgl. Lemma 3.7.3 auf Seite 207,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k, \tag{3.8.1}$$

dann gilt

3.8.1. Lemma. *Sei* $0 \neq f \in P(\mathbb{K}, E)$, $\operatorname{Grad} f = n$, *und* (3.8.1) *eine Entwicklung von* f *um einen Punkt* $x_0 \in \mathbb{K}$, *so ist*

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \qquad \forall\, 0 \leq k \leq n. \tag{3.8.2}$$

Beweis. Wir betrachten sukzessive die k-ten Ableitungen beider Seiten in (3.8.1) in aufsteigender Reihenfolge von $k = 0$ bis $k = n$ und werten sie in $x = x_0$ aus, woraus sich die Behauptung ergibt. □

Es liegt daher nahe, eine beliebige Funktion $f \in C^n(\Omega, E)$ durch ein Polynom der Form

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \tag{3.8.3}$$

zu approximieren, so daß die Ableitungen bis zur Ordnung n im Punkte $x_0 \in \Omega$ übereinstimmen.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß f von einer reellen Variablen abhängt.

3.8.2. Lemma. *Sei E ein reeller Banachraum, $I = (a, b)$ ein Intervall, das die Zahlen 0 und 1 enthält, und sei $f \in C^n(I, E)$, $n \geq 1$. Dann gilt*

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + R_n(f, 0)(1), \tag{3.8.4}$$

wobei das Restglied[16] *sich abschätzen läßt durch*

$$\|R_n(f, 0)(1)\| \leq \frac{1}{(n-1)!} \sup_{0<t<1} \|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)\|. \tag{3.8.5}$$

Beweis. Definiere für $t \in I$

$$\varphi(t) = f(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(1-t)^k - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(1-t)^n. \tag{3.8.6}$$

Dann gilt

$$\varphi(0) = R_n(f, 0)(1), \qquad \varphi(1) = 0, \tag{3.8.7}$$

und

$$\varphi'(t) = \frac{1}{(n-1)!}\big(f^{(n)}(0) - f^{(n)}(t)\big)(1-t)^{n-1}, \tag{3.8.8}$$

da die Ableitungen der anderen Terme sich alle aufheben. Aus dem MWS, Theorem 3.2.6 auf Seite 170, schließen wir dann

[16] Das Restglied ist nichts anderes als die Differenz von f und dem Polynom. Die spezielle Schreibweise wird in Definition 3.8.4 erklärt.

$$\begin{aligned} \|R_n(f,0)(1)\| &= \|\varphi(1)-\varphi(0)\| \le \sup_{0<t<1} \|\varphi'(t)\| \\ &\le \frac{1}{(n-1)!} \sup_{0<t<1} \|f^{(n)}(t)-f^{(n)}(0)\|. \end{aligned} \tag{3.8.9}$$

□

Den allgemeineren Approximationssatz führen wir auf dieses Lemma zurück.

3.8.3. Theorem (Taylorsche Formel)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen und konvex, E ein Banachraum über $\mathbb{K}$, $f \in C^n(\Omega, E)$, $n \ge 1$, und $x_0 \in \Omega$ ein beliebiger Punkt. Dann läßt sich f darstellen in der Form*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_n(f,x_0)(x), \tag{3.8.10}$$

wobei das Restglied sich abschätzen läßt durch

$$\|R_n(f,x_0)(x)\| \le \frac{1}{(n-1)!} \sup_{\xi \in (x_0,x)} \|f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)\| \cdot |x-x_0|^n. \tag{3.8.11}$$

Hierbei bezeichnen wir mit (x_0,x) die offene Verbindungsstrecke zwischen x_0 und x, $(x_0,x) = \{\, tx_0 + (1-t)x \colon 0 < t < 1 \,\}$.

Beweis. Betrachte in Ω die konvexe Kombination

$$x_t = tx + (1-t)x_0, \qquad 0 \le t \le 1, \tag{3.8.12}$$

die wegen der Offenheit von Ω auch noch für $t \in I = (-\epsilon, 1+\epsilon)$, $\epsilon > 0$, definiert ist, und setze

$$\varphi(t) = f(x_t), \qquad t \in I. \tag{3.8.13}$$

Es gilt $\varphi \in C^n(I,E)$ und

$$\varphi(0) = f(x_0), \quad \varphi(1) = f(x), \tag{3.8.14}$$

$$\varphi^{(k)} = f^{(k)}(x_t)(x-x_0)^k, \tag{3.8.15}$$

sowie

$$R_n(\varphi,0)(1) = R_n(f,x_0)(x). \tag{3.8.16}$$

Daher folgt die Behauptung des Theorems aus Lemma 3.8.2 angewandt auf φ. □

3.8.4. Definition (Taylorsche Polynome). (i) Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ und $f \in C^n(\Omega, E)$, $n \geq 1$, so definieren wir das *Taylorsche Polynom n-ten Grades* von f im Punkte $x_0 \in \Omega$, in Zeichen, $T_n(f, x_0)$, durch

$$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k. \tag{3.8.17}$$

Es gilt dann $T_n(f, x_0) \in P(\mathbb{K}, E)$ und $\operatorname{Grad} T_n(f, x_0) \leq n$.

(ii) Das n-te *Restglied*, $R_n(f, x_0)$, ist in Ω definiert als

$$R_n(f, x_0) = f - T_n(f, x_0). \tag{3.8.18}$$

(iii) Sei $f \in C^\infty(\Omega, E)$, so definieren wir die *Taylorreihe* von f in $x_0 \in \Omega$ als die Potenzreihe $((\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n))$, deren n-te Partialsumme gerade $T_n(f, x_0)$ ist. Wir bezeichnen die Taylorreihe in x_0 mit $T(f, x_0)$ und setzen

$$T(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k, \tag{3.8.19}$$

wenn die Reihe in x konvergiert.

Wir können jetzt die Taylorsche Formel auch so ausdrücken

3.8.5. Proposition. *Sei $\Omega \in \mathbb{K}$ offen und konvex, $f \in C^n(\Omega, E)$, $n \geq 1$, und $x_0 \in \Omega$. Dann läßt sich f darstellen in der Form*

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o(\|x - x_0\|^n). \tag{3.8.20}$$

Das Taylorsche Polynom $T_n(f, x_0)$ ist die einzige polynomiale Approximation vom Grade kleiner oder gleich n mit der Eigenschaft, daß das Restglied ein $o(\|x - x_0\|^n)$ ist.

Beweis. Wir brauchen nur die Eindeutigkeit zu beweisen. Betrachte eine andere polynomiale Approximation vom Grade kleiner oder gleich n um x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(\|x - x_0\|^n). \tag{3.8.21}$$

Bilden wir die Differenz der rechten Seiten von (3.8.20) und (3.8.21), so erhalten wir eine Relation der Form

$$\sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k = o(\|x - x_0\|^n), \tag{3.8.22}$$

aus der wir schließen wollen, daß die Koeffizienten b_k alle verschwinden.

Nehme an, sie verschwinden nicht alle, dann sei $0 \le m \le n$ der kleinste Index mit der Eigenschaft, daß $b_m \neq 0$. Dividieren wir nun (3.8.22) durch $(x - x_0)^m$ und gehen zum Limes über, so folgt $b_m = 0$; Widerspruch. □

3.8.6. Bemerkung. (i) Die Konvergenz der Taylorreihe $T(f, x_0)$ einer Funktion f in einem Punkt $x \in \Omega$ besagt noch nicht, daß

$$f(x) = T(f, x_0)(x). \tag{3.8.23}$$

Betrachte z.B. die reelle Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{3.8.24}$$

f ist unendlich oft differenzierbar und

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \tag{3.8.25}$$

(Übungsaufgabe). Daher ist $T(f, 0) \equiv 0$ und f läßt sich nicht durch seine Taylorreihe in 0 darstellen. Wir werden später sehen, daß sich f in keiner Umgebung des Ursprungs durch eine Potenzreihe darstellen läßt.

(ii) Das hinreichende und notwendige Kriterium das sichert, daß sich $f \in C^\infty(\Omega, E)$ in einer kleinen Umgebung $B_\epsilon(x_0)$ durch seine Taylorreihe $T(f, x_0)$ darstellen läßt, lautet, daß die n-ten Restglieder $R_n(f, x_0)$ in $B_\epsilon(x_0)$ punktweise nach 0 konvergieren

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f, x_0)(x) = 0 \qquad \forall\, x \in B_\epsilon(x_0). \tag{3.8.26}$$

3.8.7. Beispiel. In $B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{C}$ ist die Funktion $f(z) = \log(1 + z)$ durch ihre Taylorreihe um 0 darstellbar

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k. \tag{3.8.27}$$

Beweis. Nach Proposition 3.6.35 auf Seite 206 ist der komplexe Logarithmus in $C^\infty(\{\, z \in \mathbb{C}^* \colon \arg z \neq \pi \,\})$, so daß $f \in C^\infty(B_{\frac{1}{2}}(0))$, sogar in $C^\infty(B_1(0))$, da $\operatorname{Re}(1 + z) > 0$, falls $|z| < 1$.

Man beweist dann per Induktion

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+z)^n} \qquad \forall\, n \ge 1, \tag{3.8.28}$$

und schließt aus der Taylorschen Formel, Theorem 3.8.3,

$$f(z) = T_n(f, 0)(z) + R_n(f, 0)(z) \tag{3.8.29}$$

mit

$$|R_n(f,0)(z)| \le \sup_{|\zeta|<\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{(1+\zeta)^n} - 1\right| |z|^n. \tag{3.8.30}$$

Nun ist

$$\left|\frac{1}{(1+\zeta)}\right| \le \frac{1}{1-|\zeta|} \le 2 \qquad \forall\, |\zeta| \le \tfrac{1}{2}, \tag{3.8.31}$$

so daß

$$|R_n(f,0)(z)| \le (1+2^n)|z|^n \qquad \forall\, |z| < \tfrac{1}{2}, \tag{3.8.32}$$

und somit $\lim_{n\to\infty} R_n(f,0)(z) = 0$. □

Lagrangesche Restgliedabschätzung

Wenn wir voraussetzen, daß f $(n+1)$-mal differenzierbar ist, dann erhalten wir eine etwas bessere Abschätzung des Restglieds $R_n(f,x_0)$.

Wir beweisen auch diese Abschätzungsversion zunächst für Funktionen, die von einer reellen Variablen abhängen.

3.8.8. Lemma. *Sei E ein reeller Banachraum, $I=(a,b)$ ein Intervall, das die Zahlen 0 und 1 enthält, und sei $f: I \to E$ $(n+1)$-mal differenzierbar, $n \ge 0$. Dann läßt sich das Restglied in*

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + R_n(f,0)(1) \tag{3.8.33}$$

abschätzen gemäß

$$\|R_n(f,0)(1)\| \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0<t<1} \|f^{(n+1)}(t)\|. \tag{3.8.34}$$

Beweis. Wir betrachten die Funktionen

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(1-t)^k \tag{3.8.35}$$

und

$$g(t) = (1-t)^{n+1}. \tag{3.8.36}$$

Sie sind in I differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(1-t)^n, \\ g'(t) &= -(n+1)(1-t)^n, \\ \varphi(1) &= f(1), \quad \varphi(0) = T_n(f,0)(1). \end{aligned} \tag{3.8.37}$$

Da $g'(t) \neq 0$ in $(0,1)$, können wir den verallgemeinerten MWS für vektorwertige Funktionen, Theorem 3.3.2 auf Seite 177, anwenden, und erhalten

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \sup_{0<t<1} \left\| \frac{\varphi'(t)}{g'(t)} \right\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0<t<1} \|f^{(n+1)}(t)\|. \tag{3.8.38}$$

□

3.8.9. Theorem (Lagrangesche Restgliedabschätzung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen und konvex, E ein Banachraum über $\mathbb{K}$ und $f : \Omega \to E$ $(n+1)$-mal differenzierbar, $n \geq 0$. Dann läßt sich zu $x_0 \in \Omega$ das Restglied $R_n(f, x_0)$ in der Entwicklung*

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + R_n(f, x_0)(x) \tag{3.8.39}$$

abschätzen gemäß

$$\|R_n(f, x_0)(x)\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{\xi \in (x_0, x)} \|f^{(n+1)}(\xi)\| \, |x - x_0|^{n+1}. \tag{3.8.40}$$

Beweis. Der Beweis ist weitgehend identisch mit dem Beweis von Theorem 3.8.3. Wir betrachten in Ω die konvexe Kombination

$$x_t = tx + (1-t)x_0, \qquad 0 \leq t \leq 1, \tag{3.8.41}$$

die auch noch in einem etwas größeren Intervall $I = (-\epsilon, 1+\epsilon)$, $\epsilon > 0$, definiert ist. Auf die Funktion

$$\varphi(t) = f(x_t) \tag{3.8.42}$$

wenden wir dann Lemma 3.8.8 an und erhalten die Behauptung unter Berücksichtigung von (3.8.14), (3.8.15) und (3.8.16). □

Wir werden später mit dieser Beweismethode—man betrachte $\varphi(t)$ in (3.8.42)—eine Taylorsche Formel auch für Funktionen herleiten, die von mehreren Variablen abhängen und in einer offenen, konvexen Menge definiert sind.

3.8.10. Aufgaben.

1 Man zeige, daß sich die Funktion $\log(1+z)$ in dem abgeschlossenen Halbkreis $K = \{\, z \in \bar{B}_1(0) \colon \operatorname{Re} z \geq 0 \,\}$ in eine Potenzreihe um 0 entwickeln läßt

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \qquad \forall\, z \in K,$$

und daß insbesondere $\log 2$ dem Wert der alternierenden harmonischen Reihe $((\frac{(-1)^n}{n}))_{n\geq 1}$ entspricht.

2 Man entwickle die folgenden reellen Funktionen in Potenzreihen um den Ursprung

$$\log(1+x), \quad \log\frac{1}{1-x}.$$

Für welche reellen x konvergieren die Reihen? Wie läßt sich $\log x$ für beliebige $x > 0$ berechnen?

3 Für die hyperbolischen Funktionen gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

4 Man zeige mittels der Lagrangeschen Restgliedabschätzung, daß die Eulersche Zahl e irrational ist.

5 Man beweise, daß die Funktion in (3.8.24) von der Klasse C^∞ ist und daß alle Ableitungen im Ursprung verschwinden.

6 Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\Omega \subset E$ eine konvexe Menge. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in \Omega,\ \forall\, t \in [0,1].$$

f heißt *konkav*, falls

$$f(tx + (1-t)y) \ge tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in \Omega,\ \forall\, t \in [0,1].$$

Offensichtlich ist f genau dann konvex, wenn $-f$ konkav ist.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Man zeige, daß $f \in C^2(I)$ genau dann konvex ist, wenn $f'' \ge 0$.

7 Man zeige, daß der reelle Logarithmus eine konkave Funktion ist und beweise mit seiner Hilfe die sog. *Youngsche Ungleichung*

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+,$$

hierbei sind p, p' sog. *konjugierte Exponenten*, d.h.

$$p, p' \in (1, \infty) \quad \text{und} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

KAPITEL 4

Räume stetiger Funktionen

4.1. Satz von Dini

Der Satz von Dini liefert ein hinreichendes Kriterium, um von punktweiser Konvergenz einer Funktionenfolge auf gleichmäßige Konvergenz zu schließen.

4.1.1. Theorem (Satz von Dini)**.** *Sei E ein kompakter metrischer Raum und $f_n : E \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende (oder fallende) Folge von stetigen Funktionen, die punktweise nach einer stetigen Funktion g konvergieren, dann konvergiert die Folge gleichmäßig.*

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, die Folge wäre monoton wachsend, d.h.

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \qquad \forall\, x \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.1.1}$$

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wollen dann beweisen, daß

$$\underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists}\ \underset{x \in E}{\forall}\ \underset{m \geq n_0}{\forall} |g(x) - f_m(x)| \leq 2\epsilon. \tag{4.1.2}$$

Wir wissen

$$\underset{x \in E}{\forall}\ \underset{n(x)}{\exists}\ \underset{m \geq n(x)}{\forall} |g(x) - f_m(x)| \leq \epsilon. \tag{4.1.3}$$

Da $f_{n(x)}$ und g stetig sind, gibt es ferner zu jedem $x \in E$ eine Umgebung $U(x)$, so daß

$$|f_{n(x)}(y) - f_{n(x)}(x)| + |g(y) - g(x)| \leq \epsilon \quad \forall\, y \in U(x) \tag{4.1.4}$$

und wir folgern

$$\begin{aligned} |g(y) - f_{n(x)}(y)| &\leq |g(y) - g(x)| + |g(x) - f_{n(x)}(x)| \\ &\quad + |f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| \leq 2\epsilon \quad \forall\, y \in U(x). \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Wegen der Kompaktheit von E überdecken endlich viele $(U(x_i))$, $1 \leq i \leq k$, E; wir setzen $n_0 = \max_i n(x_i)$.

Sei nun $x \in E$ ein beliebiger Punkt, dann ist $x \in U(x_i)$ für ein $1 \leq i \leq k$ und für alle $m \geq n_0$ erhalten wir aufgrund der Monotonie und wegen (4.1.5)

$$\begin{aligned} 0 \leq g(x) - f_m(x) &\leq g(x) - f_{n_0}(x) \\ &\leq g(x) - f_{n(x_i)}(x) \leq 2\epsilon. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

□

4.1.2. Bemerkung. (i) Auf die Stetigkeit der Grenzfunktion kann nicht verzichtet werden, wie man am folgenden Beispiel sieht:

Sei $E = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ und

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases} \tag{4.1.7}$$

dann konvergiert $f_n \searrow g$ punktweise, aber nicht gleichmäßig, denn der gleichmäßige Limes von stetigen Funktionen ist wieder stetig, Theorem 3.4.1 auf Seite 181.

(ii) E muß auch kompakt sein, wie eine leichte Modifizierung des obigen Beispiels zeigt:

Wähle $E = [0,1)$, $f_n(x) = x^n$, $g = 0$ und beachte Beispiel 2 von Beispiele 1.6.2 auf Seite 90.

4.2. Satz von Arzelà-Ascoli

Im folgenden sei E ein metrischer Raum und F ein Banachraum über $\mathbb{K}$. Wir führen zunächst zwei Funktionenräume ein.

4.2.1. Definition. Wir setzen

$$C_b^0(E,F) = \{\, f \colon f : E \to F,\ f \text{ stetig und beschränkt}\,\}, \tag{4.2.1}$$

$$C^0(E,F) = \{\, f \colon f : E \to F,\ f \text{ stetig}\,\}. \tag{4.2.2}$$

Beide Funktionenräume sind Vektorräume über $\mathbb{K}$. In $C_b^0(E,F)$ können wir eine Norm einführen, die *Supremumsnorm*, oder kurz, sup-Norm,

$$\|f\| \equiv \|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|. \tag{4.2.3}$$

Wenn $F = \mathbb{R}$, so schreiben wir $C_b^0(E)$ statt $C_b^0(E, \mathbb{R})$, entsprechend für $C^0(E)$, und wir bezeichnen die sup-Norm mit $|f|_{0,E}$ oder auch nur mit $|f|_0$.

Wenn E kompakt ist, so stimmen $C^0(E, F)$ und $C_b^0(E, F)$ überein und wir vereinbaren, daß wir in diesem Falle $C^0(E, F)$ immer als normierten Raum betrachten.

4.2.2. Proposition. *$C_b^0(E, F)$ versehen mit der* sup-*Norm ist ein Banachraum.*

Beweis. Übungsaufgabe.

4.2.3. Definition (gleichgradige Stetigkeit)**.** Wir nennen eine Teilmenge $\Lambda \subset C_b^0(E, F)$ *gleichgradig stetig*, falls

$$\forall_{\epsilon > 0} \; \exists_{\delta > 0} \; \forall_{f \in \Lambda} \; \forall_{x,y \in E} \quad d(x, y) < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| \le \epsilon, \tag{4.2.4}$$

d.h. jede Funktion f ist gleichmäßig stetig und δ kann unabhängig von f gewählt werden.

Eine wichtige Klasse von gleichgradig stetigen Funktionen sind solche, die gleichmäßig *Hölder-stetig* sind.

4.2.4. Definition (Hölderstetigkeit)**.** Eine Funktion $f : E \to F$ heißt *Hölder-stetig* mit *Exponent* α, $0 < \alpha \le 1$, falls eine Konstante $c > 0$ existiert, so daß

$$\|f(x) - f(y)\| \le c d(x, y)^\alpha \qquad \forall\, x, y \in E. \tag{4.2.5}$$

Falls $\alpha = 1$, so nennt man f meist *Lipschitz-stetig.*

Man bezeichnet

$$[f]_{0,\alpha} = \sup_{\substack{x,y \in E \\ x \ne y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)^\alpha} \tag{4.2.6}$$

als *Hölderkonstante* oder *Hölderhalbnorm*[1] von f.

Im Falle $\alpha = 1$ bezeichnet man entsprechend $[f]_{0,1}$ als *Lipschitzkonstante* von f.

Eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Hölder-stetigen Funktionen mit Exponent α heißt *gleichmäßig Hölder-stetig*, falls eine Konstante c existiert, so daß

$$[f_i]_{0,\alpha} \le c \qquad \forall\, i \in I. \tag{4.2.7}$$

[1] Sei E ein Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ heißt *Halbnorm*, wenn sie alle Eigenschaften einer Norm besitzt außer der positiven Definitheit, d.h. $\varphi(x) = 0 \not\Longrightarrow x = 0$.

Analog ist *gleichmäßige Lipschitzstetigkeit* definiert.

4.2.5. Bemerkung. Sei $\Lambda \subset C_b^0(E,F)$ gleichmäßig Hölder-stetig mit Exponent α, dann ist Λ gleichgradig stetig.

Beweis. Sei c eine obere Schranke für die Hölderhalbnormen der $f \in \Lambda$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben, so wähle in (4.2.4) $\delta = (\epsilon c^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}$. □

4.2.6. Lemma. *Sei $f_n \in C_b^0(E,F)$ eine gleichgradig stetige Folge, die punktweise nach einer Funktion g konvergiert, dann ist g gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann existiert $\delta > 0$, so daß

$$\forall_{n} \ \forall_{x,y \in E} \quad d(x,y) < \delta \implies \|f_n(x) - f_n(y)\| \le \epsilon. \tag{4.2.8}$$

Gehen wir nun bei festen aber beliebigen Punkten x, y mit $d(x,y) < \delta$ zum Limes über, so erhalten wir $\|g(x) - g(y)\| \le \epsilon$. □

4.2.7. Lemma. *Sei $\Lambda \subset C_b^0(E,F)$ gleichgradig stetig, so gilt dies auch für den Abschluß $\bar{\Lambda}$.*

Beweis. Jede Funktion $g \in \bar{\Lambda}$ ist gleichmäßiger Limes einer Folge $f_n \in \Lambda$. Sei daher $\epsilon > 0$ vorgegeben und $\delta > 0$ so gewählt, daß Λ (4.2.4) genügt, so erfüllt $\bar{\Lambda}$ ebenfalls diese Relation. □

4.2.8. Proposition. *Sei (f_n) eine gleichgradig stetige Folge in $C_b^0(E,F)$, $D \subset E$ dicht und nehme an, daß die (f_n) punktweise auf D konvergieren, dann konvergiert die Folge auf ganz E punktweise. Setze $g(x) = \lim f_n(x)$, $x \in E$, so ist g gleichmäßig stetig.*

Beweis. Die gleichmäßige Stetigkeit von g folgt aus Lemma 4.2.6, so daß wir nur noch die punktweise Konvergenz auf ganz E zeigen müssen.

Wegen der Vollständigkeit von F genügt es nachzuweisen, daß $f_n(x)$ eine C.F. ist für alle $x \in E$.

Sei $\epsilon > 0$ und $x \in E$, dann existiert $\delta > 0$, so daß

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| \le \epsilon \qquad \forall\, y \in B_\delta(x),\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.2.9}$$

Da D dicht liegt, gibt es $y \in D \cap B_\delta(x)$; für diese y ist $(f_n(y))$ eine C.F., d.h. es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|f_n(y) - f_m(y)\| \le \epsilon \qquad \forall\, n, m \ge n_0, \tag{4.2.10}$$

woraus wir mit der Dreiecksungleichung und (4.2.9) schließen

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f_m(x)\| &\le \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f_m(y)\| \\ &\quad + \|f_m(x) - f_m(y)\| \le 3\epsilon \quad \forall\, n, m \ge n_0.\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

□

4.2.9. Proposition. *Sei E kompakt und (f_n) eine gleichgradig stetige Folge in $C^0(E, F)$, dann gilt*

$$f_n \to g \quad \Longrightarrow \quad f_n \rightrightarrows g. \tag{4.2.12}$$

Beweis. (i) Konvergiere (f_n) punktweise nach g, dann ist g gleichmäßig stetig, Lemma 4.2.6, und somit ist auch $\Lambda = \bigcup_n \{f_n\} \cup \{g\}$ gleichgradig stetig, wie man sich leicht überlegt.

(ii) Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann existiert $\delta > 0$, so daß

$$d(x, y) < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| \le \epsilon \qquad \forall\, f \in \Lambda. \tag{4.2.13}$$

Als kompakte Menge läßt sich E von endlich vielen Kugeln $B_\delta(x_i)$, $i = 1, \dots, k$, überdecken und zu jedem i existiert ein Index n_i, so daß

$$\|f_n(x_i) - g(x_i)\| \le \epsilon \qquad \forall\, n \ge n_i. \tag{4.2.14}$$

Setze $n_0 = \max_i n_i$.

Sei nun $x \in E$ beliebig, dann liegt x in einem $B_\delta(x_i)$ und wir erhalten aus (4.2.13) und (4.2.14) mittels der Dreiecksungleichung für alle $n \ge n_0$

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - g(x)\| &\le \|f_n(x) - f_n(x_i)\| + \|f_n(x_i) - g(x_i)\| \\ &\quad + \|g(x) - g(x_i)\| \le 3\epsilon.\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

□

Wir können jetzt den Satz von Arzelà-Ascoli beweisen.

4.2.10. Theorem (Satz von Arzelà-Ascoli)**.** *Sei E kompakt, dann ist eine Teilmenge $\Lambda \subset C^0(E, F)$ genau dann relativ kompakt, wenn sie gleichgradig stetig ist und wenn für jedes $x \in E$ die Menge*

$$\Lambda(x) = \{\, f(x) \colon f \in \Lambda \,\} \tag{4.2.16}$$

relativ kompakt in F ist.

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Sei $\varLambda$ relativ kompakt. Wir zeigen zunächst

$\varLambda(x)$ ist relativ kompakt $\forall\, x \in E$.

Wir müssen beweisen, daß $\bar{\varLambda}(x)$ kompakt ist. Nun ist nach Theorem 2.3.10 auf Seite 124 ein metrischer Raum genau dann kompakt, wenn er präkompakt und vollständig ist. Da F vollständig, ist $\bar{\varLambda}(x)$ ebenfalls vollständig, so daß wir nur noch zeigen müssen, daß $\bar{\varLambda}(x)$ präkompakt ist, oder äquivalent hierzu, daß $\varLambda(x)$ präkompakt ist, vgl. Aufgabe 1 von Aufgaben 2.3.25 auf Seite 130.

Aus dem gleichen Grund ist $\varLambda$ genau dann relativ kompakt in $C^0(E, F)$, wenn $\varLambda$ präkompakt ist. Daher existieren zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ endliche viele $f_i \in \varLambda$, $1 \leq i \leq k$, so daß es zu jedem $f \in \varLambda$ ein i gibt mit

$$\|f - f_i\| = \sup_{x \in E} \|f(x) - f_i(x)\| < \epsilon. \tag{4.2.17}$$

Dann folgt natürlich insbesondere

$$\|f(x) - f_i(x)\| < \epsilon \qquad \forall\, x \in E. \tag{4.2.18}$$

Das heißt aber, daß jedes $\varLambda(x)$ präkompakt ist.

$\varLambda$ ist gleichgradig stetig.

Wir nutzen wieder die Präkompaktheit von $\varLambda$ aus. Sei $\epsilon > 0$ gegeben und wie eben $(B_\epsilon(f_i))_{1 \leq i \leq k}$ eine endliche Überdeckung von $\varLambda$. Die f_i sind nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig wegen der Kompaktheit von E, Proposition 2.3.14 auf Seite 125, daher existiert $\delta > 0$, so daß

$$d(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f_i(x) - f_i(y)\| < \epsilon \quad \forall\, 1 \leq i \leq k. \tag{4.2.19}$$

Sei nun $f \in \varLambda$ beliebig, $f \in B_\epsilon(f_i)$, und gelte $d(x, y) < \delta$, dann schließen wir aus (4.2.18) und (4.2.19)

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_i(x)\| + \|f_i(x) - f_i(y)\| \\ + \|f_i(y) - f(y)\| \leq 3\epsilon. \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

„$\Longleftarrow$“ Um die Kompaktheit von $\bar{\varLambda}$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß $\bar{\varLambda}$ folgenkompakt ist, vgl. Theorem 2.3.10 auf Seite 124, oder äquivalent hierzu, daß jede Folge (f_n) aus $\varLambda$ eine in $C^0(E, F)$ konvergente Teilfolge enthält, siehe Aufgabe 2 von Aufgaben 2.3.25 auf Seite 130.

Als kompakter Raum ist E separabel, Proposition 2.3.13 auf Seite 125, d.h. es existiert eine h.a. dichte Teilmenge D. Da die folgenden Überlegungen mit leichten Veränderungen auch gelten, wenn D endlich ist, wollen wir annehmen, daß D abzählbar ist, $D = \{\, x_n : n \in \mathbb{N} \,\}$.

Sei (f_n) eine beliebige Folge aus Λ. Wir werden jetzt eine Teilfolge konstruieren, die auf D punktweise konvergiert, dann folgt aus Proposition 4.2.8, daß die Teilfolge auf ganz E konvergiert, und zwar nach einer stetigen Funktion g, und mit Proposition 4.2.9 schließen wir weiter, daß die Konvergenz gleichmäßig ist, d.h. die Teilfolge konvergiert in $C^0(E, F)$ nach g.

Die Konstruktion einer auf D konvergenten Teilfolge erfolgt sukzessive:

1. Die Folge $(f_n(x_0))$ ist nach Voraussetzung relativ kompakt in F und enthält daher eine konvergente Teilfolge $(f_{0n}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$. Also (f_{0n}) ist eine Teilfolge von (f_n), die auf $\{x_0\}$ punktweise konvergiert.

2. Wir betrachten jetzt die Folge $(f_{0n}(x_1))$, die ebenfalls relativ kompakt ist in F, so daß eine konvergente Teilfolge $(f_{1n}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ existiert. Die Folge (f_{1n}) ist dann eine Teilfolge von (f_{0n}), die auf der Menge $\{x_0, x_1\}$ punktweise konvergiert.

3. So fahren wir sukzessive fort und erhalten Teilfolgen $(f_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ von (f_n) mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} &(f_{in}) \quad \text{ist T.F. von} \quad (f_{jn}) \qquad \forall\, 0 \le j < i, \\ &(f_{in}) \quad \text{konvergiert punktweise auf} \quad \{x_0, \dots, x_i\}. \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Die *Diagonalfolge* $(f_{nn})_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann eine Teilfolge der Ausgangsfolge (f_n), die auf D punktweise konvergiert, denn sei $x_i \in D$ beliebig, so ist $(f_{nn})_{n\ge i}$ eine Teilfolge von (f_{in}), daher konvergiert $(f_{nn}(x_i))$. □

Wählen wir als Bildraum $F = \mathbb{R}$, so können wir als Corollar festhalten

4.2.11. Corollar. *Sei E kompakt und $f_n \in C^0(E)$ eine Folge reellwertiger Funktionen. Dann enthält (f_n) genau dann eine konvergente Teilfolge, wenn (f_n) gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist.*

Mittels der beim Schluß des Beweises von Theorem 4.2.10 benutzen Methode, *Konstruktion einer Diagonalfolge*, läßt sich auch folgender Satz beweisen

4.2.12. Proposition. *Sei D eine abzählbare Menge und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die punktweise beschränkt ist, dann kann man eine Teilfolge auswählen, die punktweise konvergiert.*

4.2.13. Aufgaben.

1 Man zeige, daß die Funktion $f(x) = |x|^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, auf $I = [-1, 1]$ Hölder-stetig ist mit Exponent α.

2 Sei $I = [a,b]$ und $f_n \in C^0(I)$ eine Folge von Funktionen, die im offenen Intervall differenzierbar sind und deren Ableitung gleichmäßig beschränkt ist, d.h. es existiert eine positive Konstante c, so daß

$$|f_n'(x)| \leq c \qquad \forall\, x \in (a,b),\ \forall\, n.$$

Nehme weiter an, daß $f_n(a) = 0\ \forall\, n$, dann besitzt die Folge eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge.

3 Man zeige, daß die Vereinigung von endlich vielen gleichgradig stetigen Mengen wieder gleichgradig stetig ist.

4 Man beweise Proposition 4.2.2.

5 Seien E, F normierte Räume. Eine Abbildung $A \in L(E,F)$ heißt *kompakt*, falls A beschränkte Mengen in relativ kompakte abbildet. Sei I=[a,b]; man zeige, daß sich $C^n(I)$ auf natürliche Weise in $C^m(I)$ einbetten läßt, falls $0 \leq m < n$, und daß diese Einbettung kompakt ist, wenn wir die Räume mit den in Aufgabe 9 von Aufgaben 3.1.20 auf Seite 168 definierten Normen versehen.

6 Sei E ein separabler normierter Raum über $\mathbb{K}$ und $\varphi_n \in E^*$ eine Folge von stetigen linearen Funktionalen, deren Normen gleichmäßig beschränkt sind, d.h. es existiert eine Konstante c, so daß

$$\|\varphi_n\| \leq c \qquad \forall\, n.$$

Dann kann man eine Teilfolge auswählen, die punktweise nach einem stetigen linearen Funktional $\varphi \in E^*$ konvergiert.

4.3. Satz von Stone-Weierstraß

Weierstraß hat bewiesen, daß jede stetige reelle Funktion, die auf einem kompakten Intervall definiert ist, sich gleichmäßig durch Polynome approximieren läßt.

Stone hat dann später diesen Approximationssatz zu einer Aussage über dichte Unteralgebren von $C^0(E)$ verallgemeinert, wobei E eine kompakte Menge ist, und insbesondere bewiesen, daß jede stetige reellwertige Funktion, die auf einer kompakten Menge des $\mathbb{R}^n$ definiert ist, sich gleichmäßig durch Polynome[2] approximieren läßt.

Wir wollen zunächst den Begriff *Funktionenalgebra* oder auch kurz, *Algebra*, einführen.

[2]Wir werden gleich definieren, was ein Polynom im $\mathbb{R}^n$ ist.

4.3.1. Definition. Sei $E \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Menge A, deren Elemente Funktionen $f : E \to \mathbb{K}$ sind, heißt *Funktionenalgebra*, falls

(i) A ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

(ii) $f, g \in A \implies fg \in A$.[3]

Gelegentlich spricht man auch von einer *reellen* oder *komplexen* Funktionenalgebra, je nachdem, ob $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4.3.2. Beispiele. 1. Die Menge aller Funktionen von E nach $\mathbb{K}$, in Zeichen, $F(E, \mathbb{K})$, bildet eine Algebra.

2. Sei $\emptyset \neq E \subset \mathbb{K}$ und A die Menge aller Polynome, genauer, $A = \{ f_{|E} : f \in P(\mathbb{K}) \}$, so ist A eine Algebra.

3. Unter einem Polynom in $\mathbb{K}^n$, oder auch, *Polynom in mehreren Variablen*, verstehen wir einen Ausdruck der Form

$$f(x) = \sum a_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \tag{4.3.1}$$ [4]

wobei die n-tupel $(i_1, \dots, i_n)$ eine *endliche* Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ durchlaufen und die Koeffizienten $a_{i_1 \cdots i_n}$ Konstanten aus $\mathbb{K}$ sind. Die Menge aller Polynome über $\mathbb{K}^n$ bezeichnen wir mit $P(\mathbb{K}^n)$.

Wenn die Koeffizienten in (4.3.1) konstante Vektoren eines Banachraumes F sind, so sprechen wir von Polynomen über $\mathbb{K}^n$ mit Koeffizienten in F und bezeichnen die Menge dieser Polynome mit $P(\mathbb{K}^n, F)$.

Sei $\emptyset \neq E \subset \mathbb{K}^n$, so ist $A = \{ f_{|E} : f \in P(\mathbb{K}^n) \}$ eine Algebra.

4. Sei $E = [0, 2\pi]$ und A die Menge aller Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx), \tag{4.3.2}$$

wobei die Koeffizienten reelle Zahlen sind, dann ist A eine Algebra, wie man mit Hilfe der Additionstheoreme unschwer nachweist.

Man nennt die Funktionen in (4.3.2) *trigonometrische Polynome.*

4.3.3. Definition (Multiindex)**.** Ein n-tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ nennen wir *Multiindex.* Wir bezeichnen $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ als *Ordnung* von α und wir vereinbaren, daß

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad \forall\, x \in \mathbb{K}^n. \tag{4.3.3}$$

[3]Unter dem Produkt fg verstehen wir natürlich die Funktion, die man durch punktweise Multiplikation erhält.

[4]Wegen der Exponenten i_k indizieren wir hier die Komponenten eines Vektors in $\mathbb{K}^n$ mit unten statt oben stehenden Indizes.

4.3.4. Ein Polynom $f \in P(\mathbb{K}^n)$ läßt sich dann in der Form

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha, \qquad x \in \mathbb{K}^n, \tag{4.3.4}$$

darstellen.

Jeder Summand $a_\alpha x^\alpha$, α fest, ist ein sog. *Monom.*

Der Grad von f, Grad f, ist die größte natürliche Zahl, zu der es in (4.3.4) einen Koeffizienten $a_\alpha \neq 0$ gibt mit $|\alpha| = \operatorname{Grad} f$.

Man überlegt sich leicht, daß der Durchschnitt von Algebren wieder eine Algebra ist. Daher können wir definieren

4.3.5. Definition. Sei E eine nichtleere Menge und $M \subset F(E, \mathbb{K})$, dann existiert eine kleinste Funktionenalgebra $A \subset F(E, \mathbb{K})$, die M enthält. Man nennt A die von M *erzeugte* Algebra und schreibt $A = \langle M \rangle$. Es gilt die Darstellung

$$\langle M \rangle = \{ \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \Phi^\alpha : \Phi \in M^n,\ n \in \mathbb{N},\ a_\alpha \in \mathbb{K} \}. \tag{4.3.5}$$

4.3.6. Beispiele. 1. Sei $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^n$ und $M = \{ \mathrm{pr}_{i\,|_E} : 1 \leq i \leq n \}$, beachte $x^i = \mathrm{pr}_i\, x$, so ist $\langle M \rangle$ die Menge aller reellen Polynome auf E.

2. Sei $E = S^1 \subset \mathbb{C}$ und $M = \{z, \bar{z}\} \subset F(E, \mathbb{C})$, so ist

$$\langle M \rangle = \{ \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl} z^k \bar{z}^l : z \in S^1,\ a_{kl} \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N} \}. \tag{4.3.6}$$

Nun gilt auf S^1, wegen $1 = |z|^2 = z\bar{z}$,

$$\bar{z} = z^{-1} \qquad \forall\, z \in S^1, \tag{4.3.7}$$

so daß die Funktionen f in (4.3.6) von der Form sind

$$f(z) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl} z^{k-l}, \tag{4.3.8}$$

d.h.

$$\langle M \rangle = \{ \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k : n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{C} \}. \tag{4.3.9}$$

3. Sei $E = [0, 2\pi]$, so ist die von $M = \{\sin,\ \cos\} \subset F([0, 2\pi], \mathbb{R})$ erzeugte Algebra gleich der Algebra der in (4.3.2) definierten trigonometrischen Polynome.

4.3.7. Definition. Sei $E \neq \emptyset$ und $A \subset F(E, \mathbb{K})$ eine Algebra. Wir sagen A *enthält die Konstanten*, wenn A die konstanten Funktionen auf E enthält, und A *trennt Punkte*, wenn zu beliebigen Punkten, $x, y \in E$, $x \neq y$, eine Funktion $f \in A$ existiert, so daß $f(x) \neq f(y)$.

4.3.8. Die vorher definierten polynomialen Algebren über $E \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $E = S^1$ enthalten die Konstanten und trennen Punkte, da die Koordinatenfunktionen bereits Punkte trennen.

4.3.9. Lemma. *Sei E kompakt und $A \subset C^0(E, \mathbb{K})$ eine Algebra, dann ist auch $\bar{A}$ eine Algebra, wobei $C^0(E, \mathbb{K})$ mit der* sup*-Norm versehen ist.*

Beweis. Da $C^0(E, \mathbb{K})$ ein Banachraum ist, verhalten sich Addition und Multiplikation mit einem Skalar stetig, so daß wir nur noch zeigen müssen, daß die Multiplikation zweier Elemente eine stetige Abbildung ist von dem Produktraum $C^0(E, \mathbb{K}) \times C^0(E, \mathbb{K})$ nach $C^0(E, \mathbb{K})$, d.h.

$$(f, g) \to fg \tag{4.3.10}$$

soll eine stetige Abbildung sein. Dies folgt aber aus der Abschätzung

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|, \qquad \|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|, \tag{4.3.11}$$

wie man sich leicht überlegt (Übungsaufgabe). $\square$

4.3.10. Lemma. *Die reelle Funktion $\psi(t) = \sqrt{t}$ kann auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig durch Polynome φ_n approximiert werden.*

Beweis. Wir definieren die Polynome induktiv: $\varphi_0 = 0$ und

$$\varphi_{n+1}(t) = \varphi_n(t) + \tfrac{1}{2}(t - \varphi_n(t)^2). \tag{4.3.12}$$

Wir behaupten, daß

$$0 \leq \varphi_n(t) \leq \sqrt{t} \quad \wedge \quad \varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t) \qquad \forall\, t \in [0, 1], \tag{4.3.13}$$

und beweisen die Behauptung per Induktion.

Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig. Gelte (4.3.13) für n, dann schätzen wir ab

$$\sqrt{t} - \varphi_{n+1}(t) = \big(\sqrt{t} - \varphi_n(t)\big)\big(1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{t} + \varphi_n(t))\big). \tag{4.3.14}$$

Da φ_n der ersten Ungleichung in (4.3.13) genügt, folgt

$$0 \leq \varphi_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}, \tag{4.3.15}$$

und aus (4.3.12)—mit n ersetzt durch $n + 1$—schließen wir weiter

$$0 \leq \varphi_{n+1}(t) \leq \varphi_{n+2}(t). \tag{4.3.16}$$

Die φ_n bilden daher eine monoton wachsende und gleichmäßig beschränkte Folge, die nach Proposition 1.1.9 auf Seite 55 punktweise zu einer positiven Funktion φ auf $[0,1]$ konvergieren.

Folglich gilt wegen (4.3.12)

$$\varphi(t) = \varphi(t) + \tfrac{1}{2}(t - \varphi(t)^2), \tag{4.3.17}$$

d.h. $\varphi(t) = \sqrt{t}$. φ ist daher stetig, so daß nach dem Satz von Dini, Theorem 4.1.1 auf Seite 225, die Konvergenz gleichmäßig ist. □

Wir können jetzt den Stone-Weierstraßschen Approximationssatz beweisen, zunächst die reelle Version.

4.3.11. Theorem (Stone-Weierstraß)**.** *Sei E ein kompakter metrischer Raum und $A \subset C^0(E)$ eine Unteralgebra, die Punkte trennt und die konstanten Funktionen enthält, dann liegt A dicht.*

Beweis. Nach Lemma 4.3.9 ist auch $\bar{A}$ eine Algebra. Wir nehmen daher o.B.d.A. an, daß A abgeschlossen ist, und müssen dann $A = C^0(E)$ zeigen.

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte.

(i) $f \in A \implies |f| \in A$.

Seien φ_n die Polynome in Lemma 4.3.10 und sei $g = \|f\|^{-1} f$, wobei wir annehmen dürfen, daß $\|f\| > 0$, dann gehören die Funktionen $g_n = \varphi_n(g^2)$ zu A, da A eine Algebra ist, und sie konvergieren gleichmäßig zu $|g| = \|f\|^{-1}|f|$.

(ii) $f, g \in A \implies \min(f,g),\ \max(f,g) \in A$.

Diese Behauptung folgt sofort aus (i), da

$$\begin{aligned} \min(f,g) &= \tfrac{1}{2}(f + g - |f-g|), \\ \max(f,g) &= \tfrac{1}{2}(f + g + |f-g|). \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

(iii) $x \neq y \in E \ \wedge\ a, b \in \mathbb{R} \implies \exists_{h \in A}\ h(x) = a, h(y) = b$.

Da A die Punkte trennt, wissen wir, daß $\varphi \in A$ existiert mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Setze dann

$$h(z) = a + (b-a)\frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)}. \tag{4.3.19}$$

(iv) Sei $f \in C^0(E)$. Wir wollen dann zeigen, daß $f \in A$; da wir A als abgeschlossen vorausgesetzt haben, ist dies gleichbedeutend damit, $f \in \bar{A} = A$ nachzuweisen, d.h. zu $\epsilon > 0$ soll $g \in A$ existieren mit $\|f - g\| < \epsilon$ oder

$$f(x) - \epsilon < g(x) < f(x) + \epsilon \qquad \forall\, x \in E. \tag{4.3.20}$$

Wir werden g in zwei Schritten finden, wobei wir ausnutzen werden, daß E kompakt, A die Konstanten enthält und gegenüber Minimum und Maximumbildung abgeschlossen ist.

Fixiere ein beliebiges $x \in E$. Dann finden wir zu jedem $y \in E$ eine Funktion $h_y \in A$, so daß

$$h_y(x) = f(x) \quad \text{und} \quad h_y(y) = f(y), \tag{4.3.21}$$

denn, wenn $x \neq y$, so ist dies gerade die Aussage in (iii), und im Falle $x = y$, läßt sich diese Forderung mit $h_y \equiv f(x)$ erfüllen, da A die konstanten Funktionen enthält.

Aus Stetigkeitsgründen gilt dann in einer kleinen offenen Umgebung $U(y)$ von y

$$h_y(z) < f(z) + \epsilon \qquad \forall\, z \in U(y). \tag{4.3.22}$$

Da E kompakt, überdecken endlich viele $U(y_i)$, $1 \leq i \leq n$, E. Die zugehörigen h_{y_i} genügen

$$h_{y_i}(x) = f(x) \quad \text{und} \quad h_{y_i}(z) < f(z) + \epsilon \quad \forall\, z \in U(y_i), \tag{4.3.23}$$

daher gilt für

$$h_x = \min_{1 \leq i \leq n} h_{y_i} \in A \qquad \text{(wegen (ii))} \tag{4.3.24}$$

$h_x(x) = f(x)$ und

$$h_x(y) < f(y) + \epsilon \qquad \forall\, y \in E. \tag{4.3.25}$$

Aus Stetigkeitsgründen existiert dann wieder eine offene Umgebung $U(x)$ von x, so daß

$$f(y) - \epsilon < h_x(y) \qquad \forall\, y \in U(x). \tag{4.3.26}$$

Dies gilt für beliebige $x \in E$. Endlich viele $U(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, überdecken E; setze

$$g = \max_{1 \leq i \leq n} h_{x_i}. \tag{4.3.27}$$

g genügt dann (4.3.20) wegen (4.3.25) und (4.3.26). □

Als Corollar folgt, wenn wir Ziffer 4.3.8 beachten,

4.3.12. Corollar. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, dann läßt sich jede Funktion $f \in C^0(E)$ gleichmäßig durch Polynome approximieren.*

Dieses Corollar läßt sich auch dahingehend verallgemeinern, daß der Bildraum ein endlich dimensionaler Vektorraum ist.

4.3.13. Proposition. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, dann läßt sich jede Funktion $f \in C^0(E, \mathbb{R}^m)$ gleichmäßig durch Polynome in den Variablen $x^1, \dots, x^n$ und Koeffizienten in $\mathbb{R}^m$ approximieren.*

Beweis. Wende auf die einzelnen Komponenten von f Corollar 4.3.12 an und setze dann die m Polynome zu einem vektorwertigen Polynom zusammen. □

Wenn wir den Approximationssatz im komplexen Falle beweisen wollen, d.h., wenn $A \subset C^0(E, \mathbb{C})$, so müssen die Unteralgebren A noch eine weitere Bedingung erfüllen, sie müssen *abgeschlossen* gegenüber der Konjugation sein

$$f \in A \implies \bar{f} \in A. \tag{4.3.28}$$

4.3.14. Theorem (Stone-Weierstraß, komplexe Version)**.** *Sei E ein kompakter metrischer Raum und $A \subset C^0(E, \mathbb{C})$ eine Unteralgebra, die Punkte trennt, die Konstanten enthält und bezüglich der Konjugation abgeschlossen ist, dann liegt A dicht.*

Beweis. Sei $f \in C^0(E, \mathbb{C})$, dann ist

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f, \tag{4.3.29}$$

wobei

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}. \tag{4.3.30}$$

Es ist also

$$C^0(E, \mathbb{C}) = C^0(E) + iC^0(E). \tag{4.3.31}$$

Eine entsprechende Aufspaltung gilt auch für A, da A abgeschlossen ist bezüglich der Konjugation, und somit

$$f \in A \quad \implies \quad \operatorname{Re} f,\ \operatorname{Im} f \in A. \tag{4.3.32}$$

Setze

$$A_{\mathbb{R}} = \{\, f \in A \colon R(f) \subset \mathbb{R} \,\}, \tag{4.3.33}$$

dann ist $A_{\mathbb{R}}$ eine Unteralgebra von $C^0(E)$, die Punkte trennt und die Konstanten enthält, und daher dicht liegt in $C^0(E)$.

Folglich ist

$$A = A_{\mathbb{R}} + iA_{\mathbb{R}} \tag{4.3.34}$$

dicht in $C^0(E,\mathbb{C})$. □

4.3.15. Corollar. *Sei $E \subset \mathbb{C}$ kompakt, dann läßt sich jede Funktion $f \in C^0(E,\mathbb{C})$ gleichmäßig durch Polynome in $z, \bar{z}$ approximieren.*

Approximation durch trigonometrische Polynome

Wählen wir in Corollar 4.3.15 speziell $E = S^1 \subset \mathbb{C}$, so wissen wir nach (4.3.9), daß die Polynome in $z, \bar{z}$ auf S^1 von der Form

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k z^k, \qquad a_k \in \mathbb{C},\ z \in S^1, \tag{4.3.35}$$

sind, d.h. zu jedem $f \in C^0(S^1,\mathbb{C})$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein Polynom wie in (4.3.35), so daß

$$|f(z) - \sum_{k=-n}^{n} a_k z^n| < \epsilon \qquad \forall\, z \in S^1. \tag{4.3.36}$$

Dieses Ergebnis können wir benutzen, um einen Approximationssatz für reelle 2π periodische Funktionen zu beweisen.

4.3.16. Proposition. *Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$ 2π periodisch, dann läßt sich f gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ durch trigonometrische Polynome der Form*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kt + b_k \cos kt), \qquad a_i \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \tag{4.3.37}$$

approximieren.

Beweis. Wir benutzen, daß S^1 und $[0,2\pi)$ sich bijektiv aufeinander abbilden lassen durch die Abbildung $\varphi(t) = e^{it}$, vgl. Proposition 3.6.17 auf Seite 197 und Proposition 3.6.18.

Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$ 2π periodisch, dann ist

$$g = f \circ \varphi^{-1} \in C^0(S^1), \tag{4.3.38}$$

da $f(0) = f(2\pi)$, und es existiert zu $\epsilon > 0$ ein Polynom der Form (4.3.35), so daß

$$|g(e^{it}) - \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}| < \epsilon \qquad \forall\, t \in [0,2\pi]. \tag{4.3.39}$$

Schreiben wir jedes a_k als $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ mit reellen α_k, β_k, so folgt mittels der Eulerschen Formel

$$|f(t) - \sum_{k=-n}^{n} (\alpha_k \cos kt - \beta_k \sin kt)| < \epsilon \qquad \forall\, t \in [0, 2\pi]. \tag{4.3.40}$$

Da der Sinus ungerade und der Cosinus gerade ist, läßt sich die Summe auch ausdrücken als

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \big((\alpha_{-k} + \alpha_k) \cos kt + (\beta_{-k} - \beta_k) \sin kt\big), \tag{4.3.41}$$

d.h. als ein trigonometrisches Polynom der Form (4.3.37). □

4.3.17. Aufgaben.

1 Man vervollständige den Beweis von Lemma 4.3.9.

2 Man zeige, daß die trigonometrischen Polynome eine Algebra über $\mathbb{R}$ bilden.

4.4. Analytische Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen, die eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ in einen Banachraum E abbilden, $f : \Omega \to E$. Eine solche Funktion heißt *analytisch*, wenn sie sich lokal in eine Potenzreihe entwickeln läßt—eine genaue Definition wird später gegeben.

Daher wollen wir zunächst Potenzreihen in mehreren Variablen betrachten, deren Koeffizienten Elemente eines Banachraum sind.

4.4.1. Definition. (i) Ein (offener) *Polyzylinder* $P \subset \mathbb{K}^n$ ist das kartesische Produkt von offenen Kugeln $B_{r_i}(a_i) \subset \mathbb{K}$, d.h.

$$P = \{\, x \in \mathbb{K}^n \colon |x_i - a_i| < r_i,\ \forall\, i \,\}.\text{[5]} \tag{4.4.1}$$

$a = (a_i)$ heißt *Zentrum* von P und wir schreiben gelegentlich auch $P(a_i, r_i)$.

(ii) Wir definieren die Abbildung $\nu : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ durch

$$\nu(x) = (|x_i|) \qquad \forall\, x = (x_i), \tag{4.4.2}$$

wobei wir das Symbol ν beibehalten, wenn sich die Dimension des Raumes ändern sollte.

(iii) Sei E ein Banachraum über $\mathbb{K}$ und $P = P(0, r_i) \subset \mathbb{K}^n$. Eine *Potenzreihe* bezüglich $x \in P$ mit Werten in E ist eine Reihe der Form $((a_\alpha x^\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$.

[5] Wir kennzeichnen in diesem Abschnitt die Komponenten eines Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ mit untenstehenden Indizes, abweichend von unserer üblichen Schreibweise.

Die *Exponenten* α durchlaufen alle Multiindizes in $\mathbb{N}^n$, die *Koeffizienten* a_α sind feste Vektoren in E.

Wenn die Potenzreihe in P absolut summierbar ist, so definiert ihre Summe eine Funktion $f : P \to E$

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha. \tag{4.4.3}$$

Wegen der absoluten Summierbarkeit ist die Summe unabhängig von der Art der Abzählung definiert, vgl. Theorem 1.5.8 auf Seite 82, z.B. können wir die Funktion f in (4.4.3) in der Form wiedergeben

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha, \tag{4.4.4}$$

oder auch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\hat{\alpha} \in \mathbb{N}^{n-1}} a_{(\hat{\alpha},k)} \hat{x}^{\hat{\alpha}} x_n^k \tag{4.4.5}$$

mit den leicht verständlichen Bezeichnungen

$$\alpha = (\hat{\alpha}, \alpha_n) \quad \text{und} \quad x = (\hat{x}, x_n). \tag{4.4.6}$$

Die Aufspaltung in (4.4.5) können wir auch verallgemeinern.

4.4.2. Lemma. *Sei $P = P(0, r_i) \subset \mathbb{K}^n$; schreibe $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^q$, $\mathbb{N}^n = \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q$ und spalte Vektoren $x \in \mathbb{K}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ auf in der Form $x = (\hat{x}, \tilde{x}), \alpha = (\hat{\alpha}, \tilde{\alpha})$ und entsprechend $P = \hat{P} \times \tilde{P}$. Sei $((a_\alpha x^\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$, $a_\alpha \in E$, eine Potenzreihe, die in P absolut summierbar ist. Dann ist für festes $\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}^q$ die Potenzreihe $((a_{(\hat{\alpha},\tilde{\alpha})} \hat{x}^{\hat{\alpha}}))_{\hat{\alpha} \in \mathbb{N}^p}$ absolut summierbar in $\hat{P}$.*
Setze

$$\hat{f}_{\tilde{\alpha}}(\hat{x}) = \sum_{\hat{\alpha} \in \mathbb{N}^p} a_{(\hat{\alpha},\tilde{\alpha})} \hat{x}^{\hat{\alpha}}, \tag{4.4.7}$$

dann ist für festes $\hat{x} \in \hat{P}$ die Reihe $((\hat{f}_{\tilde{\alpha}}(\hat{x}) \tilde{x}^{\tilde{\alpha}}))_{\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}^q}$ absolut summierbar in $\tilde{P}$ und

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha = \sum_{\tilde{\alpha}} \hat{f}_{\tilde{\alpha}}(\hat{x}) \tilde{x}^{\tilde{\alpha}} \quad \forall\, x \in P. \tag{4.4.8}$$

Beweis. Definiere für $\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}^q$

$$N_{\tilde{\alpha}} = \{\, (\hat{\alpha}, \tilde{\alpha}) \colon \hat{\alpha} \in \mathbb{N}^p \,\}, \tag{4.4.9}$$

dann ist $(N_{\tilde{\alpha}})_{\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}^q}$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{N}^n$ und wir schließen aus dem Assoziativitätstheorem, Theorem 1.5.13 auf Seite 84, daß die Potenzreihe

$((a_{(\hat\alpha,\tilde\alpha)}\hat x^{\hat\alpha}\tilde x^{\tilde\alpha}))_{\hat\alpha\in\mathbb{N}^p}$ für festes $\tilde\alpha \in \mathbb{N}^q$ und $\tilde x \in \tilde P$ in $\hat P$ absolut summierbar ist, und daß

$$f(x) = \sum_{\tilde\alpha}\sum_{\hat\alpha} a_{(\hat\alpha,\tilde\alpha)}\hat x^{\hat\alpha}\tilde x^{\tilde\alpha} = \sum_{\tilde\alpha} \hat f_{\tilde\alpha}(\hat x)\tilde x^{\tilde\alpha}. \tag{4.4.10}$$

Zum Beweis der absoluten Summierbarkeit von $((a_{(\hat\alpha,\tilde\alpha)}\hat x^{\hat\alpha}))_{\hat\alpha\in\mathbb{N}^p}$ wählen wir ein $\tilde x \in \tilde P$ mit $\tilde x_i \neq 0$, $1 \le i \le q$, und beachten, daß

$$\|a_{(\hat\alpha,\tilde\alpha)}\hat x^{\hat\alpha}\tilde x^{\tilde\alpha}\| = \nu(\tilde x)^{\tilde\alpha}\|a_{(\hat\alpha,\tilde\alpha)}\hat x^{\hat\alpha}\|, \quad \nu(\tilde x)^{\tilde\alpha} > 0. \tag{4.4.11}$$

□

4.4.3. Lemma (Abelsches Lemma)**.** *Wenn die Potenzreihe $((a_\alpha x^\alpha))$ in $x = y$ summierbar ist, wobei $y_i \neq 0\ \forall\ i$, dann ist sie in dem Polyzylinder $P = \{\, x\colon |x_i| < |y_i|\ \forall\ i\,\}$ absolut summierbar. Die Konvergenz ist in allen $Q \Subset P$ gleichmäßig.*

Beweis. Aus der Summierbarkeit von $((a_\alpha y^\alpha))$ schließen wir mittels des Cauchykriteriums, daß eine Konstante c existiert, so daß

$$\|a_\alpha y^\alpha\| = \|a_\alpha\|\nu(y)^\alpha \le c \qquad \forall\ \alpha. \tag{4.4.12}$$

Sei $x \in P$, so folgt

$$\begin{aligned} \|a_\alpha x^\alpha\| &= \|a_\alpha y^\alpha \frac{x^\alpha}{y^\alpha}\| \le c\frac{\nu(x)^\alpha}{\nu(y)^\alpha} \\ &= c\prod_{i=1}^n \big(\tfrac{|x_i|}{|y_i|}\big)^{\alpha_i}. \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

Sei $I \subset \mathbb{N}^n$ endlich, so daß $|\alpha| \le k\ \forall\ \alpha \in I$, dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\in I}\|a_\alpha x^\alpha\| &\le c\sum_{\alpha\in I}\prod_{i=1}^n \big(\tfrac{|x_i|}{|y_i|}\big)^{\alpha_i} \\ &\le c\prod_{i=1}^n\sum_{j=0}^k \big(\tfrac{|x_i|}{|y_i|}\big)^{j} \\ &\le c\prod_{i=1}^n \frac{1}{1-\frac{|x_i|}{|y_i|}}. \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Wenn die x in einer kompakten Teilmenge von P variieren, so daß

$$\max_i \tfrac{|x_i|}{|y_i|} \le q < 1, \tag{4.4.15}$$

so ist die Konvergenz gleichmäßig. □

Aus Theorem 3.4.2 auf Seite 181 schließen wir auch im mehrdimensionalen Fall, daß die Summe einer gleichmäßig absolut summierbaren Potenzreihe sich stetig verhält.

4.4.4. Proposition. *Sei die Potenzreihe $((a_\alpha x^\alpha))$ in P absolut summierbar, so ist ihre Summe*

$$f(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \tag{4.4.16}$$

in P stetig.

Beweis. Nach Lemma 4.4.3 ist die Potenzreihe in P *lokal* gleichmäßig summierbar und somit auch auf kompakten Teilmengen von P, daher ist f stetig. □

Substitution einer Potenzreihe in eine andere.

Sei $((a_\alpha x^\alpha))$ eine absolut summierbare Potenzreihe in $P(0, r_i) \subset \mathbb{K}^n$ mit Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{K}^p$ und $((b_\beta y^\beta))$ eine absolut summierbare Potenzreihe in $Q(0, s_i) \subset \mathbb{K}^p$ mit Koeffizienten $b_\beta \in E$. Seien $f = f(x)$ bzw. $g = g(y)$ die Summen von $((a_\alpha x^\alpha))$ bzw. $((b_\beta y^\beta))$ und nehme an, daß $f(P) \subset Q$. Dann ist die Komposition $h = g \circ f$ wohldefiniert und eine stetige Funktion. Wir wollen zeigen, daß, wenn noch eine kleine Zusatzvoraussetzung erfüllt ist, h ebenfalls als Summe einer Potenzreihe in x darstellbar ist.

Zum Beweis dieses Sachverhalts benutzen wir die Cauchysche Produktformel, Theorem 1.5.14 auf Seite 86, die besagt, daß das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen $((a_i))$, $((b_k))$ mit reellen Gliedern sich darstellen läßt als

$$\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\Big)\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k\Big) = \sum_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i b_k, \tag{4.4.17}$$

und daß die Reihe $((a_i b_k))$ absolut summierbar ist.

Diese Theorem gilt natürlich auch, wenn der Körper nicht $\mathbb{R}$ sondern $\mathbb{C}$ ist, die Indexmenge braucht nicht $\mathbb{N}$ zu sein, sondern nur abzählbar, und per Induktion erweitert man den Satz unmittelbar auf das Produkt endlich vieler absolut summierbarer Reihen.

4.4.5. Theorem (Cauchysche Produktformel)**.** *Seien endlich viele absolut summierbare Reihen* $((a_{i_k}))_{i_k\in I_k}$*,* $1\le k\le p$*, mit Gliedern in* $\mathbb{K}$ *gegeben, dann ist die Reihe* $((\prod_{k=1}^p a_{i_k}))$ *ebenfalls absolut summierbar und es gilt*

$$\prod_{k=1}^{p}\sum_{i_k\in I_k} a_{i_k} = \sum_{(i_1,\dots,i_p)\in\prod_k I_k}\prod_{k=1}^{p} a_{i_k}. \tag{4.4.18}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

4.4.6. Theorem (Substitutionstheorem)**.** *Seien* $((a_\alpha x^\alpha))$*,* $((b_\beta y^\beta))$ *absolut summierbare Potenzreihen bez.* $x\in\bar{P}(0,r_i)\subset\mathbb{K}^n$ *bzw.* $y\in Q(0,s_i)\subset\mathbb{K}^p$ *mit Koeffizienten* $a_\alpha=(a_\alpha^j)\in\mathbb{K}^p$ *bzw.* $b_\beta\in E$*.*[6] *Definiere die Summen*

$$f(x)=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \tag{4.4.19}$$

$$g(y)=\sum_\beta b_\beta y^\beta \tag{4.4.20}$$

und

$$\varphi^j(x)=\sum_\alpha |a_\alpha^j| x^\alpha \tag{4.4.21}$$

und nehme an, daß

$$\varphi^j(r_1,\dots,r_n)<s_j \qquad \forall\, 1\le j\le p. \tag{4.4.22}$$

Dann gilt $f(\bar{P})\subset Q$ *und die Komposition* $h=g\circ f$ *ist als Summe einer absolut summierbaren Potenzreihe* $((c_\alpha x^\alpha))$*,* $x\in\bar{P}$*, darstellbar mit Koeffizienten* $c_\alpha\in E$*.*

Beweis. Die Behauptung $f(\bar{P})\subset Q$ folgt sofort aus (4.4.22) und der Dreiecksungleichung, so daß als eigentlicher Beweis nur der, der zweiten Aussage übrig bleibt.

Wir werden den Beweis in mehreren Schritten führen.

1. *Schritt*: Bei der Komposition $g\circ f$ ersetzen wir in den Glieder der Reihe $((b_\beta y^\beta))$ y durch $f(x)$ und müssen dann versuchen, die Terme

$$y^\beta=\prod_{j=1}^{p}(y^j)^{\beta_j}, \qquad \beta=(\beta_j), \tag{4.4.23}$$

als unendliche Summe darzustellen.

---

[6]Beachte, daß x sich in einem *abgeschlossenen* Polyzylinder $\bar{P}$ bewegt.

Betrachten wir zunächst einen beliebigen Faktor in dem Produkt (4.4.23). Nach Theorem 4.4.5 ist für festes j $(y^j)^{\beta_j}$ die Summe einer absolut summierbaren Reihe mit Gliedern

$$a^j_{\alpha(1)} x^{\alpha(1)} \cdot a^j_{\alpha(2)} x^{\alpha(2)} \cdots a^j_{\alpha(\beta_j)} x^{\alpha(\beta_j)}, \tag{4.4.24}$$

wobei $\alpha(i) \in \mathbb{N}^n$, $1 \le i \le \beta_j$, d.h.

$$(y^j)^{\beta_j} = \sum_{(\alpha(1),\dots,\alpha(\beta_j)) \in \mathbb{N}^n \times \cdots \times \mathbb{N}^n} \prod_{i=1}^{\beta_j} a^j_{\alpha(i)} x^{\alpha(i)}. \tag{4.4.25}$$

2. *Schritt*: Da die p Reihen in (4.4.25) absolut summierbar sind, können wir die Cauchysche Produktformel noch einmal anwenden, um y^β in (4.4.23) auszudrücken: y^β ist danach die Summe einer absolut summierbaren Reihe mit Gliedern der Form

$$\prod_{j=1}^{p} \prod_{i=1}^{\beta_j} a^j_{\alpha(i,j)} x^{\alpha(i,j)}, \tag{4.4.26}$$

wobei $\alpha(i,j) \in \mathbb{N}^n$; beachte, daß die Multiindizes α jetzt von zwei Parametern anhängen, da wir die Cauchysche Produktformel zweimal angewandt haben.

Bezeichnen wir die Matrix der Multiindizes $\alpha(i,j)$ mit μ, so können wir die Reihenglieder in (4.4.26) mit einem Index μ aus der abzählbaren Menge

$$I_\beta = \{\, \mu = (\alpha(i,j)) \colon \alpha(i,j) \in \mathbb{N}^n,\ 1 \le j \le p,\ 1 \le i \le \beta_j \,\} \tag{4.4.27}$$

indizieren. Das allgemeine Reihenglied in (4.4.26) kürzen wir ab mit $\eta^\beta_\mu(x)$, wenn $\mu = (\alpha(i,j))$.

Es gilt dann

$$|\eta^\beta_\mu(x)| = \prod_{j=1}^{p} \prod_{i=1}^{\beta_j} |a^j_{\alpha(i,j)}|\, \nu(x)^{\alpha(i,j)}, \tag{4.4.28}$$

$$y^\beta = f(x)^\beta = \sum_{\mu \in I_\beta} \eta^\beta_\mu(x) \tag{4.4.29}$$

nach der Cauchyschen Produktformel, sowie

$$\varphi(\nu(x))^\beta = \sum_{\mu \in I_\beta} |\eta^\beta_\mu(x)|, \quad \varphi = (\varphi^j), \tag{4.4.30}$$

nach Definition von $\varphi = (\varphi^j)$.

3. *Schritt*: Setze $\Lambda_\beta = \{ (\beta, \mu) \colon \mu \in I_\beta \}$ und $\Lambda = \bigcup_{\beta \in \mathbb{N}^p} \Lambda_\beta$. Wir behaupten nun, daß die Reihe $((b_\beta \eta_\mu^\beta(x)))_{(\beta,\mu)\in\Lambda}$ für $x \in \bar{P}$ gleichmäßig absolut summierbar ist.

Sei $J \subset \Lambda$ endlich, dann müssen wir zeigen, daß zu festem $x \in \bar{P}$

$$\sum_{(\beta,\mu)\in J} \|b_\beta\| \, |\eta_\mu^\beta(x)| \tag{4.4.31}$$

sich gleichmäßig nach oben abschätzen läßt unabhängig von J und $x \in \bar{P}$.

Sei $N_0 \subset \mathbb{N}^p$ eine endliche Menge, die alle Multiindizes $\beta \in \mathrm{pr}_1(J)$ enthält, dann folgt aus (4.4.30)

$$\begin{aligned}
\sum_{(\beta,\mu)\in J} \|b_\beta\| \, |\eta_\mu^\beta(x)| &\le \sum_{\beta\in N_0} \|b_\beta\| \sum_{\mu\in I_\beta} |\eta_\mu^\beta(x)| \\
&= \sum_{\beta\in N_0} \|b_\beta\| \, \varphi(\nu(x))^\beta \\
&\le \sum_{\beta\in N_0} \|b_\beta\| \, \varphi(r_1,\dots,r_n)^\beta \\
&\le \sum_{\beta\in \mathbb{N}^p} \|b_\beta\| \, \varphi(r_1,\dots,r_n)^\beta < \infty,
\end{aligned} \tag{4.4.32}$$

denn $\varphi(r_1,\dots,r_n) \in Q$ nach Voraussetzung (4.4.22) und die Reihe $((b_\beta y^\beta))$ ist in Q absolut summierbar.

4. *Schritt*: Wir wissen nun, daß

$$h(x) = g(f(x)) = \sum_{(\beta,\mu)\in\Lambda} b_\beta \eta_\mu^\beta(x) \quad \forall\, x \in \bar{P}, \tag{4.4.33}$$

und daß die Reihe absolut summierbar ist.

Mit Hilfe des Assoziativitätstheorems, Theorem 1.5.13 auf Seite 84, werden wir die Summe der Reihe als Summe einer Potenzreihe in x schreiben.

Jedes $\eta_\mu^\beta(x)$ ist ein Monom in x, d.h.

$$\eta_\mu^\beta(x) = c_\mu^\beta x^\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{N}^n, \tag{4.4.34}$$

vgl. (4.4.26).

Wir zerlegen daher Λ in h.a. viele disjunkte Teilmengen J_λ gemäß

$$J_\lambda = \{ (\beta,\mu) \in \Lambda \colon \text{Exponent von } \eta_\mu^\beta(x) = \lambda \}, \ \lambda \in \mathbb{N}^n, \tag{4.4.35}$$

und definieren

$$c_\lambda = \begin{cases} \sum_{(\beta,\mu)\in J_\lambda} b_\beta \eta_\mu^\beta(x)(x^\lambda)^{-1}, & J_\lambda \neq \emptyset \ \wedge \ x^\lambda \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.4.36}$$

Dann folgt aus dem Assoziativitätstheorem

$$\sum_{(\beta,\mu)\in\Lambda} b_\beta \eta_\mu^\beta(x) = \sum_{\lambda\in\mathbb{N}^n} c_\lambda x^\lambda, \tag{4.4.37}$$

d.h. h läßt sich in $\bar{P}$ als Summe einer gleichmäßig absolut summierbaren Potenzreihe $((c_\lambda x^\lambda))$ darstellen. □

4.4.7. Bemerkung. Ersetzen wir in Theorem 4.4.6 die zusätzliche Bedingung (4.4.22) durch die schwächere Annahme

$$f(0) \in Q(0, s_i), \tag{4.4.38}$$

so bedeutet das

$$|f^j(0)| = |a_0^j| = |\varphi^j(0)| < s_j, \quad \forall\, 1 \leq j \leq p. \tag{4.4.39}$$

Daher folgt aus Stetigkeitsgründen, daß $0 < \rho_i < r_i$ existieren mit

$$\varphi^j(\rho_1, \ldots, \rho_n) < s_j \qquad \forall\, 1 \leq j \leq p, \tag{4.4.40}$$

d.h. die Voraussetzungen des Theorems sind dann in einem kleineren Polyzylinder $\bar{P}(0, \rho_i)$ erfüllt.

4.4.8. Theorem (Isolierheit der Nullstellen)**.** *Sei $((a_n x^n))$ eine absolut summierbare Potenzreihe in einer Variablen $x \in B_r(0) \subset \mathbb{K}$, $a_n \in E$, und sei $f(x) = \sum_n a_n x^n$. Dann existiert $0 < \rho < r$, so daß*

$$f(x) \neq 0 \qquad \forall\, 0 < |x| < \rho, \tag{4.4.41}$$

es sei denn $a_n = 0 \;\forall\, n$.

Beweis. Sei $M = \{\, n \in \mathbb{N} \colon a_n \neq 0 \,\} \neq \emptyset$ und sei m die kleinste Zahl in M, dann folgt

$$f(x) = x^m(a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^{n-m}). \tag{4.4.42}$$

Aus Stetigkeitsgründen existiert dann $0 < \rho < r$, so daß

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|a_n\|\, |x|^{n-m} < \frac{\|a_m\|}{2} \quad \forall\, |x| < \rho. \tag{4.4.43}$$

Damit ist alles bewiesen. □

Ein entsprechendes Resultat gibt es nicht für Potenzreihen, die von mehreren Variablen abhängen. Betrachte z.B. das Polynom $f(x, y) = x$ in $\mathbb{R}^2$; es verschwindet auf der Geraden $\{x = 0\}$.

Stattdessen gilt

4.4.9. Theorem (Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung)**.** *Seien* $((a_\alpha x^\alpha))$, $((b_\alpha x^\alpha))$ *absolut summierbare Potenzreihen in* $P = P(0, r_i) \subset \mathbb{K}^n$ *und* f, g *ihre Summen. Dann gilt*

$$f = g \quad \text{in} \quad P \quad \Longrightarrow \quad a_\alpha = b_\alpha \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{4.4.44}$$

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $b_\alpha = 0\ \forall\ \alpha$, sonst bilden wir die Differenz. Sei also $f \equiv 0$ in P. Dann werden wir per Induktion nach n beweisen, daß $a_\alpha = 0\ \forall\ \alpha$.

Für $n = 1$ ist die Behauptung bereits bewiesen, Theorem 4.4.8. Sei daher $n \geq 2$ und die Behauptung schon für $n - 1$ bewiesen.

Wir spalten $\mathbb{K}^n$ auf, $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n-1} \times \mathbb{K}$, schreiben $x = (\hat{x}, x_n)$ und wenden Lemma 4.4.2 an: Danach ist f darstellbar in der Form

$$f(x) = \sum_k \hat{f}_k(\hat{x}) x_n^k, \tag{4.4.45}$$

wobei die Summe absolut konvergiert und die Koeffizienten $\hat{f}_k$ sich nach (4.4.7) berechnen

$$\hat{f}_k(\hat{x}) = \sum_{\hat{\alpha} \in \mathbb{N}^{n-1}} a_{(\hat{\alpha}, k)} \hat{x}^{\hat{\alpha}}; \tag{4.4.46}$$

die Reihe ist in $\hat{P}(0, r_i) \subset \mathbb{K}^{n-1}$ absolut summierbar.

Ist nun $f \equiv 0$, so müssen die $\hat{f}_k(\hat{x})$ zu festem aber beliebigen $\hat{x} \in \hat{P}(0, r_i)$ alle verschwinden, woraus nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$a_{(\hat{\alpha}, k)} = 0 \qquad \forall\ (\hat{\alpha}, k) \in \mathbb{N}^n. \tag{4.4.47}$$

$\square$

Analytische Funktionen

4.4.10. Definition. (i) Sei $x_0 \in \mathbb{K}^n$ ein fester Punkt. Eine Potenzreihe $((a_\alpha (x - x_0)^\alpha))$ in den Variablen $(x - x_0)$ bezeichnen wir auch als Potenzreihe um x_0.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ offen und E ein Banachraum über $\mathbb{K}$. Eine Funktion $f : \Omega \to E$ nennen wir *analytisch*, wenn es zu jedem $x_0 \in \Omega$ einen Polyzylinder

$P(x_0, r_i) \subset \Omega$ gibt, so daß sich f als Summe einer in P absolut summierbaren Potenzreihe $((a_\alpha(x-x_0)^\alpha))$ schreiben läßt

$$f(x) = \sum_\alpha a_\alpha (x-x_0)^\alpha, \qquad x \in P(x_0, r_i). \tag{4.4.48}$$

Wir sagen auch, f lasse sich *lokal* als Summe einer absolut summierbaren Potenzreihen darstellen.

Die analytischen Funktionen von Ω nach E bilden einen Vektorraum über $\mathbb{K}$, wir bezeichnen ihn mit $C^\omega(\Omega, E)$.

4.4.11. Beispiele. (i) Sei $Q = Q(0, s_i) \subset \mathbb{K}^n$ und $g = \sum_\beta b_\beta y^\beta$ die Summe einer in Q absolut summierbaren Potenzreihe, so ist $g \in C^\omega(Q, E)$.

(ii) Die Funktion $f(x) = x^{-1}$ ist in $\mathbb{K}^*$ analytisch.

Beweis. „(i)" Sei $y_0 \in Q$ beliebig; wähle $0 < r_i < s_i - |y_0^i|$, $1 \leq i \leq n$, dann bildet die Abbildung $f(x) = x + y_0$ den abgeschlossenen Polyzylinder $\bar{P} = \bar{P}(0, r_i) \subset \mathbb{K}^n$ nach $Q(0, s_i)$ ab.

Wir können f als Summe einer Potenzreihe deuten; bezeichnen wir mit $a_i = (a_i^j) = (\delta_i^j)$, $1 \leq i \leq n$, die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{K}^n$, so ist

$$f(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i. \tag{4.4.49}$$

Die Voraussetzungen von Theorem 4.4.6 sind erfüllt, denn die Abbildung

$$\varphi^j(x) = |y_0^j| + \sum_{i=1}^n |a_i^j| x_i = |y_0^j| + x_j \tag{4.4.50}$$

genügt der Bedingung (4.4.22)

$$\varphi^j(r_1, \ldots, r_n) = |y_0^j| + r_j < s_j \quad \forall\, 1 \leq j \leq n. \tag{4.4.51}$$

Die Komposition $g \circ f$ ist daher die Summe einer absolut summierbaren Potenzreihe in $x = y - y_0$.

„(ii)" Sei $0 \neq x_0 \in \mathbb{K}$, dann ist

$$x = x_0 + (x - x_0) = x_0(1 + x_0^{-1}(x - x_0)), \tag{4.4.52}$$

und somit

$$\frac{1}{x} = \frac{x_0^{-1}}{1 + x_0^{-1}(x - x_0)}, \tag{4.4.53}$$

d.h. f läßt sich als Summe einer konvergenten geometrischen Reihe um x_0 darstellen

$$f(x) = x_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_0^{-n} (x - x_0)^n \quad \forall\, |x - x_0| < |x_0|. \tag{4.4.54}$$

□

4.4.12. Proposition. *Seien $\varOmega \subset \mathbb{K}^n$, $\widetilde{\varOmega} \subset \mathbb{K}^p$ offene Mengen, $f \in C^\omega(\varOmega, \mathbb{K}^p)$, $g \in C^\omega(\widetilde{\varOmega}, E)$ analytische Funktionen und gelte $f(\varOmega) \subset \widetilde{\varOmega}$. Dann ist die Komposition $h = g \circ f \in C^\omega(\varOmega, E)$.*

Beweis. Folgt aus Theorem 4.4.6 und Bemerkung 4.4.7. □

4.4.13. Proposition. *Sei $\varOmega \subset \mathbb{K}$ offen und $f \in C^\omega(\varOmega, E)$, dann ist $f \in C^\infty(\varOmega, E)$ und f läßt sich lokal durch seine Taylorreihe ausdrücken, d.h. zu jedem $x_0 \in \varOmega$ existiert eine Kugel $B_\rho(x_0) \subset \varOmega$, so daß*

$$f(x) = T(f, x_0)(x) \qquad \forall\, x \in B_\rho(x_0). \tag{4.4.55}$$

Beweis. Sei $x_0 \in \varOmega$, dann existiert $\rho > 0$, so daß f sich in $B_\rho(x_0)$ als Summe einer absolut konvergenten Potenzreihe $((a_n(x - x_0)^n))$ darstellen läßt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{4.4.56}$$

Wie in Proposition 3.4.9 auf Seite 184 bewiesen wurde, ist die rechte Seite unendlich oft differenzierbar, und somit gilt $f \in C^\infty(\varOmega, E)$.

Es bleibt zu zeigen, daß

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \qquad \forall\, n; \tag{4.4.57}$$

doch dies folgt sofort per Induktion und sukzessiver Differentiation von (4.4.56). □

4.4.14. Definition (Stammfunktion)**.** Sei $\varOmega \subset \mathbb{K}$ und $f : \varOmega \to E$. Eine differenzierbare Funktion $\varphi : \varOmega \to E$ heißt *Stammfunktion* von f in $\varOmega$, falls

$$\varphi'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in \varOmega. \tag{4.4.58}$$

4.4.15. Bemerkung. Ist $\varOmega$ zusammenhängend, so unterscheiden sich zwei Stammfunktionen von f in $\varOmega$ nur durch eine additive Konstante.

Beweis. Folgt aus Corollar 3.2.10 auf Seite 172. □

4.4.16. Proposition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ und $f \in C^\omega(\Omega, E)$, dann besitzt f lokal immer eine Stammfunktion, die zudem noch analytisch ist, d.h. zu jedem $x_0 \in \Omega$ existiert $B_\rho(x_0) \subset \Omega$ und $\varphi \in C^\omega(B_\rho(x_0), E)$, so daß*

$$\varphi'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in B_\rho(x_0). \tag{4.4.59}$$

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ und f als Summe einer absolut konvergenten Potenzreihe in $B_\rho(x_0)$ dargestellt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \forall\, x \in B_\rho(x_0), \tag{4.4.60}$$

so definieren wir

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n+1} a_n (x - x_0)^{n+1}. \tag{4.4.61}$$

Da die Reihe $((\frac{1}{n+1} a_n (x - x_0)^n))$ in $B_\rho(x_0)$ absolut konvergiert, ist $\varphi \in C^\omega(B_\rho(x_0), E)$ und offensichtlich Stammfunktion von f in $B_\rho(x_0)$, vgl. Proposition 3.4.9. □

Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung

4.4.17. Wenn zwei unendlich oft differenzierbare Funktionen f, g in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{K}$ definiert sind und in einer kleinen Kugel $B_\rho(x_0) \subset \Omega$ übereinstimmen, so können wir nicht schließen, daß dann $f = g$ in Ω gelten muß, wie das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \tag{4.4.62}$$

zeigt. Es ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (Übungsaufgabe).

Im Falle von analytischen Funktionen ist dies anders, wie wir sehen werden.

4.4.18. Lemma. *Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und $\varphi \in C^\omega(I, E)$. Nehme an, daß φ auf einer Kugel $B_\rho(t_0) \subset I$ verschwindet, dann ist $\varphi \equiv 0$.*

Beweis. Wir werden nur zeigen, daß f auf $[t_0, b)$ verschwindet; der Beweis, daß $\varphi|_{(a,t_0]} = 0$ ist völlig analog.

Definiere

$$\Lambda = \{\, t \in (t_0, b) \colon \varphi|_{[t_0,t]} = 0 \,\}. \tag{4.4.63}$$

Dann ist $\Lambda \neq \emptyset$, da $\varphi_{|_{B_\rho(t_0)}} = 0$.

Λ ist in (t_0, b) abgeschlossen, da φ stetig, und wir werden mit Hilfe von Theorem 4.4.8 zeigen, daß Λ auch offen ist, und somit mit (t_0, b) übereinstimmt.

Sei $t_1 \in \Lambda$. Stelle φ um t_1 als Summe einer Potenzreihe dar

$$\varphi(t) = \sum_n a_n (t - t_1)^n \quad \forall\, t \in B_\epsilon(t_1). \tag{4.4.64}$$

Wenn die Koeffizienten nicht alle verschwinden, dann können wir ϵ so klein wählen, daß

$$\varphi(t) \neq 0 \qquad \forall\, t_1 - \epsilon < t < t_1, \tag{4.4.65}$$

im Widerspruch zur Definition von Λ. Daher ist $\varphi_{|_{B_\epsilon(t_1)}} = 0$ und Λ offen. $\square$

4.4.19. Theorem (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ ein Gebiet und $f, g \in C^\omega(\Omega, E)$ zwei analytische Funktionen, die in einer Kugel $B_\rho(x_0) \subset \Omega$ übereinstimmen, dann gilt $f = g$ in Ω.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $g \equiv 0$. Sei Λ die Menge aller offenen Teilmengen $G \subset \Omega$ mit der Eigenschaft $f_{|_G} = 0$.

$\Lambda \neq \emptyset$, da $B_\rho(x_0) \in \Lambda$, folglich existiert eine größte offene Menge $G_0 \subset \Omega$, so daß $f_{|_{G_0}} = 0$, nämlich,

$$G_0 = \bigcup_{G \in \Lambda} G. \tag{4.4.66}$$

Wir werden zeigen, daß G_0 in Ω auch abgeschlossen ist und somit $G_0 = \Omega$, da Ω zusammenhängend.

Sei $y_k \in G_0$ eine nach $y_0 \in \Omega$ konvergierende Folge und $B_r(y_0) \subset \Omega$ eine beliebige Kugel. Wir behaupten, daß $B_r(y_0) \subset G_0$, insbesondere also $y_0 \in G_0$.

Sei $y_k \in B_r(y_0)$ und $z \in B_r(y_0)$ eine beliebiger Punkt. Die konvexe Kombination

$$x_t = tz + (1 - t) y_k, \qquad 0 \le t \le 1, \tag{4.4.67}$$

liegt dann in $B_r(y_0)$, und wegen der Offenheit von $B_r(y_0)$ gilt dies auch für x_t, $t \in I = (-\epsilon, 1 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$.

Betrachte dann die analytische Funktion $\varphi \in C^\omega(I, E)$

$$\varphi(t) = f(x_t), \qquad t \in I, \tag{4.4.68}$$

vgl. Proposition 4.4.12 und Aufgabe 6 von Aufgaben 4.4.20; sie verschwindet auf einer offenen Teilmenge von I, da $x_0 \in B_r(y_0) \cap G_0$, und ist somit identisch 0 nach Lemma 4.4.18, d.h. es ist $f(x_1) = f(z) = 0$ oder, gleichbedeutend damit, $B_r(y_0) \subset G_0$. $\square$

4.4.20. Aufgaben.

1 Man beweise Theorem 4.4.5.

2 Man zeige, daß die Funktion f in (4.4.62) unendlich oft differenzierbar ist.

3 Die Stammfunktion einer analytischen Funktion $f \in C^\omega(\Omega, E)$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, ist ebenfalls analytisch.

4 Der komplexe Logarithmus ist in $\Sigma = \{\, z \in \mathbb{C}^* : \arg z \neq \pi \,\}$ analytisch.

5 Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet und $f \in C^\omega(\Omega, E)$. Nehme an, daß f auf einer unendlichen Menge $\Lambda \subset \Omega$ verschwindet, und daß die Menge der Häufungspunkte von Λ in Ω nichtleer ist. Dann ist $f \equiv 0$.

6 Identifizieren wir $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$, so können wir jede komplex analytische Funktion $f \in C^\omega(\Omega, E)$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, auch als reell analytische Funktion auffassen, wenn wir Ω als Teilmenge von $\mathbb{R}^{2n}$ ansehen und beachten, daß E auch ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.
Man mache sich das zunächst an dem komplexen Polynom $f(z) = z^2$ klar.

KAPITEL 5

Integration in einer Variablen

Die Integrationstheorie entwickelte sich aus dem Bemühen, den Inhalt von Flächen zu berechnen, deren Rand kein Polygonzug ist; dies führte zum *Riemannschen* Integral für reelle Funktionen. Eine Verallgemeinerung dieser Integrationstheorie auf vektorwertige Funktionen, d.h. Funktionen, die ein Intervall in einen Banachraum abbilden, wird meist vermieden und stattdessen das sog. *Regelintegral* eingeführt, vgl. das Buch von Dieudonné, doch halten wir diesen Schritt für unnötig und wir werden das Riemannsche Integral von Anfang an für Banachraum-wertige Funktionen definieren; dies ist nicht schwieriger als wenn man nur reellwertige Funktionen betrachtet.

Das Riemannsche Integral und der damit zusammenhängende Inhaltsbegriff haben jedoch ihre Mängel, z.B. ist der punktweise Limes von Riemann integrablen Funktionen i.allg. nicht mehr Riemann integrabel und der Riemannsche Inhalt ist nicht *σ-additiv*. Dies führte zu einer Erweiterung der Riemannschen Integrationstheorie, zu der sog. *Lebesgueschen Integrationstheorie*, die wir im zweiten Band behandeln werden.

5.1. Das Riemannsche Integral

5.1.1. Sei f eine reelle, nicht-negative und beschränkte Funktion, die auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ definiert ist. Wir werden versuchen den Flächeninhalt der Menge

$$(5.1.1) \qquad Q(f) = \{\, (x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon a \le x \le b,\ 0 \le t \le f(x) \,\}$$

zu berechnen.

Hierzu benutzen wir, daß der Flächeninhalt eines Rechtecks gleich dem Produkt der Seitenlängen ist.

Betrachten wir eine Zerlegung von I, eine sog. *Partition* $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, mit n Teilintervallen $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $0 \le i \le n-1$.

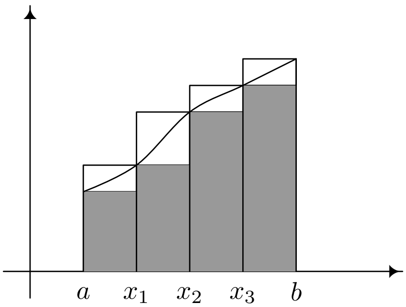
Setze $m_i = \inf_{I_i} f$, $M_i = \sup_{I_i} f$, $Q_i = I_i \times [0, m_i]$ und $\widetilde{Q}_i = I_i \times [0, M_i]$. Dann gilt

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} Q_i \subset Q \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} \widetilde{Q}_i, \tag{5.1.2}$$

mit paarweise disjunkten Rechtecken Q_i bzw. $\widetilde{Q}_i$.[1] Daher gilt für jeden sinnvollen Inhaltsbegriff

$$\sum_{i=0}^{n-1} |Q_i| \equiv \sum_{i=0}^{n-1} m_i |I_i| \leq |Q| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\widetilde{Q}_i| \equiv \sum_{i=0}^{n-1} M_i |I_i|. \tag{5.1.3}$$

Hierbei bezeichnet $|Q|$ den Flächeninhalt von Q, vorausgesetzt, daß ein solcher Flächeninhalt sich definieren läßt.



Wenn sich nun zeigen läßt, daß bei immer feiner werdender Unterteilung von I, d.h., wenn die Länge der Teilintervalle nach 0 konvergiert, die linke und die rechte Seite von (5.1.3) nach einem gemeinsamen Limes konvergieren, dann bezeichnen wir diesen Limes als den Flächeninhalt von Q.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Limes ist, daß zu $\epsilon > 0$ eine Partition $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ existieren muß, so daß

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)|I_i| < \epsilon. \tag{5.1.4}$$

[1] Genau genommen sind die Rechtecke nicht paarweise disjunkt, da sie gemeinsame Seiten haben können, doch tragen die Seiten zum Flächeninhalt nichts bei. Wir hätten daher auch eine wirklich disjunkte Zerlegung wählen können, wenn wir statt der abgeschlossenen Intervalle I_i halboffene Intervalle $[x_i, x_{i+1})$ betrachtet hätten.

Diese Bedingung können wir auch umformulieren zu

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_f(I_i)|I_i| < \epsilon, \tag{5.1.5}$$

wobei $\omega_f(I_i)$ die Oszillation von f in I_i ist, vgl. Definition 3.4.4 auf Seite 182.

Das Kriterium (5.1.5) läßt sich natürlich auch für Banachraum-wertige Funktionen definieren und wir werden sehen, daß diese Bedingung, das sog. *Riemannsche Integrabilitätskriterium*, hinreichend und notwendig ist, um das Riemannsche Integral einer beschränkten Funktion über einem kompakten Intervall zu definieren.

In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit E einen reellen Banachraum, es sei denn, es ist ausdrücklich etwas anderes vermerkt.

5.1.2. Definition (Partition)**.** (i) Eine *Partition* eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ ist eine Zerlegung in endlich viele Teilintervalle. Ordnen wir die Endpunkte der Teilintervalle in der Form $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, so wollen wir eine Partition P durch $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ kennzeichnen mit Teilintervallen $I_i = [x_i, x_{i+1}]$.

(ii) Die *Feinheit* einer Partition, in Zeichen, $\eta(P)$, ist definiert durch

$$\eta(P) = \sup_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i| \tag{5.1.6}$$

(iii) Eine Partition P' heißt *feiner* als P und P *gröber* als P', falls jeder Teilpunkt von P' auch Teilpunkt von P ist. Wir schreiben hierfür $P \prec P'$.

(iv) Seien P_1, P_2 zwei Partitionen, so existiert eine gemeinsame *Verfeinerung*, in Zeichen, $P_1 \vee P_2$, nämlich die Partition, deren Endpunkten aus der Vereinigung der Endpunkte von P_1 und P_2 besteht.

5.1.3. Lemma. *Seien P_1 und P_2 Partitionen von I, so gilt*

$$P_1 \prec P_2 \quad \Longrightarrow \quad \eta(P_2) \le \eta(P_1). \tag{5.1.7}$$

Beweis. Klar.

5.1.4. Definition. Sei E ein Banachraum, $f : I = [a, b] \to E$ beschränkt und $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von I.

(i) Wir definieren dann

$$\sigma(f, I) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_f(I_i)|I_i|. \tag{5.1.8}$$

(ii) Seien $\xi_i \in I_i$ beliebige Zwischenpunkte und $Z = \{\xi_i : 0 \leq i \leq n-1\}$, so definieren wir als sog. *Riemannsche Summe*, in Zeichen, $S(f,P,Z)$ oder auch nur $S(P,Z)$

$$S(f,P,Z) \equiv S(P,Z) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)|I_i|. \tag{5.1.9}$$

5.1.5. Lemma. *Sei $f : I \to E$ beschränkt, P, P' Partitionen von I, $P \prec P'$, und habe P' λ Teilpunkte mehr als P, so gilt*

$$\sigma(f,P') \leq \sigma(f,P) \tag{5.1.10}$$

und

$$|\sigma(f,P') - \sigma(f,P)| \leq 2\lambda\|f\|_\infty \eta(P). \tag{5.1.11}$$

Beweis. „(5.1.10)“ Seien I_i, $0 \leq i \leq n-1$, die Teilintervalle von P und I'_j die von P'. Die Teilintervalle I_i setzen sich dann aus Teilintervallen I'_j zusammen, so daß

$$\begin{aligned}\sum_j \omega_f(I'_j)|I'_j| &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{I'_j \subset I_i} \omega_f(I'_j)|I'_j| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_f(I_i) \sum_{I'_j \subset I_i} |I'_j| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega_f(I_i)|I_i|.\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

„(5.1.11)“ Es genügt, den Beweis für $\lambda = 1$ zu führen; der allgemeine Fall folgt dann per Induktion unter Benutzung der Dreiecksungleichung.

Verwenden wir die Bezeichnungen von eben, so existiert ein Teilintervall, sagen wir I_1, das sich aus zwei Teilintervallen I'_1, I'_2 zusammensetzt; die anderen Teilintervalle stimmen überein. Es gilt daher

$$\begin{aligned}\sigma(f,P) - \sigma(f,P') &= \omega_f(I_1)|I_1| - \omega_f(I'_1)|I'_1| - \omega_f(I'_2)|I'_2| \\ &\leq 2\|f\|_\infty |I_1| \leq 2\|f\|_\infty \eta(P).\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

□

5.1.6. Lemma. *Sei $f : I = [a, b] \to E$ beschränkt und P, P' zwei Partitionen von I mit Zwischenpunkten Z bzw. Z'. Dann gilt*

$$\|S(P, Z) - S(P', Z')\| \leq \sigma(f, P), \tag{5.1.14}$$

falls $P \prec P'$.

Für beliebige Partitionen P, P' von I erhalten wir die Abschätzung

$$\|S(P, Z) - S(P', Z')\| \leq \sigma(f, P) + \sigma(f, P') \tag{5.1.15}$$

Beweis. „(5.1.14)“ Seien I_i, $0 \leq i \leq n-1$, die Teilintervalle von P und I'_j die von P'. Betrachte ein Teilintervall I_i und schreibe es als Vereinigung von Teilintervallen I'_j, dann ist

$$f(\xi_i)|I_i| = \sum_{I'_j \subset I_i} f(\xi_i)|I'_j| \tag{5.1.16}$$

und

$$\|f(\xi_i)|I_i| - \sum_{I'_j \subset I_i} f(\xi'_j)|I'_j|\| \leq \omega_f(I_i)|I_i|. \tag{5.1.17}$$

Daraus folgt dann die Behauptung, da

$$S(P, Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{I'_j \subset I_i} f(\xi_i)|I'_j| \tag{5.1.18}$$

und

$$S(P', Z') = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{I'_j \subset I_i} f(\xi'_j)|I'_j|. \tag{5.1.19}$$

„(5.1.15)“ Folgt aus (5.1.14), indem wir eine gemeinsame Verfeinerung $P^* = P \vee P'$ von P, P' betrachten mit beliebigen Zwischenpunkten Z^* und abschätzen

$$\begin{aligned} \|S(P, Z) - S(P', Z')\| \leq{}& \|S(P, Z) - S(P^*, Z^*)\| \\ &+ \|S(P^*, Z^*) - S(P', Z')\|, \end{aligned} \tag{5.1.20}$$

und dann (5.1.14) anwenden. □

5.1.7. Lemma. *Sei $f : I = [a,b] \to E$ beschränkt, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{P}{\exists}\quad \sigma(f,P) < \epsilon \tag{5.1.21}$$

und

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{P}{\forall}\quad \eta(P) < \delta \implies \sigma(f,P) < \epsilon. \tag{5.1.22}$$

Beweis. „(5.1.21) $\implies$ (5.1.22)" Sei $\epsilon > 0$ und P eine Partition mit $\sigma(f,P) < \epsilon$. Nehme an, P habe λ Teilpunkte und es gelte $0 \neq \|f\|_\infty$. Wähle dann

$$\delta = \frac{\epsilon}{4\lambda\|f\|_\infty}. \tag{5.1.23}$$

Sei nun P^* eine Partition von I mit $\eta(P^*) < \delta$ und $P' = P \vee P^*$ eine gemeinsame Verfeinerung, dann schließen wir aus Lemma 5.1.5

$$\begin{aligned}\sigma(f,P^*) &\le \sigma(f,P') + |\sigma(f,P') - \sigma(f,P^*)| \\ &\le \sigma(f,P) + 2\lambda\|f\|_\infty \eta(P^*) \\ &\le \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.\end{aligned} \tag{5.1.24}$$

„(5.1.22) $\implies$ (5.1.21)" Klar. □

Wir können jetzt Riemann integrable Funktionen definieren.

5.1.8. Definition (Riemannsches Integrabilitätskriterium)**.** Sei $f : I = [a,b] \to E$ beschränkt. Wir nennen f *Riemann integrabel*, wenn das sog. *Riemannsche Integrabilitätskriterium* erfüllt ist, d.h., wenn die Bedingung (5.1.21) oder, äquivalent hierzu, (5.1.22) erfüllt ist.

5.1.9. Theorem (Das Riemannsche Integral)**.** *Sei $f : I = [a,b] \to E$ Riemann integrabel und P_k eine Folge von Partitionen von I, deren Feinheit $\eta(P_k)$ nach 0 konvergiert, mit zugehörigen Zwischenpunkten Z_k, dann konvergiert $S(P_k, Z_k)$. Wir setzen*

$$\int_a^b f \equiv \int_a^b f(x)\,dx = \lim S(P_k, Z_k) \tag{5.1.25}$$

und nennen den Limes das bestimmte Riemannsche Integral von f über I.

Ferner gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle Partitionen P mit $\eta(P) < \delta$ und für beliebige Zwischenpunkte Z folgt

$$\left\| \int_a^b f - S(P,Z) \right\| < \epsilon. \tag{5.1.26}$$

Beweis. (i) Sei P_k ein Folge von Partitionen mit $\eta(P_k) \to 0$ und Z_k eine Folge von Zwischenpunkten. Wähle, zu vorgegebenem $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, so daß

$$\sigma(f,P) < \epsilon \qquad \forall\, P \text{ mit } \eta(P) < \delta. \tag{5.1.27}$$

Aus Lemma 5.1.6 schließen wir dann

$$\begin{aligned} \|S(P_n,Z_n) - S(P_m,Z_m)\| &\le \sigma(f,P_n) + \sigma(f,P_m) \\ &\le \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \end{aligned} \tag{5.1.28}$$

für alle n, m mit $\eta(P_n) < \delta$ und $\eta(P_m) < \delta$; dies gilt aber f.f.a. n. Daher ist $S(P_n, Z_n)$ eine C.F. und konvergiert in E.

(ii) Die weitere Behauptung (5.1.26) folgt ebenfalls aus Lemma 5.1.6 angewandt auf P_k und eine beliebige Partition P mit $\eta(P) < \delta$ und Zwischenpunkten Z

$$\|S(P_k,Z_k) - S(P,Z)\| \le \sigma(f,P_k) + \sigma(f,P). \tag{5.1.29}$$

□

5.2. Integrationsregeln

5.2.1. Proposition. *Sei $f : I = [a,b] \to E$ Riemann integrabel, so ist f auch über jedem Teilintervall $[a',b'] \subset I$ integrierbar.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und P eine Partition von I mit $\sigma(f,P) < \epsilon$. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß a', b' Teilpunkte von P sind, sonst nehmen wir sie noch dazu. Sei dann P' die von P auf $[a',b']$ induzierte Partition, d.h. P' besteht aus jenen Teilpunkten von P, die in $[a',b']$ liegen, so folgt

$$\sigma(f,P') \le \sigma(f,P) < \epsilon \tag{5.2.1}$$

und f erfüllt das Integrabilitätskriterium auf $[a',b']$. □

Als nächstes zeigen wir die Additivität des Integrals bezüglich seiner Grenzen.

5.2.2. Proposition. *Ist f über $[a,b]$ und $[b,c]$ integrierbar, dann auch über $[a,c]$ und*

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f. \tag{5.2.2}$$

Beweis. (i) Seien P, P' Partitionen von $[a,b]$ bzw. $[b,c]$ und $P'' = P \cup P'$[2] die von beiden auf $[a,c]$ induzierte, dann gilt

$$\sigma(f,P'') = \sigma(f,P) + \sigma(f,P') \tag{5.2.3}$$

und wir sehen, daß f das Integrabilitätskriterium auf $[a,c]$ erfüllt.

(ii) Mit den gleichen Bezeichnungen wie in (i) betrachte noch Zwischenpunkte Z, Z' von P, P' und setze $Z'' = Z \cup Z'$. Dann gilt

$$S(P'',Z'') = S(P,Z) + S(P',Z'), \tag{5.2.4}$$

woraus im Limes dann die Behauptung (5.2.2) folgt. □

5.2.3. Definition. Sei f über $[a,b]$ integrierbar, so definieren wir

$$\int_a^a f = 0 \tag{5.2.5}$$

und

$$\int_b^a f = -\int_a^b f. \tag{5.2.6}$$

Unter Berücksichtigung dieser Definitionen schließen wir aus Proposition 5.2.2

5.2.4. Proposition. *Sei $f : I = [a,b] \to E$ integrierbar, dann gilt für beliebige Punkte $a_i \in I, 1 \le i \le n$,*

$$\int_{a_1}^{a_n} f = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f. \tag{5.2.7}$$

Beweis. Per Induktion; Übungsaufgabe.

5.2.5. Proposition (Dreiecksungleichung)**.** *Sei $f : [a,b] \to E$ integrierbar, so ist auch $\|f\| : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \le \int_a^b \|f\|. \tag{5.2.8}$$

---

[2]Man könnte auch das Symbol $P \vee P'$ benützen, wenn man außer acht läßt, daß P bzw. P' Partitionen von verschiedenen Intervallen sind.

Beweis. (i) $\|f\|$ *ist integrierbar.*

Dies folgt aus der Beziehung

$$\Big| \|f(x)\| - \|f(y)\| \Big| \leq \|f(x) - f(y)\|, \tag{5.2.9}$$

mit deren Hilfe wir schließen

$$\sigma(\|f\|, P) \leq \sigma(f, P) \tag{5.2.10}$$

für beliebige Partitionen P von $[a, b]$.

(ii) Die Abschätzung (5.2.8) ist als Übungsaufgabe zu beweisen. □

5.2.6. Proposition. *Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $f = (f^i)$, beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann integrabel, wenn dies für die Komponentenfunktionen zutrifft und es gilt*

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b f^i \right)_{1 \leq i \leq n}. \tag{5.2.11}$$

Beweis. (i) Aus der Abschätzung

$$|f^i(x) - f^i(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f^i(x) - f^i(y)| \tag{5.2.12}$$

folgt

$$\sigma(f^i, P) \leq \sigma(f, P) \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma(f^i, P), \tag{5.2.13}$$

und damit die Aussage über die Integrabilität.

(ii) Zum Beweis von (5.2.11) betrachten wir eine Riemannsche Summe $S(f, P, Z)$, die sich aus den Riemannschen Summen der einzelnen f^i zusammensetzt, und beachten, daß der Limes einer Folge in $\mathbb{R}^n$ gleich dem Vektor ist, der sich aus den Limites der Komponentenfolgen ergibt. □

5.2.7. Proposition. *Die Riemann integrierbaren Funktionen $f : I = [a, b] \to E$ bilden einen Vektorraum über $\mathbb{K}$, falls E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist. Wir bezeichnen ihn mit $R(I, E)$; wenn $E = \mathbb{R}$, so schreiben wir meist $R(I)$. Es gilt dann*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \forall\, f, g \in R(I, E), \tag{5.2.14}$$

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f \qquad \forall\, f \in R(I, E),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \tag{5.2.15}$$

d.h. das Integral ist ein linearer Operator von $R(I,E)$ nach E.

Beweis. (i) $f+g \in R(I,E) \quad \forall f,g \in R(I,E)$.

Wir beachten, daß für beliebige Mengen $A \subset I$

$$\omega_{f+g}(A) \leq \omega_f(A) + \omega_g(A) \tag{5.2.16}$$

und daher

$$\sigma(f+g,P) \leq \sigma(f,P) + \sigma(g,P), \tag{5.2.17}$$

d.h. die Summe zweier Riemann integrabler Funktionen ist wieder Riemann integrabel.

(ii) Entsprechend weist man nach, daß mit f auch λf, $\lambda \in \mathbb{K}$, Riemann integrabel ist.

(iii) Der Beweis von (5.2.14) und (5.2.15) ist Übungsaufgabe. □

5.2.8. Proposition. *Seien E, E' Banachräume, $I = [a,b]$, $f \in R(I,E)$ und $\varphi : E \to E'$ Lipschitz-stetig auf $R(f)$, dann ist $\varphi \circ f \in R(I,E')$.*

Beweis. Sei L die Lipschitzkonstante von φ in $R(f)$, d.h.

$$\|\varphi(v) - \varphi(u)\| \leq L\|v-u\| \qquad \forall\, u,v \in R(f), \tag{5.2.18}$$

so folgt für eine beliebige Teilmenge $A \subset I$

$$\omega_{\varphi\circ f}(A) \leq L\omega_f(A), \tag{5.2.19}$$

so daß

$$\sigma(\varphi \circ f, P) \leq L\sigma(f,P); \tag{5.2.20}$$

womit alles bewiesen ist. □

5.2.9. Corollar. *Sei $I = [a,b]$, $f \in R(I,\mathbb{K})$ und $1 \leq p < \infty$, so gilt $|f|^p \in R(I,\mathbb{R})$.*

Beweis. Übungsaufgabe.

5.2.10. Proposition. *Sei $I = [a,b]$ und $f,g \in R(I,\mathbb{K})$, so gilt*

$$fg \in R(I,\mathbb{K}), \tag{5.2.21}$$

$$\frac{f}{g} \in R(I,\mathbb{K}), \quad \text{falls} \quad \inf_I |g| > 0. \tag{5.2.22}$$

Beweis. „(5.2.21)" Wir schätzen wieder die Oszillation von fg durch die von f und g ab:

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = \big(f(x) - f(y)\big)g(y) + \big(g(x) - g(y)\big)f(x) \tag{5.2.23}$$

und somit

$$\omega_{fg}(A) \leq \|g\|_\infty \omega_f(A) + \|f\|_\infty \omega_g(A) \quad \forall\, A \subset I. \tag{5.2.24}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

„(5.2.22)" Analoger Beweis; Übungsaufgabe. □

5.2.11. Proposition. *Sei $I = [a, b]$ und stimmen $f, g \in R(I, E)$ auf einer dichten Teilmenge D überein, so gilt*

$$\int_a^b f = \int_a^b g. \tag{5.2.25}$$

Beweis. Die Integrale in (5.2.25) werden durch Riemannsche Summen $S(f, P, Z)$ bzw. $S(g, P, Z)$ approximiert, wobei es uns frei steht, die Zwischenpunkte $Z \subset D$ zu wählen. In diesem Fall stimmen die Riemannschen Summen überein und damit auch die Integrale. □

Integration von Folgen und Reihen

5.2.12. Theorem. *Sei $I = [a, b]$ und konvergiere $f_n \in R(I, E)$ gleichmäßig nach f, dann ist $f \in R(I, E)$ und*

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f. \tag{5.2.26}$$

Beweis. (i) $f_n \rightrightarrows f$ ist gleichbedeutend mit $\|f - f_n\|_\infty \to 0$. Daher ist f beschränkt, und die Oszillation von f läßt sich wegen

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) = f_n(x) - f_n(y) + f(x) - f_n(x) \\ + f_n(y) - f(y) \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

abschätzen durch

$$\omega_f(A) \leq \omega_{f_n}(A) + 2\|f - f_n\|_\infty \qquad \forall\, A \subset I. \tag{5.2.28}$$

Daher ist

$$\sigma(f, P) \leq \sigma(f_n, P) + 2(b - a)\|f - f_n\|_\infty \tag{5.2.29}$$

für eine beliebige Partition P von I und f somit integrierbar.

(ii) Zum Beweis von (5.2.26) verwenden wir Proposition 5.2.7 und die Dreiecksungleichung

$$\Big\| \int_a^b f - \int_a^b f_n \Big\| \leq \int_a^b \|f - f_n\| \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty. \tag{5.2.30}$$

Damit ist alles bewiesen. □

5.2.13. Theorem (Integration von Reihen)**.** *Sei $I = [a,b]$, $f_n \in R(I,E)$ und konvergiere die Reihe $((f_n))$ gleichmäßig in I nach f,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \tag{5.2.31}$$

dann ist $f \in R(I,E)$ und

$$\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n. \tag{5.2.32}$$

Beweis. Sei s_n die n-te Partialsumme der Reihe, dann gilt $s_n \in R(I,E)$, Proposition 5.2.7, und $s_n \rightrightarrows f$; wende dann Theorem 5.2.12 an. □

5.2.14. Aufgaben.

1 Man beweise Proposition 5.2.4.

2 Man beweise die Dreiecksungleichung (5.2.8).

3 Man zeige Teil (iii) des Beweises von Proposition 5.2.7.

4 Man beweise Corollar 5.2.9.

5 Man verifiziere (5.2.22).

6 Sei $I = [a,b]$ und $f \in R(I,E)$. Wenn man f an endlich vielen Stellen beliebig abändert, so ist die neue Funktion $\tilde{f}$ ebenfalls Riemann integrabel und es gilt

$$\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}.$$

7 Sei $I = [a,b]$, P eine Partition von I mit Teilintervallen I_i, $f : I \to E$ beschränkt und nehme an, die Einschränkung von f auf jedes Teilintervall I_i sei Riemann integrabel, dann ist $f \in R(I,E)$.

5.3. Monotone und stetige Funktionen sind integrierbar

Wir zeigen zunächst, daß die stetigen Funktionen Riemann integrabel sind. Das Haupthilfsmittel ist dabei die gleichmäßige Stetigkeit auf einem kompakten Intervall.

5.3.1. Proposition. *Sei $I = [a, b]$, dann gilt $C^0(I, E) \subset R(I, E)$.*

Beweis. Sei $f \in C^0(I, E)$, dann ist f auf I gleichmäßig stetig, da I kompakt ist, vgl. Proposition 2.3.14 auf Seite 125, d.h. zu $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so daß

$$\omega_f(A) < \epsilon \qquad \forall\, A \in \{\, A \subset I \colon \operatorname{diam} A < \delta \,\}. \tag{5.3.1}$$

Das Riemannsche Integrabilitätskriterium (5.1.22) ist daher erfüllt, denn für jede Partition P mit $\eta(P) < \delta$ gilt

$$\sigma(f, P) < \epsilon(b - a). \tag{5.3.2}$$

□

5.3.2. Proposition. *Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist f Riemann integrierbar.*

Beweis. Wir wollen o.B.d.A. annehmen, daß f monoton wächst. Dann folgt insbesondere für jedes Intervall $J = [\alpha, \beta] \subset I$

$$\omega_f(J) = f(\beta) - f(\alpha). \tag{5.3.3}$$

Zu $n \in \mathbb{N}^*$ betrachte jetzt äquidistante Partitionen P_n von I mit

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \qquad \forall\, 0 \le i \le n-1. \tag{5.3.4}$$

Dann erhalten wir aus (5.3.3)

$$\begin{aligned} \sigma(f, P_n) &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big) \\ &= \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big), \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

so daß das Integrabilitätskriterium erfüllt ist. □

5.3.3. Definition. (i) Eine Funktion $f : I = [a, b] \to E$ heißt *Treppenfunktion*, falls eine Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von I existiert, so daß f auf den Teilintervallen $I_i = [x_i, x_{i+1})$ konstant ist. Wir können dann f in der Form darstellen[3]

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \chi_{I_i}, \tag{5.3.6}$$

wobei χ_{I_i} die charakteristische Funktion von I_i ist, vgl. Fußnote 11 auf Seite 154.

(ii) Eine Funktion $f : I = [a, b] \to E$ heißt *stückweise stetig*, bzw. *stückweise von der Klasse C^m*, $m \geq 0$, falls eine Partition P von I existiert, so daß f, bzw. alle Ableitungen von f bis zur Ordnung m, auf den (offenen) Teilintervallen $\overset{\circ}{I}_i$ stetig sind und sich auf jedes $\bar{I}_i$ stetig fortsetzen lassen.

5.3.4. Proposition. *Treppenfunktionen und stückweise stetige Funktionen sind Riemann integrabel.*

Beweis. Folgt aus Aufgabe 6 und Aufgabe 7 auf Seite 266 von Aufgaben 5.2.14, sowie Proposition 5.3.1 und Proposition 5.3.2. □

5.3.5. Aufgaben.

1 Sei $I = [a, b]$, E ein Banachraum und $f \in C^0(I, E)$. Für $p \in [1, \infty)$ definiere die sog. *L^p-Norm*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b \|f\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

In der nächsten Aufgabe wird zu beweisen sein, daß hierdurch tatsächlich eine Norm definiert wird.

Diese Definition ist natürlich für alle Riemann integrablen Funktionen möglich, doch ist $\|\cdot\|_p$ auf $R(I, E)$ keine Norm, da die positive Definitheit verletzt ist.

Seien $p, p' \in [1, \infty)$ konjugierte Exponenten, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, und $E = \mathbb{K}$, dann beweise man die sog. *Höldersche Ungleichung*

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}.$$

Hinweis: Vergleiche Aufgabe 1 von Aufgaben 1.4.16 auf Seite 79.

[3] Die Darstellung ist nicht eindeutig.

2 Sei E ein Banachraum, so ist die L^p-Norm ist eine Norm auf $C^0(I, E)$.

3 Sei $f \in C^0(I, E)$, so gilt

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty = \sup_I \|f\|.$$

5.4. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir beweisen zunächst einen Mittelwertsatz (MWS) für das Riemannsche Integral reeller Funktionen.

5.4.1. Proposition (Mittelwertsatz). *Sei $I = [a, b]$ und $f, g \in R(I)$; gelte $0 \leq g$ und $m \leq f \leq M$, so folgt*

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g. \tag{5.4.1}$$

Beweis. Nach Proposition 5.2.10 wissen wir, daß $fg \in R(I)$. Betrachte dann eine Riemannsche Summe $S(fg, P, Z)$, so erhalten wir

$$mS(g, P, Z) \leq S(fg, P, Z) \leq MS(g, P, Z), \tag{5.4.2}$$

woraus die Behauptung folgt. □

5.4.2. Corollar (Monotonie des Integrals). *Sei $I = [a, b]$ und $f, g \in R(I)$, so gilt*

$$f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g. \tag{5.4.3}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Manchmal bezeichnet man auch das nachfolgende Corollar als MWS für das Riemannsche Integral.

5.4.3. Corollar (MWS). *Sei $I = [a, b]$ und $f \in C^0(I)$, so existiert $\xi \in I$ mit*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b - a). \tag{5.4.4}$$

Beweis. Wähle in Proposition 5.4.1 $g = 1$ und wende dann den ZWS an. □

Für vektorwertige Funktionen nimmt der MWS wieder die Form einer Ungleichung an

5.4.4. Proposition (MWS; vektorwertige Version). *Sei* $I = [a,b]$ *und* $f \in R(I,E)$*, so gilt*

$$\Big\| \int_a^b f \Big\| \leq \sup_{x \in I} \|f(x)\| \, (b-a). \tag{5.4.5}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Dreiecksungleichung

$$\Big\| \int_a^b f \Big\| \leq \int_a^b \|f\| \tag{5.4.6}$$

und Corollar 5.4.2. □

5.4.5. Sei $I = [a,b]$ und $f \in R(I,E)$, so können wir eine Abbildung $F : I \to E$ definieren durch

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad x \in I. \tag{5.4.7}$$

5.4.6. Proposition. *Die in* (5.4.7) *definierte Abbildung ist Lipschitz-stetig.*

Beweis. Seien $x, y \in I$ und gelte o.B.d.A. $x < y$, so folgt aus Proposition 5.2.4 und dem MWS

$$\begin{aligned} \|F(y) - F(x)\| &= \Big\| \int_a^y f - \int_a^x f \Big\| = \Big\| \int_x^y f \Big\| \\ &\leq \int_x^y \|f\| \leq \|f\|_\infty \, |y - x|. \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

□

Ist f nicht nur Riemann integrabel, sondern stetig in I, so gilt

5.4.7. Theorem (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei* $I = [a,b]$ *und* $f \in C^0(I,E)$*, so ist die Funktion* F *in* (5.4.7) *in* (a,b) *differenzierbar und*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in (a,b). \tag{5.4.9}$$

Beweis. Seien $x, x_0 \in (a,b)$, so gilt

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)\| &= \Big\| \int_{x_0}^x (f - f(x_0)) \Big\| \\ &\leq \sup_{\xi \in [x_0, x]} \|f(\xi) - f(x_0)\| \, |x - x_0|. \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Dividieren wir nun durch $|x-x_0|$, $x \neq x_0$, und lassen anschließend $x \to x_0$, so folgt die Behauptung. $\square$

5.4.8. Bemerkung. Für stetige Funktionen f ist daher F eine Stammfunktion, vgl. Definition 4.4.14 auf Seite 250.

Da sich zwei Stammfunktion von f in einem Intervall nur durch eine additive Konstante unterscheiden, Bemerkung 4.4.15 auf Seite 250, können wir, wenn F eine *beliebige* Stammfunktion von f ist, das bestimmte Integral $\int_{x_1}^{x_2} f$ ausdrücken durch

$$\int_{x_1}^{x_2} f = F(x_2) - F(x_1) \equiv F\Big|_{x_1}^{x_2}, \tag{5.4.11}$$

oder allgemeiner,

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f \qquad \forall\, x, x_0 \in I. \tag{5.4.12}$$

5.4.9. Definition. Sei $I = [a, b]$ und $f \in C^0(I, E)$, so bezeichnen wir als *unbestimmtes Integral* von f, in Zeichen, $\int f$, die Menge aller Stammfunktionen von f.

$\int f$ ist vollständig bestimmt, wenn eine Stammfunktion bekannt ist, da die anderen sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

5.4.10. Aufgaben.

1 Man beweise Corollar 5.4.2.

2 Man bestimme Stammfunktionen von

(i) $\cos x$

(ii) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(iii) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(iv) $1 + \tan^2 x$

(v) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(vi) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(vii) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$

5.5. Integralsätze und Transformationsregeln

5.5.1. Theorem (Partielle Integration)**.** *Sei* $I = [a, b]$ *und seien* f, $g \in C^1(I, \mathbb{K})$, *so gilt*

$$\int_{x_0}^{x} f'g = fg\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} fg' \qquad \forall\, x, x_0 \in I. \tag{5.5.1}$$

Beweis. Für festes $x_0 \in I$ stellen beide Seiten von (5.5.1) differenzierbare Funktionen $\varPhi$ und $\varPsi$ dar. Es ist $\varPhi(x_0) = \varPsi(x_0) = 0$ und

$$\varPhi' = f'g = (fg)' - fg' = \varPsi' \tag{5.5.2}$$

nach der Produktregel, vgl. Proposition 3.1.11 auf Seite 164, und daher ist $\varPhi = \varPsi$. □

5.5.2. Beispiele.

(i)
$$\int_a^b t\cos t = \cos t\Big|_a^b + t\sin t\Big|_a^b$$

(ii)
$$\int_a^b e^t\cos t = \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t)\Big|_a^b$$

Beweis. „(i)" Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_a^b t\cos t &= -\int_a^b \sin t + t\sin t\Big|_a^b \\ &= \cos t\Big|_a^b + t\sin t\Big|_a^b.\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

„(ii)" Wir integrieren wieder partiell

$$\begin{aligned}\int_a^b e^t\cos t &= e^t\cos t\Big|_a^b + \int_a^b e^t\sin t \\ &= e^t\cos t\Big|_a^b + e^t\sin t\Big|_a^b - \int_a^b e^t\cos t\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

und erhalten hieraus die Behauptung. □

5.5.3. Seien I, J Intervalle, $\varphi \in C^1(J)$ mit $\varphi(J) \subset I$; sei $f \in C^0(I, E)$ und F eine Stammfunktion von f. Dann besagt die Kettenregel, Theorem 3.1.13 auf Seite 165,

$$(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi\varphi' = f \circ \varphi\varphi'. \tag{5.5.5}$$

Schreiben wir $x = \varphi(t)$ und integrieren wir die Gleichung bezüglich t, so folgt

$$\begin{aligned} \int f \circ \varphi\, \varphi'\, dt &= F \circ \varphi = F(x)\big|_{x=\varphi(t)} \\ &= \int f\, dx\big|_{x=\varphi(t)} \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

Auf bestimmte Integrale angewandt, erhalten wir

5.5.4. Theorem (Transformationsregel)**.** *Sei* $I = [a, b], J = [\alpha, \beta]$, $\varphi \in C^1(J)$ *mit* $\varphi(J) = I$ *und* $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$. *Sei* $f \in C^0(I, E)$, *so gilt*

$$\int_a^b f\, dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi\, \varphi'\, dt. \tag{5.5.7}$$

Beweis. Sei x die Variable in I und t die Variable in J. Integriere dann die Gleichung (5.5.5) über J und schließe

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f \circ \varphi\, \varphi'\, dt &= F \circ \varphi\big|_\alpha^\beta = F\big|_a^b \\ &= \int_a^b f\, dx, \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

vgl. (5.4.11). □

5.5.5. Als Gedächtnistütze kann man sich der Leibnizschen Regel bedienen: Zur Umformung des Integrals

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{5.5.9}$$

setze $x = \varphi(t)$, dann ist

$$\begin{aligned} dx &= \varphi'\, dt, \\ a &= \varphi(\alpha), \\ b &= \varphi(\beta) \end{aligned} \tag{5.5.10}$$

und man transformiert das Integral in (5.5.9), indem man x durch $\varphi(t)$ ersetzt, dx durch $\varphi' dt$ und die Grenzen a, b durch α, β, d.h.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'\, dt \tag{5.5.11}$$

5.5.6. Bemerkung. Meist wird die Transformationsregel in folgender Weise angewandt: Sei $J = [\alpha, \beta]$, $\varphi \in C^1(J)$ mit $\varphi' \neq 0$ in J, so daß φ ein differenzierbarer Homöomorphismus auf $I = \varphi(J)$ ist mit stetig differenzierbarer Inverser,[4] vgl. Theorem 3.2.13 auf Seite 173. Die Eckpunkte von I sind dann $a = \varphi(\alpha)$ und $b = \varphi(\beta)$. Wenn wir annehmen, daß $\varphi' > 0$, dann können wir das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\,dt \tag{5.5.12}$$

umformen, indem wir $x = \varphi(t)$, oder äquivalent, $t = \varphi^{-1}(x)$ setzen mit

$$\begin{aligned} dt &= (\varphi^{-1})' dx = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}\,dx, \\ \alpha &= \varphi^{-1}(a), \\ \beta &= \varphi^{-1}(b), \end{aligned} \tag{5.5.13}$$

so daß

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,dt &= \int_a^b f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(x)}\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(x)}\,dx. \end{aligned} \tag{5.5.14}$$

Die erste Gleichung in (5.5.13) erhält man auch aus $dx = \varphi' dt$, gleichbedeutend mit $dt = \frac{1}{\varphi'}\,dx$.

Die Formel (5.5.14) gilt auch, wenn $\varphi' < 0$, wie als Übungsaufgabe bewiesen werden soll.

5.5.7. Beispiele. (i) Sei $J = [\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$, und $f \in C^0(\mathbb{R})$. Das Integral $\int_\alpha^\beta f(t^2)\,dt$ läßt sich dann umformen zu

$$\int_\alpha^\beta f(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\alpha^2}^{\beta^2} f(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx. \tag{5.5.15}$$

Beweis. Setze $x = t^2$, dann ist $dx = 2t dt$ oder $dt = \frac{1}{2t}\,dx$, woraus nach (5.5.13) und (5.5.14) die Behauptung folgt. $\square$

[4] Einen solchen Homöomorphismus nennt man auch *Diffeomorphismus*, genauer C^1-Diffeomorphismus.

(ii) Das Integral

$$\int_\alpha^\beta \cos\log t\,dt, \qquad 0<\alpha<\beta, \tag{5.5.16}$$

transformieren wir mittels $x=\log t$, so daß $dx=\frac{1}{t}dt$ oder $dt=t dx=e^x\,dx$, zu

$$\int_\alpha^\beta \cos\log t\,dt=\int_{\log\alpha}^{\log\beta}\cos x\,e^x\,dx \tag{5.5.17}$$

und benutzen dann Beispiel (ii) von Beispiele 5.5.2.

5.5.8. Aufgaben.

1 Man beweise (5.5.14) für den Fall $\varphi'<0$.

2 Man zeige

(i) Sei $f\in C^1(I,\mathbb{K})$, so gilt

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x=0.$$

(ii) Diese Beziehung gilt auch für Funktionen, die stückweise von der Klasse C^1 sind.

3 Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

$$\text{(i)}\int\sqrt{4x+5}\quad\text{(ii)}\quad\int\cos(2x+1)\quad\text{(iii)}\int\frac{1}{\sqrt{5x+1}}$$

$$\text{(iv)}\int x^2\sin x\quad\text{(v)}\quad\int xe^{-x^2}\qquad\text{(vi)}\int\tan^2 5x$$

5.6. Integration rationaler Funktionen

Sei $I=[a,b]$ und $h=\frac{f}{g}$ eine rationale Funktion. Wenn in I keine Nullstelle von g liegt, so ist h in I stetig und folglich integrierbar. Wir werden zeigen, daß das unbestimmte Integral von h sich als *elementare Funktion* darstellen läßt, d.h. man kann es mittels der Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus, der Identität und den Umkehrfunktionen dieser Funktionen unter Anwendung der algebraischen Verknüpfungen ausdrücken.

Nach Corollar 3.7.17 auf Seite 214 dürfen wir uns darauf beschränken, *echt* rationale Funktionen zu betrachten, d.h. solche mit $\operatorname{Grad} f<\operatorname{Grad} g$.

Sei also $h = \frac{f}{g}$ eine echt rationale Funktion, wobei die Integrationsvariable eine reelle Variable x ist, doch h durchaus komplexwertig sein kann. Natürlich ist h auch für komplexe Argumente z definiert.

Wie in Proposition 3.7.19 bewiesen wurde, existiert eine eindeutige *Partialbruchzerlegung* von h

$$h(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(z-\zeta_i)^j}, \tag{5.6.1}$$

wobei ζ_i die Nullstellen des Nenners mit Vielfachheiten m_i sind.

5.6.1. Lemma. *Sei $f(x) = (x-\zeta)^{-m}$, $m \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in \mathbb{C}$, so ist im Falle $m = 1$ die Funktion*

$$F(x) = \begin{cases} \log|x-\zeta|, & \text{falls } \zeta \in \mathbb{R},\ x \neq \zeta, \\ \log(x-\zeta), & \text{falls } \operatorname{Im}\zeta \neq 0, \end{cases} \tag{5.6.2}$$

eine Stammfunktion und im Falle $m > 1$ die Funktion

$$F(x) = -\frac{1}{m-1}(x-\zeta)^{-(m-1)}, \quad x \neq \zeta. \tag{5.6.3}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

Wir können daher im Prinzip die Stammfunktion einer echt rationalen Funktion explizit angegeben, wobei zunächst die gefundene Stammfunktion zumindest formal komplexwertig ist, auch wenn die rationale Funktion selber reellwertig sein sollte für reelle Argumente.

Betrachten wir daher diesen Fall etwas genauer.

5.6.2. Lemma. *Sei $f \in P(\mathbb{C})$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle mit Vielfachheit m. Dann ist auch $\bar{\zeta}$ eine Nullstelle mit gleicher Vielfachheit.*

Beweis. (i) Da f reelle Koeffizienten besitzt, gilt

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}; \tag{5.6.4}$$

daher ist mit ζ auch $\bar{\zeta}$ eine Nullstelle.

(ii) Nach Corollar 3.7.13 auf Seite 213 läßt sich f als Produkt von Linearfaktoren schreiben

$$f(z) = a \prod_{i=1}^{n} (z-\zeta_i)^{m_i}, \tag{5.6.5}$$

wobei ζ_i die Nullstellen von f sind mit Vielfachheiten m_i. Die Darstellung ist eindeutig, wie man sich leicht überlegt (Übungsaufgabe).

Wenn f reelle Koeffizienten hat, so ist auch der Koeffizient a in (5.6.5) reell, vgl. Proposition 3.7.9 auf Seite 210, und wir schließen aus (5.6.4)

$$f(\bar{z}) = a\prod_{i=1}^{n}(\bar{z}-\bar{\zeta}_i)^{m_i} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{5.6.6}$$

und damit auch

$$f(z) = a\prod_{i=1}^{n}(z-\bar{\zeta}_i)^{m_i} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{5.6.7}$$

da die Konjugation eine Bijektion in $\mathbb{C}$ ist.

Aus der Eindeutigkeit der Faktorisierung folgt, daß die Vielfachheiten der Nullstellen $\zeta, \bar{\zeta}$ übereinstimmen müssen. $\square$

Sei nun $h = \frac{f}{g}$ eine echt rationale Funktion und nehme an, daß f, g Polynome mit reellen Koeffizienten sind. Die Partialbruchzerlegung (5.6.1) können wir dann folgendermaßen schreiben

$$h(z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{ij}}{(z-\xi_i)^j} + \sum_{i=1}^{n'}\sum_{j=1}^{m'_i}\left(\frac{b_{ij}}{(z-\zeta_i)^j} + \frac{c_{ij}}{(z-\bar{\zeta}_i)^j}\right). \tag{5.6.8}$$

Hierbei sind ξ_i die reellen und $\zeta_i, \bar{\zeta}_i$ die komplexen Nullstellen.

5.6.3. Lemma. *In der Zerlegung (5.6.8) sind die Koeffizienten a_{ij} reell und es gilt $\bar{b}_{ij} = c_{ij}$.*

Beweis. Es ist $\overline{h(z)} = h(\bar{z})$, d.h.

$$h(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\bar{a}_{ij}}{(\bar{z}-\xi_i)^j} + \sum_{i=1}^{n'}\sum_{j=1}^{m'_i}\left(\frac{\bar{b}_{ij}}{(\bar{z}-\bar{\zeta}_i)^j} + \frac{\bar{c}_{ij}}{(\bar{z}-\zeta_i)^j}\right) \tag{5.6.9}$$

für beliebige $\bar{z} \in \mathbb{C}$. Daher gilt diese Darstellung auch für beliebige $z \in \mathbb{C}$ anstelle von $\bar{z}$, und wegen der Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung liefert ein Vergleich mit (5.6.8) die Behauptung. $\square$

Die Aufgabe, eine reelle Stammfunktion von h zu finden, reduziert sich daher darauf, eine reelle Stammfunktion von Ausdrücken der Form

$$f(x) = \frac{b}{(x-\zeta)^m} + \frac{\bar{b}}{(x-\bar{\zeta})^m}, \quad m \geq 1, \tag{5.6.10}$$

anzugeben.

5.6.4. Lemma. *Sei $m \geq 2$, dann ist eine reelle Stammfunktion von f in* (5.6.10) *gegeben durch*

$$F(x) = -\frac{2}{m-1}\frac{\operatorname{Re}\left(b(x-\bar{\zeta})^{m-1}\right)}{(x^2 - 2\operatorname{Re}\zeta x + |\zeta|^2)^{m-1}}. \tag{5.6.11}$$

Beweis. Nach Lemma 5.6.1 ist eine Stammfunktion darstellbar in der Form

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{m-1}\left(\frac{b}{(x-\zeta)^{m-1}} + \frac{\bar{b}}{(x-\bar{\zeta})^{m-1}}\right) \\ &= -\frac{1}{m-1}\frac{b(x-\bar{\zeta})^{m-1} + \bar{b}(x-\zeta)^{m-1}}{(x^2 - x(\zeta+\bar{\zeta}) + |\zeta|^2)^{m-1}}. \end{aligned} \tag{5.6.12}$$

Damit ist alles bewiesen. □

Betrachten wir nun den Fall $m = 1$. Die Funktion f in (5.6.10) läßt sich dann darstellen als

$$f(x) = \frac{b(x-\bar{\zeta}) + \bar{b}(x-\zeta)}{x^2 - x(\zeta+\bar{\zeta}) + |\zeta|^2} \equiv \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + px + q} \tag{5.6.13}$$

mit reellen Koeffizienten α, β und p, q. Die Nullstellen von $x^2 + px + q$ sind dabei komplex, d.h., es muß für die Diskrimante D

$$D = \frac{p^2}{4} - q < 0 \tag{5.6.14}$$

gelten, da die Nullstellen sich gemäß

$$\zeta = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \tag{5.6.15}$$

berechnen.

Wir bestimmen zunächst eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{x^2 + px + q}$ unter der Annahme (5.6.14).

5.6.5. Lemma. *Wenn die Bedingung* (5.6.14) *zutrifft, so ist*

$$\int \frac{1}{x^2 + px + qdx} = \frac{1}{\sqrt{|D|}}\arctan\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{|D|}} + \text{const.} \tag{5.6.16}$$

Beweis. Setze $g(x) = x^2 + px + q$, so gilt

$$g(x) = (x + \frac{p}{2})^2 - D = |D|\left(1 + \left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{|D|}}\right)^2\right) \tag{5.6.17}$$

und

$$\int \frac{1}{g} = \frac{1}{|D|} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{|D|}} \right)^2}. \tag{5.6.18}$$

Mittels der Variablentransformation $x = \sqrt{|D|}\, t$, $dx = \sqrt{|D|}\, dt$, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{g(x)} &= \frac{1}{\sqrt{|D|}} \int \frac{dt}{1 + \left(t + \frac{p}{2\sqrt{|D|}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|D|}} \arctan \left(t + \frac{p}{2\sqrt{|D|}} \right) \Big|_{t = \frac{x}{\sqrt{|D|}}} \end{aligned} \tag{5.6.19}$$

vgl. Proposition 3.6.25 auf Seite 202. □

5.6.6. Lemma. *Unter der Annahme* (5.6.14) *gilt*

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + px + q} &= \frac{1}{2} \log \left(x^2 + px + q \right) \\ &\quad - \frac{p}{2\sqrt{|D|}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{|D|}} + \text{const.} \end{aligned} \tag{5.6.20}$$

Beweis. Wir bezeichnen wie eben den quadratischen Term mit g und formen um

$$\begin{aligned} \frac{x}{g} &= \frac{1}{2} \frac{2x + p}{g} - \frac{p}{2g} \\ &= \frac{1}{2} \frac{g'}{g} - \frac{p}{2g}. \end{aligned} \tag{5.6.21}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{g} &= \frac{1}{2} \int \frac{g'}{g} - \frac{p}{2} \int \frac{1}{g} \\ &= \frac{1}{2} \log g - \frac{p}{2} \int \frac{1}{g}, \end{aligned} \tag{5.6.22}$$

woraus die Behauptung folgt. Beachte, daß $g > 0$, wegen (5.6.14). □

5.6.7. Aufgaben.

1 Man beweise Lemma 5.6.1.

2 Zeige die Eindeutigkeit der Zerlegung in (5.6.5).

5.7. Lebesguesches Integrabilitätskriterium

Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium besagt, daß eine beschränkte Funktion genau dann Riemann integrabel ist, wenn sie *fast überall* stetig ist. Fast überall heißt dabei bis eine *Nullmenge*.

5.7.1. Definition (Nullmenge)**.** (i) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt (Lebesguesche) *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine h.a. Überdeckung $(I_i)_{i \in A}$ von M durch offene Intervalle I_i gibt, so daß

$$\sum_{i \in A} |I_i| < \epsilon. \tag{5.7.1}$$

Die I_i müssen nicht paarweise disjunkt sein.

(ii) Wir sagen eine Aussage $p = p(x)$ gilt *fast überall* (f.ü.) in $M \subset \mathbb{R}$, falls die Menge $\{ x \in M \colon p(x) = \text{falsch} \}$ eine Nullmenge ist.

5.7.2. Bemerkung. (i) Jede h.a. Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist Nullmenge.

(ii) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist Nullmenge.

(iii) Die Vereinigung von h.a. vielen Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

(iv) Eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist genau dann Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckumg $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$ mit offenen Intervallen gibt, so daß

$$\sum_{i=1}^{n} |I_i| < \epsilon. \tag{5.7.2}$$

(v) In der Definition 5.7.1 hätten wir anstelle von offenen Intervallen auch beliebige Intervalle wählen können.

Beweis. Übungsaufgabe.

5.7.3. Bemerkung. Seien E, E' metrische Räume und $f : E \to E'$. Nach Bemerkung 3.4.5 auf Seite 182 ist f genau dann stetig in $x \in E$, falls $\omega_f(x) = 0$. Definieren wir $\Sigma(f)$ als die Menge der Unstetigkeitspunkte von f und für $\epsilon > 0$

$$\Sigma_\epsilon(f) = \{ x \colon \omega_f(x) \geq \epsilon \}, \tag{5.7.3}$$

so gilt

$$\Sigma(f) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Sigma_{\frac{1}{m}}(f). \tag{5.7.4}$$

5.7.4. Bemerkung. Sei $f : E \to E'$ und $\epsilon > 0$, dann ist $\Sigma_\epsilon(f)$ abgeschlossen.

Beweis. Übungsaufgabe.

5.7.5. Theorem. *Eine beschränkte Funktion $f : I = [a, b] \to E$ ist genau dann Riemann integrabel, wenn sie f.ü. stetig ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$" Sei $f \in R(I, E)$. Wir werden zeigen, daß jede Menge $\Sigma_{\frac{1}{m}}(f)$, $m \in \mathbb{N}^*$, eine Nullmenge ist und damit auch $\Sigma(f) = \bigcup_m \Sigma_{\frac{1}{m}}(f)$.

Sei $\epsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}^*$ fest. Dann existiert eine Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ von I, so daß

$$\sigma(f, P) < \frac{\epsilon}{2m}. \tag{5.7.5}$$

Sei $\Lambda \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$ die Menge der Indizes i, so daß

$$\Sigma_{\frac{1}{m}}(f) \cap \mathring{I}_i \neq \emptyset. \tag{5.7.6}$$

Dann gilt

$$\Sigma_{\frac{1}{m}}(f) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} I_i \cup \bigcup_{i=0}^{n} \{x_i\}. \tag{5.7.7}$$

Sei nun $i \in \Lambda$ und $\xi \in \Sigma_{\frac{1}{m}}(f) \cap \mathring{I}_i$, dann existiert eine Kugel $B_\delta(\xi) \subset \mathring{I}_i$, so daß

$$\frac{1}{m} \le \omega_f(\xi) \le \omega_f(B_\delta(\xi)), \tag{5.7.8}$$

da $\frac{1}{m} \le \omega_f(\xi)$, woraus folgt

$$\frac{1}{m} \le \omega_f(B_\delta(\xi)) \le \omega_f(I_i) \tag{5.7.9}$$

und somit

$$\frac{1}{m} \sum_{i \in \Lambda} |I_i| \le \sum_{i \in \Lambda} \omega_f(I_i)|I_i| \le \sigma(f, P) < \frac{\epsilon}{2m}, \tag{5.7.10}$$

d.h.

$$\sum_{i \in \Lambda} |I_i| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.7.11}$$

Wähle dann noch offene Intervalle J_i, $i = 0, \ldots, n$, so daß $x_i \in J_i$ und

$$\sum_{i=0}^{n} |J_i| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{5.7.12}$$

so schließen wir

$$\Sigma_{\frac{1}{m}}(f) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} I_i \cup \bigcup_{i=0}^{n} J_i \tag{5.7.13}$$

und

$$\sum_{i \in \Lambda} |I_i| + \sum_{i=0}^{n} |J_i| < \epsilon. \tag{5.7.14}$$

„$\Longleftarrow$“ Sei $\Sigma(f)$ eine Nullmenge. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $(J_k)_{k \in \Lambda}$ eine h.a. Überdeckung von $\Sigma(f)$ durch offene Intervalle J_k mit

$$\sum_{k \in \Lambda} |J_k| < \epsilon. \tag{5.7.15}$$

Zu jedem $\xi \in I \backslash \Sigma(f)$ existiert eine offene Kugel $B(\xi) = B_\delta(\xi)$, so daß

$$\omega_f(\overline{B(\xi) \cap I}) < \epsilon. \tag{5.7.16}$$

Die $(J_k)_{k \in \Lambda}$ und $(B(\xi))_{\xi \in I \backslash \Sigma(f)}$ bilden eine offene Überdeckung von I, daher existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$I \subset \bigcup_{k \in \Lambda'} J_k \cup \bigcup_{j=1}^{N} B(\xi_j). \tag{5.7.17}$$

Wähle nun als Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von I die Partition, deren Teilpunkte aus den Endpunkten der obigen Intervalle besteht—sofern diese in I liegen—und den Punkten a, b.

Jedes Teilintervall I_i, $0 \leq i \leq n-1$, liegt dann in einem $\bar{J}_k$, $k \in \Lambda'$, oder in einem $\overline{B(\xi_j) \cap I}$. Sei Λ_1, Λ_2 eine entsprechende Zerlegung von $\{0, \ldots, n-1\}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega_f(I_i)|I_i| \\ &= \sum_{i \in \Lambda_1} \omega_f(I_i)|I_i| + \sum_{i \in \Lambda_2} \omega_f(I_i)|I_i| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \epsilon + \epsilon|I| = (2\|f\|_\infty + (b-a))\epsilon. \end{aligned} \tag{5.7.18}$$

$\square$

5.7.6. Corollar. *Sei $f \in R(I, E)$, dann gilt*

$$\|f\|_1 = 0 \iff f = 0 \quad \text{f.ü.}^{5} \tag{5.7.19}$$

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Sei $\|f\|_1 = 0$ und $\Lambda = I \backslash \Sigma(f)$.

Behauptung: $f_{|\Lambda} \equiv 0$

Sei $\xi \in \Lambda$ und $f(\xi) \neq 0$, dann existiert eine (relativ) offene Kugel $B_\delta(\xi)$, so daß

$$0 < \frac{\|f(\xi)\|}{2} \leq \|f(x)\| \qquad \forall\, x \in B_\delta(\xi), \tag{5.7.20}$$

woraus wir schließen

$$\int_a^b \|f\| \geq \int_{B_\delta(\xi)} \|f\| \geq \frac{\|f(\xi)\|}{2}\,\delta > 0; \tag{5.7.21}$$

Widerspruch.

„$\Longleftarrow$“ Sei $f = 0$ f.ü. und $\Lambda = \{\, x \in I \colon f(x) \neq 0 \,\}$, dann liegt $I \backslash \Lambda$ dicht in I, denn sonst existiert $\xi \in \overset{\circ}{I}$ und $\delta > 0$, so daß $B_\delta(\xi) \subset \Lambda$.

Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, daß Λ eine Nullmenge ist, denn wähle zu $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2}$ eine h.a. Überdeckung (I_i) von Λ durch offene Intervalle mit $\sum_i |I_i| < \epsilon$, dann überdecken endlich viele I_i $\bar{B}_{\frac{\delta}{2}}(\xi)$ und wir erhalten

$$\delta = |B_{\frac{\delta}{2}}(\xi)| \leq \sum_i |I_i| < \epsilon < \frac{\delta}{2}; \tag{5.7.22}$$

Widerspruch.

f verschwindet daher auf einer dichten Teilmenge, woraus nach Proposition 5.2.11 auf Seite 265 die Behauptung $\|f\|_1 = 0$ folgt. $\square$

5.7.7. Aufgaben.

1 Man beweise Bemerkung 5.7.2.

2 Man verifiziere Lemma 5.7.4.

---

[5] Vergleiche Aufgabe 1 von Aufgaben 5.3.5 auf Seite 268.

5.8. Uneigentliche Integrale

In diesem Abschnitt ist der Zielbereich aller vorkommenden Funktionen in der Regel ein Banachraum E. Wir fragen nach der Existenz von Integralen, in denen der Integrationsbereich unbeschränkt ist oder der Integrand an einem oder beiden Endpunkten des Integrationsintervalls eine *Singularität* besitzt.

5.8.1. Definition. (i) Sei E ein Banachraum und $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Wir sagen eine Funktion $f : I \to E$ sei *lokal integrierbar*, in Zeichen, $f \in R_{loc}(I, E)$, falls $f \in R(J, E)$ für alle $J \Subset I$.[6]

(ii) Sei $I = [a, b)$ und gelte $f \in R_{loc}(I, E)$. Wir sagen, das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f$ existiere oder konvergiere, falls

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_a^{b-\delta} f \tag{5.8.1}$$

existiert. Wir setzen dann $\int_a^b f$ gleich diesem Limes.

(iii) Entsprechend definieren wir

$$\int_a^b f = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{a+\delta}^b f, \tag{5.8.2}$$

falls $I = (a, b]$ und $f \in R_{loc}(I, E)$.

(iv) Sei $I = (a, b)$ und $f \in R_{loc}(I, E)$, so definieren wir

$$\int_a^b f = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_c^{b-\delta} + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{a+\epsilon}^c f, \tag{5.8.3}$$

wobei $a < c < b$.

Die Definition ist von der Wahl von c unabhängig, wie man sich leicht überlegt.

5.8.2. Beispiel. Es gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \downarrow 0} 2\sqrt{x}\Big|_\delta^1 = 2. \tag{5.8.4}$$

Im Falle eines unbeschränkten Integrationsbereiches definieren wir

---

[6]Wenn I ein kompaktes Intervall ist, dann ist $R_{loc}(I, E) = R(I, E)$, da in diesem Fall $I \Subset I$.

5.8.3. Definition. (i) Sei $I = [a, \infty)$ und $f \in R_{loc}(I, E)$. Wir sagen, das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f$ existiere oder konvergiere, falls

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^x f \tag{5.8.5}$$

existiert. Wir setzen dann $\int_a^\infty f$ gleich diesem Limes.

(ii) Entsprechend definieren wir

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f, \tag{5.8.6}$$

falls $f \in R_{loc}((-\infty, a], E)$.

(iii) Sei $f \in R_{loc}(\mathbb{R}, E)$, so setzen wir

$$\int_{-\infty}^\infty f = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f + \lim_{x \to \infty} \int_a^x f. \tag{5.8.7}$$

Der Limes, falls er existiert, ist wieder unabhängig von a definiert.

5.8.4. Beispiele.

$$\int_0^\infty e^{-t} = \lim_{x \to \infty} \int_0^x e^{-t} = \lim_{x \to \infty} -e^{-t}\Big|_0^x = 1 \tag{5.8.8}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|t|} = \int_{-\infty}^0 e^{-|t|} + \int_0^\infty e^{-t} = 2 \tag{5.8.9}$$

5.8.5. Bemerkung. (i) Ist $f \in R([a, b], E)$, so stimmt das uneigentliche Integral von f nach Definition 5.8.1, (ii) mit dem gewöhnlichen Integral überein, da das Integral bezüglich seiner Grenzen stetig ist.

(ii) Aus den Definitionen liest man unschwer ab, daß das uneigentliche Integral linear in f ist, additiv bezüglich seiner Grenzen und für reellwertige Integranden auch monoton.

5.8.6. Lemma. *Ist f reellwertig und nicht-negativ, so sind die Definitionen 5.8.1, (iv) bzw. 5.8.3, (iii) äquivalent zu*

$$\int_a^b f = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{a+\delta}^{b-\delta} f \tag{5.8.10}$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^\infty f = \lim_{x \to \infty} \int_{-x}^x f. \tag{5.8.11}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

5.8.7. Definition. Das uneigentliche Integral $\int_a^b f$ im Sinne von Definition 5.8.1 oder Definition 5.8.3 heißt *absolut konvergent*, falls $\int_a^b \|f\|$ konvergiert.

f heißt *absolut integrierbar* (über $\mathbb{R}$), falls $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existiert.

Da das uneigentliche Integral als Limes definiert ist, existiert es genau dann, wenn das Cauchykriterium erfüllt ist. Wir formulieren dieses und andere Kriterien nur explizit für den Fall $\int_a^\infty f$.

5.8.8. Proposition (Cauchykriterium)**.** *Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f$ konvergiert genau dann, wenn*

$$\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{R>a} \ \forall_{x,y\geq R} \quad \left\| \int_a^x f - \int_a^y f \right\| = \left\| \int_x^y f \right\| < \epsilon. \tag{5.8.12}$$

Beweis. Man vergegenwärtige sich, was $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f$ bedeutet, vgl. Proposition 2.2.18 auf Seite 115. □

5.8.9. Corollar. *Ein absolut konvergentes Integral konvergiert.*

Beweis. Folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\left\| \int_x^y f \right\| \leq \left| \int_x^y \|f\| \right|. \tag{5.8.13}$$

□

Eine hinreichende Bedingung für absolute Konvergenz liefert das Majorantenkriterium.

5.8.10. Proposition (Majorantenkriterium)**.** *Sei $I = [a, \infty)$, und gelte $g \in R_{loc}(I, \mathbb{R}_+)$, $f \in R_{loc}(I, E)$ sowie $\|f\| \leq g$; dann ist f absolut integrierbar, wenn das uneigentliche Integral $\int_a^\infty g$ existiert.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der Ungleichung

$$\int_a^x \|f\| \leq \int_a^x g \leq \int_a^\infty g \qquad \forall\, x > a. \tag{5.8.14}$$

□

5.8.11. Beispiel. Das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\log t}{\sqrt{t}} \tag{5.8.15}$$

existiert.

Beweis. Wir schreiben

$$\frac{\log t}{\sqrt{t}} = (t^{\frac{1}{4}} \log t) t^{-\frac{3}{4}} \tag{5.8.16}$$

und beachten, daß

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{\frac{1}{4}} \log t = \lim_{t \downarrow 0} -\frac{\log t^{-1}}{(t^{-1})^{\frac{1}{4}}} = \lim_{\tau \to \infty} -\frac{\log \tau}{\tau^{\frac{1}{4}}} = 0, \tag{5.8.17}$$

vgl. (3.6.18) auf Seite 192.

Daher ist für kleine t, $0 < t \leq t_0$, $t^{-\frac{3}{4}}$ eine konvergente Majorante. □

5.8.12. Proposition. *Sei $f \in R_{loc}(\mathbb{R}_+, E)$ und*

$$a_n = \int_n^{n+1} f, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.8.18}$$

Dann ist die Reihe $((a_n))$ konvergent, wenn das Integral $\int_0^\infty f$ konvergiert und die Werte stimmen überein

$$\sum_n a_n = \int_0^\infty f. \tag{5.8.19}$$

Beweis. Sei s_n die n-te Partialsumme der Reihe, so ist

$$s_n = \int_0^{n+1} f. \tag{5.8.20}$$

Damit ist alles bewiesen. □

Die Umkehrung dieses Satzes stimmt, wenn f im Unendlichen verschwindet.

5.8.13. Proposition. *Sei $f \in R_{loc}(\mathbb{R}_+, E)$,*

$$a_n = \int_n^{n+1} f, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5.8.21}$$

und nehme an, daß $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f$, wenn die Reihe $((a_n))$ konvergiert und die Werte stimmen überein.

Beweis. Es gilt wieder

$$s_n = \int_0^{n+1} f \tag{5.8.22}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f = \sum_n a_n \equiv A. \tag{5.8.23}$$

Es soll aber gelten

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f = A. \tag{5.8.24}$$

Sei daher $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $R > 0$, so daß

$$\|f(x)\| \le \epsilon \qquad \forall\, x \ge R \tag{5.8.25}$$

und

$$\left\| \int_0^n f - A \right\| \le \epsilon \qquad \forall\, n \ge R, \tag{5.8.26}$$

dann gilt für alle $x \ge R+1$

$$\begin{aligned} \left\| A - \int_0^x f \right\| &\le \left\| A - \int_0^{[x]} f \right\| + \left\| \int_0^{[x]} f - \int_0^x f \right\| \\ &\le \epsilon + \int_{[x]}^x \|f\| \le 2\epsilon. \end{aligned} \tag{5.8.27}$$

□

5.8.14. Bemerkung. Proposition 5.8.13 bleibt auch richtig, wenn die Reihenglieder a_n definiert werden durch

$$a_n = \int_{nr}^{(n+1)r} f, \tag{5.8.28}$$

wobei $r > 0$ beliebig gewählt ist.

Beweis. Wir führen im Integral die Variablentransformation $t \to \tau = \frac{t}{r}$ durch und erhalten

$$\int_{nr}^{(n+1)r} f(t)\, dt = r \int_n^{n+1} f(r\tau)\, d\tau. \tag{5.8.29}$$

Daher konvergiert nach Proposition 5.8.13 $\int_0^\infty f(r\tau)\,d\tau$ und es gilt

$$\sum_n a_n = r\int_0^\infty f(r\tau)\,d\tau. \tag{5.8.30}$$

Andererseits ist

$$\int_0^x f(t)\,dt = r\int_0^{\frac{x}{r}} f(r\tau)\,d\tau, \tag{5.8.31}$$

woraus wir schließen, daß $\int_0^\infty f$ existiert und

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = r\int_0^\infty f(r\tau)\,d\tau = \sum_n a_n. \tag{5.8.32}$$

□

5.8.15. Beispiel. Das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} \tag{5.8.33}$$

konvergiert.

Beweis. Wir wollen Bemerkung 5.8.14 anwenden. Setze

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}, \qquad n \geq 1. \tag{5.8.34}$$

$((a_n))$ ist dann eine alternierende Reihe, deren Glieder dem Betrag nach eine monotone Nullfolge bilden, denn sei o.B.d.A.

$$0 < a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}, \tag{5.8.35}$$

so folgt mittels der Transformation $t = \tau - \pi$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin(\tau-\pi)}{\tau-\pi} = -\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin(\tau)}{\tau-\pi} \\ &\geq -\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin\tau}{\tau} = -a_{n+1}. \end{aligned} \tag{5.8.36}$$

Also konvergiert $((a_n))$ nach Proposition 1.2.24 auf Seite 70. Da ferner

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sin t}{t} = 0, \tag{5.8.37}$$

erhalten wir wegen Bemerkung 5.8.14 die Behauptung. □

5.8.16. Beispiel. Das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} \tag{5.8.38}$$

konvergiert für alle $a > 0$ und $\alpha > 0$.

Beweis. Wir integrieren partiell

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{\sin t}{t^\alpha} &= -\frac{\cos t}{t^\alpha}\Big|_a^x - \alpha \int_a^x \frac{\cos t}{t^{1+\alpha}} \\ &\xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\cos a}{a^\alpha} - \alpha \int_a^\infty \frac{\cos t}{t^{1+\alpha}}. \end{aligned} \tag{5.8.39}$$

Das letzte Integral ist jedoch absolut konvergent. □

5.8.17. Beispiel. Das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty \sin t^2 \tag{5.8.40}$$

konvergiert für alle $a > 0$.

Beweis. Wir substituieren $\tau = t^2$, $d\tau = 2tdt$, und erhalten

$$\int_a^\infty \sin t^2 = \frac{1}{2} \int_{a^2}^\infty \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}}. \tag{5.8.41}$$

Beispiel 5.8.16 liefert dann die Behauptung. □

5.8.18. Beispiel. Das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t} \tag{5.8.42}$$

konvergiert.

Beweis. Mittels der Regel von de l'Hospital, vgl. Proposition 3.3.3 auf Seite 177 und Beispiel 1 von Beispiele 3.3.7, schließen wir, daß die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & 0 < t \le 1, \\ 1, & t = 0, \end{cases} \tag{5.8.43}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ stetig ist und damit integrierbar. □

5.8.19. Beispiel. Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \tag{5.8.44}$$

konvergiert für alle $\alpha > 0$.

Beweis. Wir benützen das Majorantenkriterium, Proposition 5.8.10. Nach (3.6.15) auf Seite 192 existiert eine Konstante c, so daß

$$t^\alpha e^{-\frac{t}{2}} \leq c \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.8.45}$$

Daher ist

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \leq c \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}} = 2c. \tag{5.8.46}$$

□

5.8.20. Lemma (Fundamentallemma der Fourierreihen)**.** *Sei $I = [a, b]$ und $f : I \to E$ stückweise von Klasse C^1, dann gilt*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x = 0. \tag{5.8.47}$$

Beweis. Übungsaufgabe; vgl. Aufgabe 2 auf Seite 275 von Aufgaben 5.5.8.

Mit Hilfe des Fundamentallemmas können wir zeigen

5.8.21. Proposition. *Es gilt*

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}. \tag{5.8.48}$$

Beweis. (i) Wir wissen bereits aus den vorangegangen Beispielen, daß das Integral $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}$ konvergiert, d.h. für beliebige $r > 0$ ist

$$I = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{r\lambda} \frac{\sin t}{t}. \tag{5.8.49}$$

Andererseits ist für $\lambda > 0$

$$\int_0^{r\lambda} \frac{\sin t}{t} = \int_0^r \frac{\sin \lambda x}{x}, \tag{5.8.50}$$

und somit

$$I = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^r \frac{\sin \lambda x}{x}, \qquad r > 0. \tag{5.8.51}$$

Definiere nun auf $0 \leq x < 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}, & 0 < x < 2\pi. \end{cases} \tag{5.8.52}$$

Nach Beispiel 3 von Beispiele 3.3.7 auf Seite 180 ist f stetig in $[0, 2\pi)$ und—wie wir gleich zeigen werden—auch stetig differenzierbar.

Offensichtlich dürfen wir statt f die Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}, & 0 < x < \pi, \end{cases} \tag{5.8.53}$$

betrachten. Sie ist im offenen Intervall stetig differenzierbar und wir wollen zeigen, daß $\lim_{x\downarrow 0} \varphi'(x)$ existiert.

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2\cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= x^{-4}(x^2\cos x - \sin^2 x)\frac{x^2}{\sin^2 x}. \end{aligned} \tag{5.8.54}$$

Der letzte Faktor konvergiert nach 1, wenn $x \to 0$, so daß wir ihn im folgenden außer acht lassen können. Um den zweiten Faktor abzuschätzen, benutzen wir die Reihenentwicklung von cos und sin um $x = 0$, vgl. Proposition 3.6.19 auf Seite 198,

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4), \end{aligned} \tag{5.8.55}$$

und schließen

$$x^{-4}(x^2\cos x - \sin^2 x) = -\frac{1}{6} + o(x), \tag{5.8.56}$$

d.h.

$$\lim_{x\downarrow 0} \varphi'(x) = -\frac{1}{6}. \tag{5.8.57}$$

(ii) Wir könne daher das Fundamentallemma, Lemma 5.8.20, auf

$$\int_0^r f(x)\sin\lambda x \tag{5.8.58}$$

anwenden, falls $0 < r < 2\pi$, und erhalten

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^r \frac{\sin\lambda x}{x} = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^r \frac{\sin\lambda x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{5.8.59}$$

Da die Limites existieren, wählen wir eine spezielle Folge $\lambda_n \to \infty$, nämlich

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5.8.60}$$

und wählen insbesondere $r = \pi$.

Somit ist

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{5.8.61}$$

Nach einer früheren Aufgabe, siehe Aufgabe 5 von Aufgaben 3.6.36 auf Seite 206, gilt

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, \tag{5.8.62}$$

so daß

$$\int_0^\pi \frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2}, \tag{5.8.63}$$

und folglich

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}. \tag{5.8.64}$$

□

Vertauschbarkeit von Limesbildung und Integration

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir die Vertauschbarkeit von Limesbildung und Integration bei uneigentlichen Integralen untersuchen. Wir betrachten wieder beispielhaft Integrale der Form $\int_a^\infty f_n$.

Das frühere Resultat, daß—bei Integration über kompakte Intervalle—Limesbildung und Integration bei gleichmäßiger Konvergenz der Integranden vertauschbar sind, gilt nicht mehr, wie das folgende Beispiel lehrt.

5.8.22. Beispiel. Sei $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n^2 \le x \le (n+1)^2, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \tag{5.8.65}$$

dann konvergiert (f_n) gleichmäßig nach 0, aber

$$\int_0^\infty f_n = \frac{2n+1}{n} \to 2. \tag{5.8.66}$$

5.8.23. Theorem. *Sei $I = [a, \infty)$ und $f_n \in R_{loc}(I, E)$ eine Folge von Funktionen, die lokal gleichmäßig nach einer Funktion f konvergieren. Nehme ferner an, daß die uneigentlichen Integrale $\int_a^\infty f_n$ gleichmäßig konvergieren, dann ist f lokal Riemann integrabel, $\int_0^\infty f$ existiert und*

$$\lim_n \int_a^\infty f_n = \int_a^\infty f. \tag{5.8.67}$$

Beweis. (i) $f \in R_{loc}(I, E)$ folgt sofort aus Theorem 5.2.12 auf Seite 265.

(ii) Gleichmäßige Konvergenz der Integrale bedeutet, daß die gleichmäßige Cauchybedingung

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{R>a}{\exists}\ \underset{x,y\ge R}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \left\| \int_x^y f_n \right\| < \epsilon \tag{5.8.68}$$

erfüllt ist, vgl. Definition 1.6.1 auf Seite 89.

Hieraus folgt unmittelbar, daß $\int_a^\infty f$ konvergiert, denn wegen der gleichmäßigen Konvergenz der f_n auf kompakten Intervallen genügt dann f der Cauchybedingung

$$\left\| \int_x^y f \right\| \le \epsilon \qquad \forall\, x, y \ge R. \tag{5.8.69}$$

(iii) Zum Beweis von (5.8.67) geben wir uns $\epsilon > 0$ vor. Dann existiert $R > a$, so daß

$$\left\| \int_R^\infty f_n \right\| + \left\| \int_R^\infty f \right\| < \epsilon \qquad \forall\, n, \tag{5.8.70}$$

wie man sofort aus (5.8.68) und (5.8.69) abliest, indem man dort $x = R$ setzt und $y \to \infty$ streben läßt.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf $[a, R]$ gibt es ferner n_0, so daß

$$\left\| \int_a^R (f - f_n) \right\| < \epsilon \qquad \forall\, n \ge n_0, \tag{5.8.71}$$

und daher erhalten wir für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\Big\| \int_a^\infty (f - f_n) \Big\| &\leq \Big\| \int_a^R (f - f_n) \Big\| + \Big\| \int_R^\infty (f - f_n) \Big\| \\ &\leq \epsilon + \Big\| \int_R^\infty f \Big\| + \Big\| \int_R^\infty f_n \Big\| \leq 2\epsilon.\end{aligned} \tag{5.8.72}$$

□

5.8.24. Bemerkung. Eine Folge von uneigentlichen Integralen $\int_a^\infty f_n$ ist gleichmäßig konvergent, wenn eine Funktion $g \in R_{loc}([a, \infty), \mathbb{R}_+)$ existiert, so daß

$$\int_a^\infty g < \infty \quad \text{und} \quad \|f_n\| \leq g \quad \forall\, n. \tag{5.8.73}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

5.8.25. Aufgaben.

1 Die sog. *Gammafunktion* ist in $\mathbb{R}_+^*$ definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Man beweise bitte

(i) $\Gamma(x)$ ist für $x > 0$ wohldefiniert, da das Integral absolut konvergiert.

(ii) $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(iii) $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ und für die Ableitungen gilt

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_o^\infty (\log t)^n e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

(iv) Die Gammafunktion läßt sich auch in $\{ z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0 \}$ definieren und genügt dort dem Analogon von (ii).

5.9. Parameterabhängige Integrale

Wir betrachten Funktionen f, die ein kartesisches Produkt in einen Banachraum abbilden, $f : I \times \Omega \to E$. I ist ein kompaktes Intervall, $I = [a, b]$, und Ω entweder ein allgemeiner metrischer Raum, eine offene Teilmenge von $\mathbb{K}$ oder ebenfalls ein Intervall; in letzterem Falle ersetzen wir dann meist Ω durch das Symbol J, $J = [\alpha, \beta]$.

5.9.1. Proposition. *Sei Ω ein metrischer Raum und $f \in C^0(I \times \Omega, E)$, dann ist*

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)\, dt \tag{5.9.1}$$

stetig in Ω.

Beweis. (i) Sei $x_n \to x_0$ eine konvergente Folge aus Ω. Dann ist $K = \{x_0\} \cup \{\, x_n : n \in \mathbb{N}\,\}$ kompakt—die Folgenkompaktheit läßt sich mühelos überprüfen—und wenn wir jetzt nur die Einschränkung von f auf die kompakte Menge $I \times K$ betrachten, ohne an der Bezeichnung von f etwas zu ändern, so ist f gleichmäßig stetig, vgl. Proposition 2.3.14 auf Seite 125.

(ii) Setze $f_n = f(\cdot, x_n)$ und $g = f(\cdot, x_0)$, dann konvergiert, wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f, f_n gleichmäßig nach g, und wir erhalten aus Theorem 5.2.12 auf Seite 265

$$\int_a^b f(t, x_0) = \int_a^b g = \lim_n \int_a^b f_n = \lim_n \int_a^b f(t, x_n). \tag{5.9.2}$$

$\square$

5.9.2. Definition (partielle Ableitung)**.** (i) Seien $\Omega_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, n$, nichtleere Mengen, E ein Banachraum und $f : \Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i \to E$ eine Abbildung. Die Elemente des kartesischen Produktes bezeichnen wir mit $x = (x^i)$. Gelte für ein festes k $\Omega_k \subset \mathbb{K}$, dann heißt f in $x_0 \in \Omega$ *partiell differenzierbar* nach x^k, falls $x_0^k \in \overset{\circ}{\Omega}_k$ und die Abbildung

$$g(x^k) = f(x_0^1, \ldots, x_0^{k-1}, x^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^n) \tag{5.9.3}$$

in x_0^k differenzierbar ist. Wir bezeichnen die partielle Ableitung von f nach x^k im Punkte x_0 mit $\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0)$ oder auch mit $D_k f(x_0)$.

Ist Ω_k offen und f in ganz Ω partiell nach x^k differenzierbar, so nennen wir f bez. x^k *partiell differenzierbar* und bezeichnen die partielle Ableitung von f nach x^k mit $\frac{\partial f}{\partial x^k}$ oder mit $D_k f$. $D_k f$ ist dann eine Abbildung von Ω nach E.

Ist die partielle Ableitung nach x^k stetig, so heißt f *stetig partiell differenzierbar* nach x^k.

Völlig analog können wir auch partielle Ableitungen höherer Ordnung von f nach x^k definieren. Wir bezeichnen die partielle Ableitung m-ter Ordnung von f nach x^k mit $\frac{\partial^m f}{(\partial x^k)^m}$ oder auch mit $\underbrace{D_k \cdots D_k}_{m} f$.

(ii) Sei jetzt $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{K}^n$ offen, so existiert zu jedem $x_0 \in \Omega$ ein offener Polyzylinder[7] $P = P(x_0, r) \subset \Omega$, so daß wir in x_0 die partiellen Ableitungen von f nach x^i, $1 \leq i \leq n$, definieren können. Wir bezeichnen sie mit $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ bzw. $D_i f(x_0)$.

Existieren die partiellen Ableitungen von f in jedem Punkte $x \in \Omega$, so nennen wir f in Ω partiell differenzierbar. Entsprechend heißt f in Ω stetig partiell differenzierbar, falls die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ stetig sind.

Der wichtigste Fall ist der, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

5.9.3. Theorem. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{K}$ offen und $f, \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(I \times \Omega, E)$, dann ist*

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)\, dt \tag{5.9.4}$$

stetig differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\, dt. \tag{5.9.5}$$

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ und $B_\delta(x_0) \subset \Omega$. Betrachten wir dann für $x \in \dot{B}_\delta(x_0)$ den Differenzenquotienten von F, so ist

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0}\, dt \tag{5.9.6}$$

und

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)\, dt = \tag{5.9.7}$$

$$\int_a^b \Big(\frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0) \Big)\, dt.$$

[7] Vgl. Definition 4.4.1 auf Seite 240. P ist nichts anderes als eine Kugel bez. der Produktmetrik.

Hieraus erhalten mittels der Dreiecksungleichung und des MWS

$$\begin{aligned} \|\cdots\| &\le \int_a^b \|f(t,x) - f(t,x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)(x-x_0)\| \tfrac{1}{|x-x_0|} \\ &\le \int_a^b \sup_{\xi\in[x_0,x]} \Big\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\Big\|, \end{aligned} \tag{5.9.8}$$

vgl. Corollar 3.2.9 auf Seite 172, und wir sehen, daß

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,dt. \tag{5.9.9}$$

Die Stetigkeit von F' folgt aus Proposition 5.9.1. □

5.9.4. Theorem (Kettenregel). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{K}^n$ offen und $\Phi \in C^0(\Omega, E)$ stetig partiell differenzierbar.*[8] *Sei ferner $\Lambda \subset \mathbb{K}$ offen und $\varphi : \Lambda \to \Omega$ in $\xi_0 \in \Lambda$ differenzierbar, dann ist die Komposition $\Psi = \Phi \circ \varphi$ in ξ_0 differenzierbar und die Ableitung von Ψ berechnet sich nach der Kettenregel*

$$\Psi'(\xi_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{d\varphi^i}{d\xi} \tag{5.9.10}$$

mit den entsprechenden Argumenten auf der rechten Seite der Gleichung.

Beweis. Sei $\xi \in \Lambda$, dann ist

$$\begin{aligned} &\Phi(\varphi(\xi)) - \Phi(\varphi(\xi_0)) \\ &= \Phi(\varphi^1(\xi), \varphi^2(\xi), \dots, \varphi^n(\xi)) - \Phi(\varphi^1(\xi_0), \varphi^2(\xi), \dots, \varphi^n(\xi)) \\ &+ \Phi(\varphi^1(\xi_0), \varphi^2(\xi), \dots, \varphi^n(\xi)) - \Phi(\varphi^1(\xi_0), \varphi^2(\xi_0), \dots, \varphi^n(\xi)) \\ &\cdots \\ &+ \Phi(\varphi^1(\xi_0), \varphi^2(\xi_0), \dots, \varphi^n(\xi)) - \Phi(\varphi^1(\xi_0), \varphi^2(\xi_0), \dots, \varphi^n(\xi_0)) \end{aligned} \tag{5.9.11}$$

Wählen wir ξ nahe bei ξ_0, so daß $\varphi(\xi) \in B_\delta(\varphi(\xi_0)) \subset \Omega$, dann können wir auf jede der n Differenzen auf der rechten Seite von (5.9.11) den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden—wir wollen dies an Hand der ersten Differenz demonstrieren—und erhalten, wenn wir die konvexe Kombination

$$x_t = (t\varphi^1(\xi) + (1-t)\varphi^1(\xi_0), \varphi^2(\xi), \dots, \varphi^n(\xi)), \quad 0 \le t \le 1, \tag{5.9.12}$$

[8] Wir werden später sehen, daß die Annahme, Φ stetig, automatisch erfüllt ist, wenn die Funktion stetig partiell differenzierbar ist.

betrachten und $f(t) = \Phi(x_t)$ setzen,

$$\begin{aligned} &\Phi(\varphi^1(\xi), \varphi^2(\xi), \dots, \varphi^n(\xi)) - \Phi(\varphi^1(\xi_0), \varphi^2(\xi), \dots, \varphi^n(\xi)) \\ &= f(1) - f(0) = \int_0^1 \frac{df}{dt} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_t)\bigl(\varphi^1(\xi) - \varphi^1(\xi_0)\bigr). \end{aligned} \tag{5.9.13}$$

Beim Schritt von der zweiten Zeile zur dritten haben wir die bereits bewiesene Kettenregel, Theorem 3.1.13 auf Seite 165, benutzt.

Eine entsprechende Darstellung erhalten wir auch für die anderen Differenzen, natürlich mit verschiedenen konvexen Kombinationen. Schreiben wir $x(t,i)$ für die konvexe Kombination, die wir bei der i-ten Differenz betrachten, so ergibt sich

$$\Psi(\xi) - \Psi(\xi_0) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}(x(t,i))\bigl(\varphi^i(\xi) - \varphi^i(\xi_0)\bigr). \tag{5.9.14}$$

Dividieren wir jetzt durch $\xi - \xi_0 \neq 0$ und lassen dann ξ nach ξ_0 streben, so folgt aus der Stetigkeit der $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^i}$ und der Differenzierbarkeit von φ die Behauptung, da

$$\lim_{\xi \to \xi_0} x(t,i) = \varphi(\xi_0) \qquad \forall\, i. \tag{5.9.15}$$

□

5.9.5. Corollar. *Seien die Voraussetzungen von Theorem 5.9.3 erfüllt, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und seien $\varphi, \psi : \Omega \to I$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so ist*

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t,x)\, dt \tag{5.9.16}$$

in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= f(\psi(x_0), x_0)\, \psi'(x_0) - f(\varphi(x_0), x_0)\, \varphi'(x_0) \\ &\quad + \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)\, dt. \end{aligned} \tag{5.9.17}$$

Beweis. Wir wenden die gerade bewiesene Kettenregel auf die Funktion

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = \int_{x^2}^{x^1} f(t, x^3)\, dt \tag{5.9.18}$$

mit

$$x^1 = \psi(x), \quad x^2 = \varphi(x), \quad x^3 = x \tag{5.9.19}$$

an, und beachten dabei, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = f(x^1, x^3), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} &= -f(x^2, x^3), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} &= \int_{x^2}^{x^1} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^3)\, dt. \end{aligned} \tag{5.9.20}$$

□

5.9.6. Bemerkung. Die in Theorem 5.9.4 benutzte Beweismethode, eine Differenz von Funktionswerten mittels einer geeigneten konvexen Kombination der Argumente durch ein Integral über die Ableitung auszudrücken, läßt sich bei vielen Problemen erfolgreich anwenden, und sie sollte zu den Standardhilfsmitteln eines jeden Mathematikers gehören.

5.9.7. Theorem (Doppelintegrale)**.** *Seien $I = [a, b]$, $J = [\alpha, \beta]$ kompakte Intervalle und $f \in C^0(I \times J, E)$, so ist*

$$\int_\alpha^\beta \Big(\int_a^b f(t, x)\, dt \Big)\, dx = \int_a^b \Big(\int_\alpha^\beta f(t, x)\, dx \Big)\, dt. \tag{5.9.21}$$

Beweis. Beide Doppelintegrale sind sinnvoll nach Proposition 5.9.1. Betrachte die Funktionen

$$\varphi(y) = \int_\alpha^y \Big(\int_a^b f(t, x)\, dt \Big)\, dx \tag{5.9.22}$$

und

$$\psi(y) = \int_a^b \Big(\int_\alpha^y f(t, x)\, dx \Big)\, dt. \tag{5.9.23}$$

Sie sind differenzierbar in $\overset{\circ}{J}$ wegen Proposition 5.9.1 und Theorem 5.9.3, und es gilt

$$\varphi'(y) = \int_a^b f(t, y)\, dx = \psi'(y), \tag{5.9.24}$$

sowie $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$. Sie stimmen daher nach Corollar 3.2.10 auf Seite 172 überein. □

Dieses Resultat läßt sich sofort auf *Mehrfachintegrale* verallgemeinern, wobei das Mehrfachintegral durch sukzessive Ausführung der Integration nach den einzelnen Integrationsvariablen definiert ist.

5.9.8. Theorem (Mehrfachintegrale). *Seien $I_i = [a_i, b_i], i = 1, \ldots, n$, kompakte Intervalle, E ein Banachraum und $f \in C^0(\prod_{i=1}^n I_i, E)$, so ist*

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \cdots dx^n$$

wohldefiniert und von der Integrationsreihenfolge unabhängig (Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge bei iterierten Integralen).

Beweis. Induktion nach n; Übungsaufgabe.

Parameterabhängige uneigentliche Integrale

Im folgenden wollen wir parameterabhängige *uneigentliche* Integrale betrachten und versuchen, ähnliche Resultate wie eben herzuleiten, wobei wir der Einfachheit halber nur Integrale mit unbeschränktem Integrationsbereich $I = [a, \infty)$ behandeln. Die Funktionen sind wieder Banachraum-wertig.

5.9.9. Proposition. *Sei $I = [a, \infty)$, Ω ein metrischer Raum und sei $f \in C^0(I \times \Omega, E)$. Nehme an, daß die Integrale*

$$F(x) = \int_a^\infty f(t, x)\, dt \tag{5.9.25}$$

gleichmäßig bezüglich $x \in \Omega$ konvergieren, dann ist F stetig in Ω.

Beweis. (i) Wir gehen ähnlich vor, wie beim Beweis von Proposition 5.9.1. Sei $x_n \to x_0$ eine konvergente Folge aus Ω. Dann ist $K = \{\, x_n : n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{x_0\}$ kompakt und, wenn wir f auf $I \times K$ einschränken, f lokal gleichmäßig stetig.

(ii) Die Funktionenfolge $f_n = f(\cdot, x_n)$ konvergiert daher lokal gleichmäßig nach $g = f(\cdot, x_0)$, woraus nach Theorem 5.8.23 auf Seite 294 die Behauptung folgt. $\square$

5.9.10. Proposition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, $f \in C^0(I \times \Omega, E)$ stetig partiell differenzierbar nach x und nehme an, daß*

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt \quad \text{gleichmäßig konvergiert} \tag{5.9.26}$$

und

$$\int_a^\infty f(t,x)\,dt \qquad \forall\, x \in \Omega \quad \text{konvergiert.} \tag{5.9.27}$$

Dann konvergieren die Integrale

$$F(x) = \int_a^\infty f(t,x)dt \tag{5.9.28}$$

lokal gleichmäßig in Ω; F ist stetig differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt. \tag{5.9.29}$$

Beweis. Sei $a \leq t_n \to \infty$ eine beliebige Folge. Setze

$$F_n(x) = \int_a^{t_n} f(t,x)\,dt, \tag{5.9.30}$$

so gilt nach Voraussetzung und wegen Theorem 5.9.3

$$F_n(x) \to F(x) \qquad \forall\, x \in \Omega \tag{5.9.31}$$

und

$$F_n'(x) = \int_a^{t_n} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt \quad \rightrightarrows \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt. \tag{5.9.32}$$

Nach Theorem 3.4.3 auf Seite 182 ist daher F stetig differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$F'(x) = \lim_n F_n'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt. \tag{5.9.33}$$

Es bleibt noch die lokal gleichmäßige Konvergenz der Integrale in (5.9.28) zu beweisen. Hierzu genügt es, die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge F_n in (5.9.31) in einer Kugel $B = B_\delta(x_0) \subset \Omega$ nachzuweisen.

Dies folgt aber aus dem MWS, Theorem 3.2.8 auf Seite 172, mit dessen Hilfe wir schließen

$$\begin{aligned} &\|(F_n(x) - F(x)) - (F_n(x_0) - F(x_0))\| \\ &\qquad \leq \sup_{\xi \in [x_0,x]} \|F_n'(\xi) - F'(\xi)\|\,|x - x_0|, \end{aligned} \tag{5.9.34}$$

und somit gilt für alle $x \in B$

$$\begin{aligned} \|F_n(x) - F(x)\| \leq{} & \|F_n(x_0) - F(x_0)\| \\ & + \sup_{\xi \in \Omega} \|F_n'(\xi) - F'(\xi)\|\,\delta. \end{aligned} \tag{5.9.35}$$

Die Behauptung folgt nun aus (5.9.31) und (5.9.32). □

5.9.11. Proposition. *Sei* $J = [\alpha, \beta]$, $f \in C^0(I \times J, E)$ *und sei*

$$F(x) = \int_a^\infty f(t, x)\, dt \tag{5.9.36}$$

gleichmäßig konvergent, dann ist

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta F(x)\, dx &= \int_\alpha^\beta \int_a^\infty f(t, x)\, dt\, dx \\ &= \int_a^\infty \int_\alpha^\beta f(t, x)\, dx\, dt.\end{aligned} \tag{5.9.37}$$

Beweis. F ist stetig auf J, so daß das linke Integral wohldefiniert ist. Sei $a \leq t_n \to \infty$ eine beliebige Folge, so erhalten wir nach Theorem 5.9.7

$$\int_\alpha^\beta \int_a^{t_n} f(t, x)\, dt\, dx = \int_a^{t_n} \int_\alpha^\beta f(t, x)\, dx\, dt \tag{5.9.38}$$

und schließen wegen der gleichmäßigen Konvergenz von F und Theorem 5.2.12 auf Seite 265 weiter

$$\int_\alpha^\beta \int_a^\infty f(t, x)\, dt\, dx = \lim_n \int_a^{t_n} \int_\alpha^\beta f(t, x)\, dx\, dt. \tag{5.9.39}$$

□

Auf die Annahme, $\int_a^\infty f(t, x) d\,t$ gleichmäßig konvergent, kann man nicht verzichten, da sich sonst leicht Gegenbeispiele konstruieren lassen, vergleiche das folgende Beispiel.

5.9.12. Beispiel. Genüge $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ der Bedingung

$$f(0) = \lim_{t \to \infty} f(t), \tag{5.9.40}$$

so gilt

$$F(x) = \int_0^\infty f'(xt)\, dt = \frac{1}{x} f(xt)\Big|_0^\infty \equiv 0 \tag{5.9.41}$$

in $\mathbb{R}_+^*$, d.h. für jeden Wert $\beta > 0$ ist

$$\int_0^\beta F(x)\, dx = 0. \tag{5.9.42}$$

Andererseits erhalten wir für $t > 0$

$$\int_0^\beta f'(f(xt)\, dx = \frac{1}{t}(f(\beta t) - f(0)), \tag{5.9.43}$$

und somit

$$\int_0^\infty \int_0^\beta f'(xt)\,dx\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{t}(f(\beta t) - f(0))\,dt. \tag{5.9.44}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist i. allg. von 0 verschieden; wähle z.B. $f(t) = te^{-t}$, so geht die rechte Seite von (5.9.44) über in

$$\int_0^\infty \beta e^{-\beta t}\,dt = 1. \tag{5.9.45}$$

Doppelintegrale mit unbeschränktem Integrationsbereich

Zum Schluß wollen wir den Fall diskutieren, daß auch das Intervall J unbeschränkt ist, und zwar ebenfalls von der Art $J = [\alpha, \infty)$.

5.9.13. Theorem. *Sei $f \in C^0(I \times J, E)$ und nehme an, daß die uneigentlichen Integrale*

$$\int_a^\infty \|f(t,x)\|\,dt \quad \text{und} \quad \int_\alpha^\infty \|f(t,x)\|\,dx \tag{5.9.46}$$

gleichmäßig konvergieren. Wenn dann eines der Doppelintegrale

$$\int_a^\infty \int_\alpha^\infty \|f(t,x)\|\,dx\,dt \quad \text{bzw.} \quad \int_\alpha^\infty \int_a^\infty \|f(t,x)\|\,dt\,dx \tag{5.9.47}$$

existiert, dann existieren beide und stimmen überein.

Beweis. Nehme an, daß $\int_a^\infty \int_\alpha^\infty \|f(t,x)\|\,dx\,dt$ existiert. Sei $\beta > \alpha$, dann ist nach Proposition 5.9.11

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \int_a^\infty \|f(t,x)\|\,dt\,dx &= \int_a^\infty \int_\alpha^\beta \|f(t,x)\|\,dx\,dt \\ &\leq \int_a^\infty \int_\alpha^\infty \|f(t,x)\|\,dx\,dt, \end{aligned} \tag{5.9.48}$$

d.h. das zweite Doppelintegral ist ebenfalls konvergent und es gilt die Abschätzung

$$\int_\alpha^\infty \int_a^\infty \|f(t,x)\|\,dt\,dx \leq \int_a^\infty \int_\alpha^\infty \|f(t,x)\|\,dx\,dt. \tag{5.9.49}$$

Wiederholen wir die Argumentation, diesmal mit vertauschter Reihenfolge, so erhalten wir die andere Ungleichung. □

5.9.14. Corollar. *Erfülle f die Voraussetzungen von Theorem 5.9.13, so existieren die Doppelintegrale*

$$\int_a^\infty \int_\alpha^\infty f(t,x)\,dx\,dt, \quad \int_\alpha^\infty \int_a^\infty f(t,x)\,dt\,dx \tag{5.9.50}$$

und sind gleich.

Beweis. (i) Da E ein Banachraum ist, zieht absolute Konvergenz natürlich einfache Konvergenz nach sich, d.h. die Integrale

$$F(x) = \int_a^\infty f(t,x)\,dt, \quad G(t) = \int_\alpha^\infty f(t,x)\,dx \tag{5.9.51}$$

konvergieren *gleichmäßig* und sind stetige Funktionen in x bzw. t. Ferner konvergieren nach Theorem 5.9.13 die uneigentlichen Integrale über F bzw. G absolut und damit auch die Doppelintegrale in (5.9.50).

(ii) Zum Beweis der Gleichheit beachten wir, daß wegen der gleichmäßigen Konvergenz der uneigentlichen Integrale für alle $n > \alpha$ gilt

$$\int_a^\infty \int_\alpha^n f(t,x)\,dx\,dt = \int_\alpha^n \int_a^\infty f(t,x)\,dt\,dx, \tag{5.9.52}$$

vgl. Proposition 5.9.11.

Definieren wir G_n durch

$$G_n(t) = \int_\alpha^n f(t,x)\,dx, \tag{5.9.53}$$

so konvergiert einmal G_n gleichmäßig (nach G) und zweitens das uneigentliche Integral $\int_a^\infty G_n(t)\,dt$, denn es existiert eine gleichmäßig absolut konvergente Majorante $\int_\alpha^\infty \|f(t,x)\|\,dx$, da

$$\|G_n(t)\| \le \int_\alpha^n \|f(t,x)\|\,dx \le \int_\alpha^\infty \|f(t,x)\|\,dx, \tag{5.9.54}$$

vgl. Bemerkung 5.8.24.

Wir können daher Theorem 5.8.23 anwenden und aus (5.9.52) schließen

$$\lim_n \int_\alpha^n \int_a^\infty f(t,x)\,dx\,dt = \int_a^\infty \lim_n \int_\alpha^n f(t,x)\,dx\,dt, \tag{5.9.55}$$

i.e. aber gerade die behauptete Gleichheit der Doppelintegrale in (5.9.50). □

5.9.15. Aufgaben.

1 Beweise Theorem 5.9.8.

2 Sei $I = [a, b]$, E ein Banachraum, dann läßt sich jede Riemann integrable Funktion $f \in R(I, E)$ in einer beliebigen L^p-Norm, $1 \le p < \infty$, durch Treppenfunktionen approximieren, vgl. Definition 5.3.3 auf Seite 268, und jede Treppenfunktion wiederum durch stetige Funktionen, d.h. $C^0(I, E)$ liegt bez. einer jeden endlichen L^p-Norm dicht in $R(I, E)$.

3 Sei $0 \le \eta \in C_c^\infty((-1, 1))$ und $\int_{-1}^1 \eta = 1$. Setze $\eta_\epsilon(t) = \epsilon^{-1}\eta(\frac{t}{\epsilon})$ mit $\epsilon > 0$, dann gilt

$$0 \le \eta_\epsilon \in C_c^\infty((-\epsilon, \epsilon)) \qquad \text{und} \qquad \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta_e = 1.$$

Wir nennen η_ϵ eine *Diracfolge*, da aus der Behauptung in der Teilaufgabe (ii) folgt, daß $\eta_\epsilon(x_0 - \cdot)$ im *Distributionssinne* nach dem *Diracmaß* δ_{x_0} konvergiert; eine eingehendere Erklärung können wir allerdings erst in Band II geben.[9]

Sei nun E ein Banachraum und $I = [a, b]$ ein Intervall. Definiere dann für $f \in R(I, E)$

$$f_\epsilon(x) = \int_a^b \eta_\epsilon(x - t) f(t)\, dt,$$

so gilt

(i) $f_\epsilon \in C^\infty(I, E)$.

(ii) f stetig in $x_0 \implies \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(x_0) = f(x_0)$.

(iii) Sei $J \Subset (a, b)$ ein offenes Intervall und $f \in C^k(I, E)$, $k \ge 0$, so konvergiert f_ϵ in $C^k(\bar{J}, E)$ nach f.

(iv) Für alle $f \in R(I, E)$, $J \Subset (a, b)$ und $1 \le p < \infty$ gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|f - f_\epsilon\|_{p, \bar{J}} = 0.$$

(v) $C_c^\infty(\mathring{I}, E)$ liegt bezüglich jeder L^p-Norm, $1 \le p < \infty$, dicht in $R(I, E)$.

(vi) Sei $f \in C^0(I)$ und gelte

$$\int_a^b f\eta = 0 \qquad \forall\, \eta \in C_c^\infty(\mathring{I}),$$

so ist $f \equiv 0$.

[9] Das Diracmaß δ_{x_0} läßt sich als lineares stetiges Funktional auf $C^0(I, E)$ definieren durch die Festsetzung $\langle \delta_{x_0}, f \rangle = f(x_0)$.

(vii) Man zeige, daß eine Funktion η mit den verlangten Eigenschaften existiert.
Hinweis: Beachte Ziffer 4.4.17 auf Seite 251.

Man nennt f_ϵ eine *Mollifizierung* (Glättung) von f—wegen (i); η heißt *Mollifizierungskern* oder auch *Friedrichsscher Mollifier*.

Literaturverzeichnis

[1] H. Amann & J. Escher, *Analysis I*, Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 1998.

[2] J. Dieudonné, *Foundations of modern Analysis*, Academic Press, New-York - London, 1960.

[3] P. R. Halmos, *Naive Mengenlehre*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1976.

[4] E. Kamke, *Mengenlehre*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1962.

[5] H. J. Kowalsky, *Lineare Algebra*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1967.

[6] A. Tarski, *Einführung in die mathematische Logik*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1977.

Verzeichnis der Symbole

$((a_n))$ 62

A/R 27

$A \Subset V$ 129

$A \prec B$ 20

$A \dot{\cup} B$ 13

$A \sim B$ 20

$B_r(x_0)$ 101

$C^0(E, F)$ 226

$C^0(\Omega)$ 167

$C^0(\Omega, F)$ 167

$C^0(\bar{\Omega}, F)$ 167

$C^\omega(\Omega, E)$ 249

$C^\infty(\Omega, F)$ 167

$C^\infty(\bar{\Omega}, F)$ 167

$C^k(\Omega, F)$ 167

$C^k(\bar{\Omega}, F)$ 167

$C_b^0(E, F)$ 226

$D(f)$ 16

$D_k f$ 296

E^* 152

$F(E, \mathbb{K})$ 233

$F\big|_{x_1}^{x_2}$ 271

$L(E, F)$ 151, 163

$N(A)$ 152

$P(\mathbb{K}, E)$ 207

$P(\mathbb{K}^n)$ 233

$P(\mathbb{K}^n, F)$ 233

$P \prec P'$ 257

$P_1 \vee P_2$ 257

$R(I)$ 263

$R(I, E)$ 263

$R(f)$ 16

$R_n(f, x_0)$ 219

$R_{loc}(I, E)$ 284

$S(P, Z)$ 258

$S(f, P, Z)$ 258

$S_r(x_0)$ 101

$T(f, x_0)$ 219

$T_n(f, x_0)$ 219

$[f]_{0,\alpha}$ 227

$[x, y]$ 141

$\forall x$ 4

$\Gamma(x)$ 295

Γ_+^n 197

$\exists x$ 4

$\operatorname{Grad} f$ 234

$\Sigma(f)$ 281

$\Sigma_\epsilon(f)$ 281

$|f|_0$ 227

$|f|_{n,\bar{\Omega}}$ 168

$|f|_{0,E}$ 227

$\arccos$ 201

arccot 201

$\arcsin$ 201

$\arctan$ 201

$\arg_l z$ 205

$\arg z$ 96, 202

$\bar{A}$ 103

$\bar{B}_r(x_0)$ 101

$\binom{n}{m}$ 49

$\operatorname{card} A$ 23

χ_A 154

$\cos$ 193

$\cosh x$ 203

$\cot x$ 199

$\complement A$ 14

$\operatorname{diam} E$ 78

$\frac{\partial^m f}{(\partial x^k)^m}$ 297

$\operatorname{graph} f$ 17

id_X 18

$\inf A$ 42

$\mathring{A}$ 103

$\int_a^b f$ 260

$\int f$ 271

$\operatorname{lc}(f, x)$ 207

$\operatorname{lc}(f, x, x_0)$ 207

$\max A$ 46

$\min A$ 46

$\mathcal{U}(x)$ 109

$\neg p$ 4

$\|A\|$ 151

$\|\cdot\|_\infty$ 79, 226

$\|\cdot\|_p$ 79

$\|f\|_\infty$ 226

$\|f\|_{n,\bar{\Omega}}$ 168

$\omega_f(A)$ 182

$\omega_f(x)$ 182

$\omega_f(x_0, r)$ 182

$\operatorname{osc}_f(A)$ 182

∂A 103

$\frac{\partial f}{\partial x^k}$ 296

π 195

pr_i 19

$A' \hookrightarrow A$ 18

$\int_a^\infty f$ 285

$\int_{-\infty}^\infty f$ 285

$\int_{-\infty}^a f$ 285

$\langle M\rangle$ 234

$\underbrace{D_k \cdots D_k}_{m} f$ 297

$\sigma(f, P)$ 257

$\operatorname{sign} a$ 100

$\sin$ 193

$\sinh x$ 203

$\langle\varphi, x\rangle$ 152

$\sup A$ 42

$\operatorname{supp} f$ 133

$\tan x$ 199

$\tanh x$ 203

$\mathrm{cl}(A)$ 103

$\mathrm{int}(A)$ 103

$d(A, B)$ 106

$d(x, B)$ 106

$f_n \rightrightarrows f$ 89

l_2 76

$p \Longleftrightarrow q$ 4

$p \Longrightarrow q$ 3

$p \vee q$ 3

$p \wedge q$ 2

$\mathbb{C}$ 14

$\mathbb{K}$ 96

$\mathbb{N}$ 14

$\mathbb{N}^*$ 15

$\mathbb{Q}$ 14

$\mathbb{R}^*$ 15

$\mathbb{R}$ 14

$\mathbb{Z}$ 14

$\mathbb{R}_+$ 15

Index

A

Abbildung 16
Abelsches Lemma 242
abgeschlossen 101, 116
abgeschlossene Kugel 101
Ableitung 159, 163
Abschneidefunktion 134
absolut integrierbar 286
absolut konvergent 81, 286
absolut summierbar 82
Absolutbetrag 40
abzählbar 21
Additionstheoreme 194
äquivalente Metriken 144
äquivalente Normen 80
Äquivalenz 4
Äquivalenzklasse 27
Äquivalenzrelation 27
affin 142
Algebra 232, 235
Allmenge 9
Allquantor 2, 4
alternierende harmonische Reihe 71
alternierende Reihen 70
analytisch 248
Anfangswertproblem 185
Arcusfunktionen 200
Argument von z 96
Arzelà, C. 229
Ascoli, G. 229
Assoziativitätstheorem 84
Aussageformen 1
Aussagen 1
Aussagenkalkül 2
Ausschöpfung 33, 129
Auswahlaxiom 20
Auswahlfunktion 20

B

Banachraum 79
Basis der Topologie 127, 149
bedingt konvergent 81
Berührpunkt 103
Bernouillesche Ungleichung 49, 56
beschränkt 78, 121
beschränkte Menge 42
Betrag 95
bijektiv 17
Bild 16
Binomialkoeffizienten 49
binomische Formel 98
Bogen 141
bogenzusammenhängend 141
Bolzano-Weierstraß 58, 74

C

Cantor 7, 26
Cauchyfolge 119
Cauchyfolge (C.F.) 60
Cauchysche Produktformel 86, 244

Cauchysches Diagonalverfahren 24
charakteristische Funktion 154
Cohen, P. 20
Cosinus 193
Cosinus hyperbolicus 203
Cotangens 199

D

De Morganschen Gesetze 6
Definitionsbereich 16
Diagonalfolge 231
dicht 107
Dichtheit der rationalen Zahlen 40
Diffeomorphismus 274
Differenzenquotient 159
Dini, U. 225
Diracfolge 306
Diracmaß 306
disjunkt 13
Disjunktion 3
diskrete Metrik 75
Distanz 106
divergent 62, 80
Divisionsalgorithmus 213
Doppelfolge 91
Doppelintegrale 300
Dreiecksungleichung 49, 73, 75, 76, 262
duale Norm 152
Dualraum 152
Durchmesser 78
Durchschnitt 12

E

echt rationale Funktion 213
Einbettung 39
Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung 252
Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung 248
Element 7
elementare Funktion 275
endlich 23
ϵ-Umgebung 51
erweiterte reelle Achse 114
euklidische Norm 72
euklidisches Skalarprodukt 71
Eulersche Formel 197
Eulersche Zahl 56, 223
Existenz der Inversen 174
Existenzquantor 2, 4
Exponentialfunktion 191
Extremalstellen 169

F

führender Koeffizient eines Polynoms 207
Fakultät 34
Familie 19
fast alle (f.a.) 51
fast überall (f.ü.) 280
feiner 257
feinere Topologie 150
Feinheit 257
Folge 19
folgenkompakt 121
Formel von de Moivre 206
Friedrichsscher Mollifier 307
Fundamentallemma der Fourierreihen 291
Fundamentalsatz der Algebra 211
Funktion 16
Funktionenalgebra 233

G

Gammafunktion 295
Gaußklammer 71
Gebiet 143
geometrische Reihe 62
gerade Funktion 194
geschlossene Kurve 141
gleichgradig stetig 227

gleichgradige Stetigkeit 227
gleichmäßig beschränkt 94
gleichmäßig Hölder-stetig 227
gleichmäßig konvergent 89, 181
gleichmäßig stetig 113
gleichmäßige Konvergenz 294, 295
Gödel, K 20
Grad eines Polynoms 207
Graph 17
Grenzwert 51
gröber 257
gröbere Topologie 150
Gronwallsches Lemma 186

H

Häufungspunkt 57, 77, 106
Häufungspunkt (HP) 57
Hahn-Banach 171
Halbierungsmethode 43
Halbnorm 227
halbstetig 154
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 270
Hausdorffscher Raum 109
Heine-Borel 122
hermitesch 97
Hilbertraum 79
höchstens abzählbar (h.a.) 21
höhere Ableitungen 167
Hölderhalbnorm 227
Hölderkonstante 227
Höldersche Ungleichung 79
Hölderstetigkeit 227
homöomorph 113
Homöomorphismus 113, 129
hyperbolische Funktionen 203

I

idempotent 96
identische Abbildung 18
Identitätssatz für Polynome 211
imaginäre Einheit 95
Imaginärteil 95
Implikation 3
induzierte Metrik 107
induzierte Topologie 109
Infimum 42
injektiv 17
Inklusion 18
Inklusionsabbildung 18
inneres Produkt 97
Integralkriterium 66
Integration von Folgen und Reihen 265
irrational 41
Isolierheit der Nullstellen 247
Isometrie 114
iterierte Integrale 301

K

kanonische Bilinearform 152
Kardinalzahl 23
kartesisches Produkt 15
kartesisches Produkt bez. einer Indexmenge 19
Kettenregel 165, 298
Koinzidenzmenge 117
kommutative Konvergenz 82
kommutatives Diagramm 18
Kommutator 153
kompakt 123
kompakt enthalten 129
kompakte Abbildung 232
Kompaktheit 121
Komplement 13
Komplementmenge 13
komplexe Multiplikation 95
komplexer Logarithmus 206
Komposition von Abbildungen 17
Konjugation 238
konjugiert komplex 95
konjugierte Exponenten 79, 223
Konjunktion 2

konkave Funktion 223
konvergent 62, 80
Konvergenz einer Folge 51
Konvergenzradius 69
konvexe Funktion 223
konvexe Menge 141
kritische Punkte 169
Kroneckersymbol 77
Kurve 140

L

Lagrangesche Restgliedabschätzung 222
Landausche Symbole 160
Lebesguesche Integrationstheorie 255
Lebesguesche Zahl 123
Leibnizsches Symbol 160
Limes 51
Limes inferior 59, 120
Limes superior 59, 120
Linearform 152
Lipschitz-stetig 227
Lipschitzkonstante 227
Logarithmus 191
lokal gleichmäßig konvergent 90
lokal integrierbar 284
lokal kompakt 127, 128
lokal zusammenhängend 135
lokales Minimum 169
L^p-Norm 268

M

Mächtigkeit 20
Majorante 42
Majorantenkriterium 64, 286
Maximum 40, 46
Mehrfachintegrale 301
metrischer Raum 75
Minimalfolge 126, 156
Minimum 40, 46
Minorante 42
Mittelwertsatz 170, 269
Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen 170
Mollifizierung 307
Monom 234
monoton fallend 173
monoton wachsend 173
monotone Folgen 55
Monotonie des Integrals 269
Multiindex 233

N

natürliche Einbettung 112
Negation 4
Neumannsche Reihe 153
normierter Raum 76
n- tupel 19
Nullmenge 280
Nullraum 152

O

oberhalbstetig 154
offen 101
offene Abbildung 130
offene Kugel 101
Ordnungsrelation 36
Oszillation 182

P

paarweise disjunkt 13
Parallelogrammgleichung 98
Parameter 140
Parametrisierung 140
Partialbruchzerlegung 214, 276
Partialsummen 62, 80
partiell differenzierbar 296
partielle Ableitung 296
partielle Integration 272
Partition 28, 255, 257
Periode 197
periodisch 197
Permutation 48

p-Norm 76, 79
Polarisationsformel 98
Polarkoordinaten 202
Polarkoordinatendarstellung 202
Polygonzug 142
Polynom 207
Polynom in mehreren Variablen 233
polynomiale Algebren 235
Polyzylinder 240
positiv homogen 73
Potenzgesetze 190
Potenzmenge 14
Potenzreihe 69, 184, 240
präkompakt 123
Prinzip der vollständigen Induktion 30
Produktmetrik 143
Produktregel 164
Produkttopologie 150
punktweise Konvergenz 89

Q

quadratische Form 98
Quantoren 1
Quotientenkriterium 65
Quotientenregel 164

R

Rand 103
Randpunkt 103
rationale Funktion 213
Realteil 95
reelle Zahlen 36
Regelintegral 255
Reihe 80
rekursive Definition 32, 34
Relation 26
relativ kompakt 124
Relativtopologie 107, 109
Restglied 163, 219
Restklasse 27
Restriktion einer Abbildung 18
Riemann integrabel 260
Riemannsche Summe 258
Riemannsches Integrabilitätskriterium 260
Riemannsches Integral
  bestimmtes 260
  unbestimmtes 271
Russelsche Antinomie 10

S

Satz von Arzelà-Ascoli 229
Satz von Dini 225
Schröder-Bernstein 21
Schwarzsche Ungleichung 72
semilinear 175
separabel 125, 127
Sesquilinearform 97
shift Operator 152
σ-kompakt 127
Signum 100
Sinus 193
Sinus hyperbolicus 203
Skalarprodukt 71, 72
Skalarproduktraum 72, 97, 98
Sphäre 101
stückweise affin 142
Stammfunktion 250, 271
stetig 110, 111
stetig differenzierbar 159
stetige Fortsetzung 117
Stetigkeitsmodul 182
Stone, M. 232
Stone-Weierstraß 236, 238
strikt monoton fallend 173
strikt monoton wachsend 173
striktes Minimum 169
stückweise stetig 268
stückweise von der Klasse C^m 268
Substitutionstheorem 244
sup-Norm 76, 226

Supremum 42
Supremumsnorm 226
surjektiv 17

T
Tangens 199
Tangens hyperbolicus 203
Taylorreihe 219, 250
Taylorsche Formel 218
Taylorsche Polynome 219
Teilbruch 214
Teilfamilie 19
Teilfolge 19
Teilmenge 8
Teilraum 107
Tietze-Urysohn 131
Topologie 101
topologischer Raum 108
total unzusammenhängend 140
Totalordnung 36
Träger einer Funktion 133
Transformationsregel 273
Treppenfunktion 268
trigonometrische Funktionen 193
trigonometrische Polynome 233
trigonometrische Umkehrfunktionen 200

U
überabzählbar 26
Überdeckung 28
Umgebungsbasis 103
Umgebungsfilter 101, 109
Umordnung 81
Umordnungsssatz 82
unendlich 23
unendlich oft differenzierbar 167
ungerade Funktion 194
unterhalbstetig 154
Urbildabbildung 17

V
verallgemeinerte binomische Formel 46
verallgemeinerter Mittelwertsatz 176
Verbindungsstrecke 141
Vereinigung 11
Verfeinerung 257
vergleichbare Topologien 150
Vielfachheit einer Nullstelle 210
vollständig 121

W
Wahrheitstafel 2
Weg 141
Weierstraß, K. 232
Wohlordnung 30
Wurzelkriterium 67

Y
Youngsche Ungleichung 223

Z
Zermelo, E. 20
Zielmenge 16
zusammenhängend 135
Zusammenhangskomponente 139
Zwischenwertsatz 137
zyklometrische Funktionen 201