GENERAL TOPOLOGY

CLAUS GERHARDT

ABSTRACT. This is in introduction to general topology.

Contents

1. Introduction

Ruprecht-Karls-Universität, Institut für Angewandte Mathematik, Im Neuenheimer Feld 294, 69120 Heidelberg, Germany
E-mail address: gerhardt@math.uni-heidelberg.de
URL: http://web.me.com/gerhardt/

Date: June 22, 2011.
Key words and phrases. Uniform spaces, nets, filters, Moore-Smith-sequences, convergence.
This work was supported by the DFG.

0. Topologische Grundlagen

0.1 Uniforme Räume

0.1.1. Def: Sei E eine Menge. Eine Abb. $d: E \times E \to \mathbb{R}$ heißt *Pseudometric*, falls

(i) $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$

(ii) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Beispiel: (i) $f: E \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

(ii) Jede Halbnorm

(iii) Sei $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varphi \nearrow$, $\varphi(0)=0$

und $\varphi(r+s) \leq \varphi(r) + \varphi(s)$

$\Rightarrow$

$\varphi \circ d$ ist Pseudometrik

0.1.2 Def

Sei E eine ~~Raum~~ Menge, $(d_\alpha)_{\alpha \in I}$

eine Familie von Pseudometriken

(d_α) heißt separierend, falls $\forall\, x \neq y$

~~o.~~

$\exists\, \alpha: \quad d_\alpha(x,y) > 0.$

0.1.3 Def

Ein ~~top. (se~~ (Hausdorffscher) top Raum

E heißt uniformer Raum, falls seine Topologie von einer Familie von Pseudometriken erzeugt wird. *)

<u>0.1.4 Satz</u>

Ein ~~top. Raum L~~ uniformer Raum E ist genau dann Hausdorffsch, wenn seine Top. von einem separierenden System von Pseudometriken erzeugt wird.

*) d.h. Umgebungsbasen eines Punktes $x \in E$ sind definiert durch

$$B_\varepsilon(x; J) := \{ y : \sup_{\alpha \in J} d_\alpha(x, y) < \varepsilon \}$$

$$J \subset I, \quad |J| < \infty$$

0.14a Def: Sei $\emptyset \neq D$ eine Menge. D heißt bzgl. der Halbordnung "$\geq$" *gerichtet*, falls ~~$m, n \in D$~~

(i) $m \geq n,\ n \geq p \Rightarrow m \geq p$

(ii) $m \geq m \quad \forall m \in D$

(iii) $\forall m, n \in D\ \exists p \in D:\ p \geq m,\ p \geq n$

Beispiele

1. $\mathbb{N}$ mit "$\geq$"

2. ~~$P(E)$ mit "$\geq$" = "$\subset$"~~

Die Menge der Umgebungen eines Punktes x_0, $\mathfrak{U}(x_0)$, ist gerichtet durch "$\subset$": Der Durchschnitt zweier Umgebungen ist wieder eine Umgebung

<u>0.1.4.b. Def</u>

(i) Ein <u>Netz</u> ~~(f, D)~~ ist ein Paar $(f, \geq)$, wobei f eine Funktion ist und "$\geq$" den Definitionsbereich von f richtet, $(f, D, \geq)$

(ii) Ein Netz ~~$(f, D, \geq)$~~ $(f_n, n \in D, \geq)$ ist <u>schließlich</u> Teil einer Menge A, falls

$$\exists\, n_0 : \quad f_n \in A \quad \forall\, n \geq n_0$$

(iii) Ein Netz $(f_n, n \in D, \geq)$ schneidet A <u>häufig</u>, falls

$$\forall_{m \in D} \quad \exists_{n \geq m} \quad f_n \in A$$

(iv) Liegt $(f_n, n \in D)$ häufig in A, so

ist die Menge

$$D' = \{ n \in D : f_n \in A \}$$

eine sog. kofinale ~~Menge~~ Teilmenge von D

$$\forall_{m \in D} \ \exists_{n \in D'} \ n \geq m.$$

(v) Ein Netz $(\cancel{f}x_\alpha, \alpha \in D)$ konvergiert

in einem top. Raum E nach x_0, falls

$$\forall_{U(x_0)} \ \exists_{\alpha_0} \ \forall_{\alpha \geq \alpha_0} \ x_\alpha \in U(x_0)$$

d.h. (x_α) liegt schließlich in $U(x_0)$

Ein Netz $(f_\alpha, \alpha \in D)$ heißt auch verallgemeinerte Moore-Smith-Folge.

0.1.5 Def:

(i) Eine verallgemeinerte Folge (x_λ)

in einem uniformen Raum $(E, (d_\alpha))$

heißt Cauchyfolge, falls $\forall \alpha, \forall \varepsilon > 0$

$\exists \lambda_0$:

$$\forall_{\mu, \lambda > \lambda_0} \; d_\alpha(x_\mu, x_\lambda) < \varepsilon$$

~~(ii)~~

0.1.6. Bem

$$x_\lambda \to x \iff d_\alpha(x_\lambda, x) \to 0 \quad \forall \alpha$$

<u>0. 1. ~~6~~ Def</u> $(d_\alpha)_A, (\tilde{d}_\beta)_B$

Zwei Familien von Pseudometriken heißen äquivalent, falls ~~sie die gleiche Top. erzeugen.~~ - 5a -

<u>~~§~~ 0. 1. ~~8~~ Satz</u>

Sei $(E,(d_\alpha)_{\alpha\in I})$ ein uniformer Raum. Dann existiert eine äquivalente Familie $(\tilde{d}_\alpha)_{\alpha\in I}$ mit $\tilde{d}_\alpha \leq 1$.

<u>Beweis</u> Definiere $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$\varphi(t) = \min(t,1)$

es zu jeder endlichen Teilmenge

$\bar{J} \in A$ eine Konstante c und ein $J \in B$

gibt, so daß

$$\sup_{\alpha \in \bar{J}} d_\alpha \leq c \cdot \cancel{\tilde{d}_\beta} \sup_{\beta \in J} \tilde{d}_\beta$$

und umgekehrt.

0.1.7 Bem

Zwei äquivalente Familien erzeugen die gleiche Top. Aber es gibt auch nicht äquivalente Familien, die die gleiche Top. erzeugen.

$$\Rightarrow \quad \varphi(0) = 0$$

$$\varphi \nearrow$$

$$\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$$

Definiere dann

$$\tilde{d}_\alpha = \varphi \circ d_\alpha$$

0.1.9 Satz

Ein uniformer Raum E, dessen Top durch eine Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Pseudometriken definiert wird, ist metrisierbar.

Bemerkung: o. B. d. A gelte $d_n \le 1$

$$d(x,y) := \sum_{n}^{(*)} 2^{-n} d_n(x,y)$$

(*) s. p. 7a

Produkträume

0. 1. 12 Def:

(i) Seien $(E_1, (d^1_\alpha)_{\alpha \in A})$, $(E_2, (d^2_\beta)_{\beta \in B})$ uniforme Räume, so ist $E = E_1 \times E_2$ ein uniformer Raum mit def. Pseudometriken

$$e_\alpha(x,y) = d^1_\alpha(pr_1 x, pr_1 y)$$

$$e_\beta(x,y) = d^2_\beta(pr_2 x, pr_2 y)$$

0.1.10 Def

Eine Familie von Pseudometriken $(d_\alpha)_{\alpha \in A}$ heißt gerichtet, falls es zu jedem $\alpha, \beta \in A$ ein $\gamma \in A$ gibt, so daß

$$\max(d_\alpha, d_\beta) \leq d_\gamma$$

0.1.11 Bem

Sei $(d_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Pseudometriken, so gibt es immer eine äquivalente gerichtete Familie $(\tilde{d}_\beta)_{\beta \in B}$.

Beweis: $B = \{ \mathcal{J} : \mathcal{J} \subset A, |\mathcal{J}| < \infty \}$

$$\tilde{d}_{\mathcal{J}} := \sup_{\alpha \in \mathcal{J}} d_\alpha$$

Offene Mengen in E sind solche der Form

$$\Omega \neq \Omega_1 \times \Omega_2$$

(ii) Sei $\left(E_\lambda, (d_{\alpha,\lambda})_{\alpha \in A_\lambda}\right)_{\lambda \in L}$ eine Familie von uniformen Räume. $E = \prod_{\lambda \in L} E_\lambda$ wird ein uniformer Raum durch die Pseudometriken

$$e_{\alpha,\lambda}(x,y) = d_{\alpha,\lambda}(pr_\lambda x, pr_\lambda y), \ \alpha \in A_\lambda$$

$\Omega \subset E$ ist genau dann offen, wenn es eine endliche Familie $J \subset L$ gibt, ~~so~~ und $\Omega_\lambda \subset E_\lambda$ offen, $\lambda \in J$, so daß

$$\prod_{\lambda \in L} \tilde{\Omega}_\lambda \subset \Omega \,, \quad \text{wobei}$$

$$\tilde{\Omega}_\lambda = \begin{cases} \Omega_\lambda, & \lambda \in J \\ E_\lambda, & \lambda \notin J \end{cases}$$

<u>Bew</u>: Die Umgebungsbasen eines Punktes $x = (x_\lambda)_{\lambda \in L}$ sind gegeben durch

$$\left\{ y : \sup_{\substack{\cancel{(\alpha,\lambda)\in} \\ \alpha \in \tilde{A}_\lambda \\ \lambda \in J}} d_{\alpha,\lambda}(pr_\lambda x, pr_\lambda y) < \varepsilon \right\}$$

wobei $|J| < \infty$, $|\tilde{A}_\lambda| < \infty$

$U = \prod_{\lambda \in L} \tilde{\Omega}_\lambda$ heißen die elementaren offenen Menge.

<u>0.1.13 Satz</u>

Sei $E = \prod_{\lambda \in L} E_\lambda$, F = top. und $f : F \to E$

$f_\lambda = pr_\lambda \circ f$. Dann ist f genau dann stetig, wenn jedes f_λ stetig ist.

<u>Beweis,</u>

(i) f stetig $\Rightarrow$ f_λ stetig

(ii) Sei jedes f_λ stetig und

$\Omega = \prod_{\lambda \in L} \Omega_\lambda$ eine elementare offene Menge

$\Rightarrow$

$$f^{-1}(\Omega) = \bigcap_{\lambda \in L} f_\lambda^{-1}(\Omega_\lambda)$$

= offen, da nur endl. Durchschnitt.

0.2. Gleichmäßig stetige Funktionen

0.2.1 Def.

Seien E, F uniforme Räume mit gerichteten Familien von Pseudometriken $(d_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(\tilde{d}_i)_{i \in I}$. $f: E \to F$ heißt glm. stetig, falls es zu jedem

Paar (i, ε) ein Paar (α, δ) gibt,

so daß

$$d_\alpha(x,y) < \delta \Rightarrow \tilde{d}_i(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

0.2.1 Satz

~~(i)~~ Die Komposition zweier glm. stetiger Abbildungen ist wieder glm. stetig

~~(ii)~~

0.2.2 Def

(i) Wir sagen, daß ein System von Pseudo-metriken eine uniforme Struktur auf E definiert.

(ii) Sei $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ zwei uniforme Strukturen auf E. $\mathfrak{U}_1$ heißt <u>feiner</u> als $\mathfrak{U}_2$, falls $id: (E, \mathfrak{U}_1) \to (E, \mathfrak{U}_2)$ glm. stetig ist.

(iii) Sei $f: E \to F$ eine Bijektion, E, F uniforme Räume. f heißt ein <u>Isomorphismus</u> und E und F heißen <u>isomorph</u>, falls f, f^{-1} glm. stetig sind.

0.2.3 Satz

Zwei Familien von Pseudometriken von E sind genau dann äquivalent, wenn die Identität bzgl. der beiden umfassenden Strukturen ein Isomorphismus ist.

0.3 Filter

0.3.1 Def

Sei E eine Menge. $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(E)$ heißt Filter, falls folgende Bed. erfüllt sind

(F_1) $A \in \mathcal{F}$ und $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

(F_2) ~~F_1, F_2~~ $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

(F_3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

0.3.2 Beispiel:

(i) Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x_0)$:

(ii) $\emptyset \neq A \subset E$,

$$\mathcal{F} = \{ B : A \subset B \}$$

(iii) Sei $|E| = \infty$

$$\mathcal{F} := \{ \complement A : A \subset E,\ |A| < \infty \}$$

Ist speziell $E = \mathbb{N}$, so heißt $\mathcal{F}$ der <u>Fréchetfilter</u>.

0.3.3 Def

(i) Sei $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ Filter. $\mathcal{F}_1$ heißt feiner als $\mathcal{F}_2$, oder $\mathcal{F}_2$ gröber als $\mathcal{F}_1$,

$$\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 ,$$

falls

$$A \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_1 .$$

„Gröber" ist eine Halbordnung auf der Menge aller Filter einer Menge E.

(ii) Sei $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Filtern auf E, $I \neq \emptyset$

Dann ist

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

ein Filter. $\mathcal{F}$ ist das Infimum aller $\mathcal{F}_i$.

$\cancel{\mathcal{F}_i \subset}$

(iii) Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(E)$.

<u>Frage</u>: $\exists$ ein Filter $\mathcal{F}$, so daß $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

<u>0.3.4 Satz</u>

Es gibt genau dann einen Filter $\mathcal{F}$, der $\mathcal{G}$ enthält, falls endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{G}$ ungleich leer sind.

<u>Beweis</u>

(i) Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Rightarrow$ ✓ (F_2)

(ii) Sei $\mathcal{G}'$ gleich der Menge der endlichen Durchschnitte und

$$\mathcal{F} := \{ B : \exists A \in \mathcal{G}' \text{ mit } A \subset B \}$$

$\mathcal{F}$ ist der <u>gröbste</u> Filter, der $\mathcal{G}$ enthält.

Wir sagen $\mathcal{G}$ <u>erzeugt</u> $\mathcal{F}$. $\mathcal{G}$ heißt auch <u>Subbasis</u>

0.3.5 Beispiel

Sei $(E, (d_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein uniformer Raum und $x_0 \in E$

$$B_{\varepsilon,\alpha}(x_0) := \{x : d_\alpha(x, x_0) < \varepsilon\}$$

ist Subbasis für den Umgebungsfilter. Basis, falls $\underset{(d_\alpha)}{I}$ gerichtet.

0.3.6 Satz

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf E und $A \subset E$. Dann existiert genau dann ein Filter $\mathcal{F}'$ der feiner als $\mathcal{F}$ ist und A enthält, falls A jedes Element von $\mathcal{F}$ trifft.

Bew: klar

0.3.6a Satz

Sei Φ eine Familie von Filtern auf E. Dann existiert genau dann das Supremum von Φ bzgl. "gröber", falls für alle endlichen Folgen $(\mathcal{A}_i)_{1 \leq i \leq n}$ und

$$A_i \in \mathcal{A}_i \text{ gilt } \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \neq \emptyset$$

Beweis

(i) $\exists \sup \Phi \Rightarrow$ ✓

(ii) $\mathcal{G} := \{$ {endl. Durchschnitte} $\}$ erzeugt einen Filter $\mathcal{A}$.

Filterbasen

0.3.7 Def

$\mathfrak{B}$ heißt Filterbasis für ~~ein Filter~~ $\mathcal{F}$,

falls

$$\mathcal{F} := \{B : \exists A \in \mathfrak{B},\ A \subset B\}$$

0.3.8 Satz

$\mathfrak{B}$ ist genau dann Filterbasis, falls

(B_1) $A, B \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists C\ \cancel{A \cap B} \in \mathfrak{B}$ mit $C \subset A \cap B$

(B_2) $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{B}$.

0.3.9 Def

Zwei Filterbasen heißen äquivalent, wenn sie denselben Filter erzeugen

Beispiel:

$B_{\frac{1}{n}}(0)$, $B_{2^{-n}}(0)$ sind äquivalente Basen.

0.3.10 Satz

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter. $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ ist Filterbasis von $\mathcal{F}$ dann und nur dann, wenn jede Menge von $\mathcal{F}$ eine Menge aus $\mathcal{B}$ enthält.

<u>Beweis</u> klar

(i) Sei $\mathcal{F} = \langle \mathcal{D} \rangle \Longrightarrow$ ✓

(ii) Gelte die Bed.

Setze

$$\mathcal{F}' = \{ B \subset E : \exists A \in \mathcal{D} \text{ mit } A \subset B \}$$

$\Longrightarrow$

a) $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$

und

b) $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, wegen (F_1)

<u>0.3.10a Bem</u>

~~(i)~~ Sei $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ Filterbasen in E. Dann gilt

(i) $\langle \mathfrak{B} \rangle \subset \langle \mathfrak{B}' \rangle \Leftrightarrow$ jede Menge von $\mathfrak{B}$ enthält eine Menge aus $\mathfrak{B}'$

(ii) $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}' \Leftrightarrow$ jede Menge aus $\mathfrak{B}$ enthält eine Menge aus $\mathfrak{B}'$ und umgekehrt.

Ultrafilter

0.3.11 Def

$\mathcal{A}$ heißt Ultrafilter auf E, falls kein Filter $\mathcal{A}'$ existiert, der strikt feiner ist als $\mathcal{A}$, ~~Ultram~~ d.h. ein Ultrafilter ist ein maximaler Filter,

0.3.12 ~~Satz~~ Thm

Sei $\mathcal{A}$ ein Filter auf E, dann existiert ein Ultrafilter, der feiner ist als $\mathcal{A}$.

Beweis:

Betrachte die Menge aller Filter, die feiner sind als $\mathcal{F}$. Da jede Kette eine obere Schranke besitzt, existiert ein max. Element (Zornsches Lemma).

0.3.13 Satz

Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf E. $A, B \subset E$ mit $A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F} \vee B \in \mathcal{F}$

Beweis: Nehme an, die Beh. wäre falsch.

$\Rightarrow \exists A, B$ mit $A \notin \mathcal{F}$, $B \notin \mathcal{F}$ aber

$A \cup B \in \mathcal{F}$

Definiere

$$\mathcal{G} := \{ M : A \cup M \in \mathcal{F} \}$$

$\mathcal{G}$ ist ein Filter und

a) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ $\quad (F_1)$

und

b) $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$, da $B \in \mathcal{G}$

ζ zu $\mathcal{F}$ Ultrafilter

<u>0.3.14 Corollar</u>

Sei $\mathcal{F}$ Ultrafilter, $A \subset E \Rightarrow$

$$A \in \mathcal{F} \vee \complement A \in \mathcal{F}$$

Es gilt auch die Umkehrung

<u>0.3.15 Satz</u> ~~(weglassen)~~

Sei $\mathcal{G}$ eine Filtersubbasis und gelte

$\forall A \subset E: \quad A \in \mathcal{G} \vee \complement A \in \mathcal{G}.$

Dann ist $\mathcal{G}$ ein Ultrafilter.

<u>Beweis.</u> (üb.)

Sei $\mathcal{F} = \langle \mathcal{G} \rangle$

<u>Beh.</u>

(i) $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, denn sei $A \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \complement A \notin \mathcal{F} \Rightarrow \complement A \notin \mathcal{G} \Rightarrow A \in \mathcal{G}$

(ii) Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ und $A \in \mathcal{F}' \Rightarrow \complement A \notin \mathcal{F}'$

$\Rightarrow \complement A \notin \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}.$

0. 3. 16 Satz

Jeder Filter $\mathcal{F}$ auf E ist der Durchschnitt aller Ultrafilter feiner als $\mathcal{F}$.

Beweis:

$$\Phi = \{ \mathcal{F}' : \mathcal{F} \subset \mathcal{F}', \ \mathcal{F}' = \mathcal{U}F \}$$

(i) $\mathcal{F} \subset \bigcap_{\mathcal{F}' \in \Phi} \mathcal{F}'$

(ii) Sei $A \in \mathcal{F}$ ~~und $\mathcal{F}'$ ein Ultrafilter feiner~~ als $\mathcal{F}$.

Sei $A \notin \mathcal{F}$ und $A' = \complement A$.

$\Rightarrow$ A' trifft jede Menge aus $\mathcal{F}$.

da sonst $\exists B \in \mathcal{F},\ B \subset A$ ↯

$\underset{0.3.6}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \mathcal{F}'$ mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$

und $A' \in \mathcal{F}'$

Sei $\mathcal{G}$ ein Ultrafilter feiner als $\mathcal{F}'$

$\Longrightarrow$ $A \notin \mathcal{G}$ qed.

Induzierte Filter

0.3.17 Satz

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf E, $A \subset E$, dann ist die Spur von $\mathcal{F}$ auf A, $\mathcal{F}_A$, genau dann ein Filter auf A, wenn

$$\emptyset \notin A \cap \mathcal{F}.$$

Beweis:

1.) $A \cap \mathcal{F}$ genügt (F_2)

2.) $A \cap \mathcal{F}$ genügt (F_1), denn sei

$$A \cap M \subset P \subset A, \quad M \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow P = (M \cup P) \cap A$$

3) (F_3) ist nach Voraussetzung erfüllt.

0.3.18 Def

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf E, $A \subset E$ und $\mathcal{F}_A$ ein Filter. $\mathcal{F}_A$ heißt der von $\mathcal{F}$ auf A induzierte Filter.

0.3.19 Satz

Ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ induziert genau dann einen Filter auf $A \subset E$, wenn $A \in \mathcal{F}$. In diesem Falle ist $\mathcal{F}_A$ ein Ultrafilter auf A.

<u>Beweis</u>

1) $\mathcal{F}_A$ Filter $\iff A \in \mathcal{F}$ (0.3.6)

2) Sei $A \in \mathcal{F}$ und $B \subset A$

$\underset{\mathcal{F} = UF}{\Longrightarrow} B \in \mathcal{F} \vee \complement B \in \mathcal{F}$

$\Longrightarrow B \cap A \in \mathcal{F}_A \vee (B \setminus A) \in \mathcal{F}_A$

$\underset{0.3.15}{\Longrightarrow} \mathcal{F}_A$ Ultrafilter

Direkte Bilder u. inverse Bilder von Filterbasen

Sei $\mathcal{L}$ eine Filterbasis in E und $f: E \to F$. Dann ist $f(\mathcal{L})$ eine Filterbasis in F.

0.3.20 Satz

Sei $\mathcal{L}$ Basis eines Ultrafilters in E, $f: E \to F$, dann $f(\mathcal{L})$ Basis eines Ultrafilters in F.

Beweis:

Sei $M' \subset F$ eine bel. Menge, die jede Menge aus $f(\mathfrak{B})$ trifft. Wenn hieraus

$M' \in \langle f(\mathfrak{B}) \rangle$ folgt, dann ist

$\langle f(\mathfrak{B}) \rangle$ UF.

Nun ~~ist~~ trifft

$f^{-1}(M')$ jede Menge von $\mathfrak{B}$

$\Rightarrow f^{-1}(M') \in \langle \mathfrak{B} \rangle = \mathcal{A}$

$\Rightarrow f(f^{-1}(M')) \in \langle f(\mathcal{A}) \rangle = \langle f(\mathfrak{B}) \rangle$

da $f(f^{-1}(M')) \subset M'$ $\Rightarrow M' \in \langle f(\mathfrak{B}) \rangle$ qed.

<u>Beispiel:</u>

Sei $A \subset E$, $j: A \hookrightarrow E$

und $\mathcal{B}$ ein Filterbasis auf A. $\Rightarrow$

$j(\mathcal{B})$ ist Filterbasis in E. Den Filter

$\mathcal{F} = \langle j(\mathcal{B}) \rangle$ nennt man auch den

Filter der von $\mathcal{B}$ auf E erzeugt wird,

wenn ~~$\mathcal{B}$ die Mengen von~~ $\mathcal{B}$ als Filter-

basis in E angesehen wird.

Ist $\mathcal{B}$ Ultrafilterbasis auf A, dann auch

auf E.

Sei jetzt $f: E \to F$ und $\mathfrak{B}'$ eine Filterbasis in F. Dann gilt

$$f^{-1}(\mathfrak{B}') \text{ FB} \overset{\text{in } E}{\iff} \nexists\, \emptyset \in f^{-1}(\mathfrak{B}')$$

$\iff$ $f(E)$ muß jede Menge aus $\mathfrak{B}'$ treffen.

$\iff$ $\mathfrak{B}'_{|f(E)}$ ist Filterbasis.

Produktfilter

Sei $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen und $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$, eine Filterbasis auf E_i. Sei $\mathfrak{B}$ die Menge ~~aller~~ mit Elementen der Form

$$M = \prod_{i \in I} M_i$$

wobei $M_i = E_i$ bis auf höchstens endlich viele i und $M_i \in \mathfrak{B}_i$, wenn $E_i \neq M_i$. $\mathfrak{B}$ ist dann eine FB auf $E = \prod E_i$. ~~Wir bezeichnen~~

~~$\langle \mathcal{L} \rangle = \prod_i \mathcal{F}_i$ als den Produkt~~

Ist speziell jedes $\mathcal{L}_i$ ein Filter $\mathcal{F}_i$ auf E_i, so bezeichnen ~~wi~~ wir

$$\mathcal{F} = \langle \mathcal{L} \rangle = \prod_i \mathcal{F}_i$$

als den Produktfilter auf $\prod E_i$.

Bem.:

$\prod_i \mathcal{F}_i$ ist der gröbste Filter $\mathcal{G}$, so daß

$$pr_i(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_i \quad \forall i$$

Beachte: f surj $\Rightarrow f(\mathcal{F})$ ist Filter.

Bem Der Umgebungsfilter eines Punktes $x=(x_i)$ in $\prod E_i$ ~~wird~~ ist das Produkt der Umgebungsfilter von x_i.

Elementarfilter

0.3.21 Def

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E. Der von (x_n) erzeugte Elementarfilter $\mathcal{F} = \langle x_n \rangle$ ist das ~~Filter~~ Bild des Fréchetfilters unter der Abb. $n \to x_n$, d. h. der Elementarfilter wird von den Mengen

$$S_n = \{x_m : \cancel{x_m}\, m \geq n\}$$ erzeugt.

<u>Bem</u>: Der Elementarfilter, der von einer Teilfolge von (x_n) erzeugt wird, ist feiner als der Filter, der von (x_n) erzeugt wird.

Per def. besitzt jeder Elementarfilter eine abzählbare Basis. Umgekehrt gilt:

<u>0.3.22 Satz</u>

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter mit einer abzählbaren Basis. Dann ist $\mathcal{F}$ der Durchschnitt der Elementarfilter, die feiner als $\mathcal{F}$ sind.

<u>Beweis</u>: Sei $\mathcal{F} = \langle A_n \rangle$

Setze $B_n = \bigcap\limits_{m=0}^{n} A_m \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} = \langle B_n \rangle$

und $B_{n+1} \subset B_n$. Sei $b_n \in B_n$

$\Rightarrow \quad \mathcal{F} \subset \langle b_n \rangle$,

d.h. der Durchschnitt $\mathcal{J}$ ~~Dall~~ $\mathcal{G}$ aller Elementarfilter, die feiner als $\mathcal{F}$ sind existiert. Sei $\mathcal{G}$ nicht feiner als $\mathcal{F}$

$\Rightarrow \exists M \in \mathcal{G}$, so daß

$B_n \cap \complement M \neq \emptyset \quad \forall n$ (sonst: $B_n \subset M$ ~~$M \in B_n$~~)

Sei $a_n \in B_n \cap \complement M$. Der Elementarfilter $\langle a_n \rangle$ ist feiner als $\mathcal{F}$ und enthält nicht M ↯.

0.4 Grenzwerte

Limes eines Filters

0.4.1 Def Sei E ein top. Raum. $\mathcal{F}$ ein Filter auf E. $x \in E$ heißt Limes von $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{F}$ feiner ist als der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$. $\mathcal{F}$ konvergiert auch zu x.

Entsprechend sagen wir eine Filterbasis $\mathfrak{B}$ konvergiert zu x, falls $\langle \mathfrak{B} \rangle \to x$.

0.4.1 Satz

(i) $\mathfrak{B} \to x \iff \forall\, \mathfrak{U} \in \mathfrak{U}(x)\ \exists\, B \in \mathfrak{B}$ so daß $B \subset \mathfrak{U}$.

(ii) $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, $\mathcal{F} \to x \Rightarrow \mathcal{F}' \to x$.

<u>0.4.2 Satz</u>

$\mathcal{F} \to x \iff \mathcal{G} \to x \quad \forall$ UF $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$.

<u>Bew.</u> $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{G}} \mathcal{G} \supset \mathfrak{U}(x)$.

<u>Bem.</u> Wenn E Hausdorffsch, dann kann $\mathcal{F}$ nur einen Limes besitzen.

Häufungspunkt einer Filterbasis

0.4.3 Def

Sei $\mathfrak{B}$ eine FB in E. x heißt HP von $\mathfrak{B}$,

falls $\quad x \in \overline{B} \quad \forall B \in \mathfrak{B}$.

Wenn x HP von $\mathfrak{B}$ ist, dann auch HP von allen äquivalenten Filterbasen, insbesondere auch HP von $\mathcal{F} = \langle \mathfrak{B} \rangle$.

0.4.4 Satz

x HP von $\mathfrak{B}$ $\Longleftrightarrow$ jede $U(x)$ trifft alle $B \in \mathfrak{B}$.

<u>0.4.5 Corollar</u>. Äquivalent sind

(i) x HP von $\mathcal{F}$

(ii) Es existiert ein Filter, der feiner ist als $\mathcal{F}$ und $\mathfrak{U}(x)$.

(iii) $\exists \mathcal{F}', \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}' \to x$.

<u>Beweis</u>

1) (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\mathcal{G} = \langle \mathcal{F} \cap \mathfrak{U}(x) \rangle$$

2.) (ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$\mathcal{G} \to x, \quad \mathcal{G} \supset \mathcal{F}$$

3) (iii) $\Rightarrow$ (i) (nach 0.4.4)

0.4.6 Corollar

Sei $\mathcal{F}$ ein UF:

$\mathcal{F} \to x \iff x$ HP von $\mathcal{F}$

0.4.7 Satz

Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf $A \subset E$.
Dann gehört jeder HP von $\mathcal{B}$ in E zu $\bar{A}$
und jeder Punkt aus $\bar{A}$ ist Limes eines
Filters auf A.

Beweis

(i) ✓

(ii) Sei $x \in \bar{A}$. Betrachte dann $\mathfrak{U}(x)/_A$.

Limes- u. Häufungspunkte einer Fktion.

0.4.8 Def. Sei $f : E \to F$, ~~E~~, F top Räume

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf E. $y \in F$ heißt Limespunkt oder HP von f, bzgl. $\mathcal{F}$ falls y Limes- oder HP von $f(\mathcal{F})$ ist.

$$\lim_{\mathcal{F}} f = y, \quad \lim_{x \in \mathcal{F}} f = y$$

$$\lim_{x} f = y.$$

0.4.9 Satz

(i) $\lim_{\mathcal{F}} f = y \iff f^{-1}(U(y)) \in \mathcal{F} \quad \forall\, U(y)$

(ii) y HP von $f \iff$ $\cancel{\forall U(x)\ \forall M \in \mathcal{F}}$

$$\forall_{U(y)}\ \forall_{M \in \mathcal{F}}\ \exists_{x \in M}\ f(x) \in U$$

Beispiele:

(i) Sei (x_n) eine Folge in E und

$\mathcal{F}$ der zugehörige Elementarfilter:

$$x_n \to x \iff \mathcal{F} \to x$$

(ii) Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein verallg. M-S-F.

Die Mengen

$$S_\alpha := \{ x_\beta : \alpha < \beta \}$$

bilden eine Filterbasis, sie erzeugen den sog. <u>Schwanzfilter</u>. $\mathcal{S}$

~~Sei $f: E \to F$~~. Dann gilt

$$x_\alpha \to x \iff \mathcal{S} \to x$$

0.4.10 Satz

Sei $f : E \to F$, $y \in F$, $\mathcal{F}$ Filter in E.

Dann gilt

$$y \text{ HP von } f \text{ bzgl } \mathcal{F} \iff \exists\, \mathcal{G} \supset \mathcal{F} : y = \lim_{\mathcal{G}} f$$

Beweis:

(i) "$\Rightarrow$" $\quad \mathcal{G} = \langle \mathcal{F} \cap f^{-1}(\mathfrak{U}(y)) \rangle$

Sei $\mathcal{G}' \supset \langle f(\mathcal{F}) \rangle$ mit $\mathcal{G}' \to y$.

$\mathcal{G} = \langle f^{-1}(\mathcal{G}') \rangle \supset \mathcal{F}$ und $\langle f(\mathcal{G}) \rangle \to y$

(ii) "$\Leftarrow$"

✓

Limites u. Stetigkeit

Seien E, F top. Räume, $f: E \to F$

$\mathfrak{U}(x_0)$ der Umgeb.filter von $x_0 \in E$.

Sei $y = \lim\limits_{\mathfrak{U}(x_0)} f$. Wir schreiben

dafür auch

$$y = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

0.4.11 Satz

f stetig in $x_0 \iff f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f$

0. 4. 12 Corollar

Sei $f: E \to F$, $x_0 \in E$.

Dann gilt

(i) f stetig in x_0 $\Rightarrow$ $\forall\ \mathcal{B} \to x_0$ gilt

$$f(\mathcal{B}) \to f(x_0)$$

~~(ii) $\forall$ UF $\mathcal{B} \to x_0$ gilt, daß $f(\mathcal{B}) \to f(x_0)$~~

(ii) $f(\mathcal{B}) \to f(x_0)$ $\forall$ UF $\mathcal{B} \to x_0$

$\Rightarrow$ f stetig in x_0

<u>Beweis:</u>

(i) Sei f stetig in x_0 und $\mathfrak{F} \to x_0$

Sei $V = V(f(x_0))$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(V) \in \lceil \mathfrak{F} \rangle$

$\Rightarrow$ $V \in \langle f(\mathfrak{F}) \rangle$ $\Rightarrow$ $f(\mathfrak{F}) \to f(x_0)$

(ii) Sei f nicht stetig in x_0 $\Rightarrow$

$\exists$ $V = V(f(x_0))$ mit $f^{-1}(V) \notin \mathfrak{U}(x_0)$

$\Rightarrow$ $\exists$ UF $\mathfrak{G}$, der feiner ist als $\lceil f^{-1}(V) = W$

u. $\mathfrak{U}(x_0)$ $\Rightarrow$ $f(\mathfrak{G}) \not\to f(x_0)$,

da $\cancel{f(W) \notin \mathfrak{U}(f(x_0))}$

$f(W) \cap V = \emptyset$

Limes relativ zu einem Teilraum

Seien E, F top. Räume $A \subset E$ und $x_0 \in \bar{A}$. Sei $\mathcal{A} = \mathfrak{U}(x_0)|_A$. Sei $f : A \to F$, dann schreiben wir auch für

$$y = \lim_{\mathcal{A}} f \,, \quad y = \lim_{x \to x_0,\, x \in A} f(x)$$

Falls $A = \complement \{x_0\}$ und $x_0 \in \bar{A}$:

$$y = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$$

0.5 Vollständige Räume

Sei E ein uniformer Raum, dessen uniforme Struktur o.B.d.A. durch ein gerichtetes System von Pseudometriken $(d_\alpha)_{\alpha \in A}$ def. wird.

0.5.1 Def

Ein Filter $\mathcal{F}$ auf E heißt Cauchyfilter, falls $\forall (\alpha, \varepsilon)$ $\exists$ $M \in \mathcal{F}$ mit

$$d_\alpha(x,y) < \varepsilon \quad \forall x,y \in M.$$

Beispiel

Eine M-S-Folge ist genau dann eine C.F., falls der Schlichtungsfilter ein C.F. ist.

0.5.1 Satz

Jeder konvergente Filter ist ein C.F.

0.5.2 Satz

Sei E, F uniforme Räume. $f: E \to F$ gleichm. stetig, dann ist das Bild einer C.F. Basis wieder eine C.F. Basis.

0.5.3 Satz

Eine ~~C.F.~~ Filter Basis $\mathfrak{B}$ auf $\prod_{i \in I} E_i$ ist eine

C.F. Basis genau dann, wenn

$$pr_i(\mathfrak{B}) \text{ C.F. Basis in } E_i \quad \forall i$$

Beweis

(i) " $\Rightarrow$ " ✓

(ii) " $\Leftarrow$ "

Sei $(d_{\alpha, i})_{\alpha \in A_i}$ P.M. auf E_i

$J \subset I$ endlich und $\tilde{A}_i \subset A_i$ endl.

für $i \in J$.

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$(*) \quad \exists\, B_i \in \mathcal{L} : \mathcal{M}_{\alpha} \sup_{\alpha \in \tilde{A}_i} d_{\alpha_{1i}}(pr_i x, pr_i y) < \varepsilon$$

$$\forall x, y \in B_i$$

Setze $B = \bigcap_{i \in J} B_i$, dann gilt $\forall x, y \in B$

$$(*) \quad \forall i \in J.$$

0.5.3 Corollar.

Seien f_i C.F. in E_i , $i = 1, 2 \Rightarrow$

$$f = f_1 \times f_2 \text{ C.F. in } E_1 \times E_2$$

0. 5. 3a Satz

Seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ C. F. auf E, d eine der def. Pseudometriken $\Rightarrow$ $\exists$

$$\lim_{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2} d(x, y)$$

Minimale C. F.

0.5.4 Def

Die minimalen Elemente (bzg der Inklusion) in der Menge aller C. F. von E heißen minimale C. F.

0.5.5 Satz

Sei E uniform. $\mathcal{F}$ ein C.F., dann existiert ein eindeutig bestimmter minimaler C.F. $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$.

Beweis: (d_α) gerichtet

Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathcal{F}$. Die Mengen zu jedem $M \in \mathfrak{B}$ definiere

$$M_{\alpha,\varepsilon} := \{ y : \exists x \in M \text{ mit } d_\alpha(x,y) < \varepsilon \}$$

bilden dann eine Filterbasis.

Wegen der Dreiecksungl., ~~wird sie~~ ist dies eine C.F. Basis. Sei $\mathcal{F}_0$ der erzeugte C.F.

Dann gilt

(i) $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ (der $M \subset M_{\alpha,\varepsilon}$)

(ii) Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ein anderer C.F.

Sei $M \in \mathcal{B}$, (α, ε) gegeben $\Rightarrow \exists N \in \mathcal{G}$:

$$d_\alpha(x,y) < \varepsilon \quad \forall x,y \in N$$

Da N auch in $\mathcal{F} \Rightarrow N \cap M \neq \emptyset \Rightarrow$

$$N \subset M_{\alpha,\varepsilon} \Rightarrow \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}.$$

0.5.6 Corollar

Für jedes $x_0 \in E$ ist $\mathfrak{U}(x)$ ein minimaler C.F.

Beweis: Wähle im Beweis von Satz 0.5.5.

$$\mathcal{A} = \mathrm{Men}\{M \in \mathfrak{P}(E) : x \in M\}$$

und

$$\mathcal{L} = \{\{x\}\}$$

0.5.7 Corollar

Jeder HP eines C.F. ist ein Limespunkt von $\mathcal{A}$.

<u>Beweis</u>: Sei x HP von $\mathcal{F}$ $\Rightarrow$

$\exists$ Filter $\mathcal{G}$, der feiner ist als $\mathcal{F}$ und $\mathfrak{U}(x)$ (0.4.5). Da $\mathcal{F}$ C.F., so auch $\mathcal{G}$

Sei $\mathcal{F}_0$ der <u>eindeutig</u> bestimmte minimale C.F., der gröber als $\mathcal{F}$ ist
(beachte: $\mathcal{F}$ = C.F.)

$\Rightarrow$ $\mathfrak{U}(x), \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}$ und minimal

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}_0 = \mathfrak{U}(x)$ wegen der Eindeutigkeit.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} \to x$.

<u>0.5.8 Korollar</u>

Gelte $\mathcal{F} \to x$ und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ C.F.

$\Rightarrow \mathcal{G} \to x$

- s. p 65a -

<u>Vollständigkeit</u>

<u>0.5.9 Def</u>

Ein uniformer Raum E heißt vollständig, falls jeder C.F. konvergiert.

<u>0.5.10 Satz</u> (Cauchy-Kriterium)

Sei E vollständig

$\mathcal{F}$ konvergiert, dann und nur dann, wenn $\mathcal{F}$ C.F. ist.

0.5. ~~8~~a Corollar

Sei $\mathcal{F}$ minimale C.F. $\Rightarrow$

$$\mathring{B} \neq \emptyset \quad \forall\, B \in \mathcal{F}$$

Beweis: vgl. den Beweis von 0.5.5

$\{M_{\alpha,\varepsilon},$ ~~erzeugen~~ $M \in \mathcal{F}\}$ erzeugen $\mathcal{F}$.

0.5.11 Satz

Jeder abgeschlossene Teilraum eines vollständigen Raumes ist vollständig.
Jeder vollständige TR eines Hausdorffschen uniformen Raumes ist abgeschlossen.

Beweis:

(i) Sei $A \subset E$ abg. Sei $\mathcal{F}$ ein C.F. auf A

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ ist C.F. Basis auf E

$\Rightarrow \mathcal{F} \to x \Rightarrow x \in \bar{B} \;\; \forall B \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow x \in \bar{A} = A.$

(ii) Sei E Hausdorff, $A \subset E$ nicht abg.

und $b \in \bar{A} - A.$

$\mathfrak{U}(b)$ ist dann C.F. $\Rightarrow$

$f = \mathfrak{U}(b)|_A$ C. F.

aber f ~~ist~~ ist nicht konvergent,

denn $f \to c \Rightarrow c = b$, da E Hausd.

0.5.12 Satz

Sei $A \subset E$ dicht und konvergiere jede C.F. Basis ~~auf~~ A in E. Dann ist E vollständig.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß jeder minimale C.F. ~~auf~~ E konvergiert.

Sei $\mathcal{F}$ minimale C.F. $\Rightarrow$

$\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$ mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}|_A$ C.F. Basis.

<u>0.5.13 Thm</u>

~~Seien~~ $(E_i)_{i \in I}$ eine Fam. uniformer Räume, $E_i \neq \emptyset$ $\Rightarrow$

$E = \prod_{i \in I} E_i$ vollst $\Leftrightarrow$ E_i vollst $\forall i$

<u>Beweis</u>:

(i) Sei E vollständig und $\mathcal{F}_{i_0}$ ein C.F. auf E_{i_0}. Seien $\mathcal{F}_i$ für $i \neq i_0$ bel. C.F. auf E_i $\underset{0.5.3}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ ist C.F. auf E. $\Longrightarrow$ $\mathcal{F} \to x = (x^i)$

$\Longrightarrow$ $pr_{i_0}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{i_0} \to x^{i_0}$

(ii) Sei $\mathcal{F}$ C.F. auf E $\Longrightarrow$ $pr_i(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_i$ C.F. auf E_i $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}_i$ konvergent

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ konvergent

Fortsetzung glm. stetiger Funktionen

0.5.14 ~~Theo~~ Satz

Sei $A \subset E$ dicht, $E = \operatorname{top} R$. $f : A \xrightarrow{\text{stetig}} F =$ vollständiger, Hausdorffscher uniformer R.

~~Dann~~

Eine stetige Fortsetzung von f auf E ist dann und nur dann möglich, wenn

$$f(\mathfrak{U}(x)|_A) \text{ C. F. Basis in } F \quad \forall x \in E$$

Beweis:

(i) ~~f~~ $\exists$ stetige Fortsetzung $\Rightarrow$ ✓

(ii) Gelte die Bed. Sei $x \notin \bar{A}$. Def.

$$\tilde{f}(x) = \lim f(\mathfrak{U}(x)|_A)$$

$\tilde{f}$ ist eindeutig definiert, da F Hausdorff.

Sei V eine abgeschlossene Umgebung von $\tilde{f}(x)$. Dann $\exists$ eine offene Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$, so dß

$$f(U \cap A) \subset V$$

<u>Beh.</u>: $\tilde{f}(U) \subset \overline{f(U \cap A)} \subset V$

woraus alles bewiesen wäre, da die abg. Umg. eine Umgebungsbasis bilden.

Für alle $z \in \mathcal{U}$ gilt

$$\tilde{f}(z) = \lim_{\substack{y \to z \\ y \in \mathcal{U} \cap A}} f(y)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(z) \subset \overline{f(\mathcal{U} \cap A)} \qquad \text{qed.}$$

0.5.15 Thm

Seien E, F uniform, F vollständig u. Hausdorffsch. Sei $A \subset E$ dicht und $f : A \to F$ glm. stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$. $\tilde{f}$ ist ebenfalls glm. stetig.

Bew. Nach 0.5.14 existiert stetige Fortsetzung $\tilde{f}$.

Beh. $\tilde{f}$ ist glm. stetig

klar

Def. (Isomorphismus) f Isomorphismus: f biji f, f^{-1} glm stetig

0.5.16 Corollar

Seien E_1, E_2 vollst. Hausdorffsche Raeume uniforme und A_1, A_2 dichte Teilraeume. Dann läßt sich jeder Isomorphismus (glm. stetig u. bijektiv) von A_1 auf A_2 zu einem Isomorphismus von E_1 nach E_2 fortsetzen.

<u>Beweis:</u>

Sei $f : A_1 \to A_2$ und $g = f^{-1}$

$\Rightarrow$

$\exists$ Fortsetzungen $\tilde{f}, \tilde{g}$

$$\tilde{f} \circ \tilde{g} \Big|_{A_2} = id \Big|_{A_2}$$

$$\Rightarrow \tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{E_2}$$

qed.

Vervollständigung eines uniformen Raumes

0.5.17 Thm

Sei E ein uniformer Raum. Dann existiert ein vollständiger Hausdorffscher uniformer Raum $\hat{E}$ und eine glm. stetige Abb $j : E \to \hat{E}$, $j(E)$ dicht, mit folgender Eigenschaft

(*) Sei f irgendeine glm. stetige Abb. von E in einen vollst., Hausdorffschen Raum F. Dann existiert genau eine glm. stetige Abb. $\hat{f} : \hat{E} \to F$ mit $f = \hat{f} \circ j$

Sei $(\tilde{E}, \tilde{j})$ ein anderes Paar mit den oben beschriebenen Eigenschaften, dann existiert ein Isomorphismus

$$\varphi : \hat{E} \to \tilde{E}$$

mit $\quad \tilde{j} = \varphi \circ j .$

Ist E Hausdorffsch, so ist j ~~ein~~ injektiv.

~~und~~ $: E \to j(E)$ ein Isomorphismus
(Isometrie)

<u>Bew.</u>:

(i) Def von $\hat{E}$:

$$\hat{E} := \{ \cancel{\text{Menge}} \text{ minimaler C.F.} \}$$

Def. der Pseudometriken

Sei $(d_\alpha)_{\alpha \in I}$ die gerichtet Pseudom. von E.

und $f_1, f_2 \in \hat{E}$

$$\hat{d}_\alpha(f_1, f_2) = \lim_{f_1 \times f_2} d_\alpha(x, y)$$

(vgl 0.5.3 a)

(ii) $\hat{E}$ Hausdorffsch.

Sei $\hat{d}_\alpha(f_1, f_2) = 0 \quad \forall \alpha \in A$ = gerichtet

Definiere

$$\mathfrak{B} = \{ M_1 \cup M_2 : M_i \in f_i \}$$

$\mathcal{L}$ ist Filterbasis mit

$\mathcal{F} = \langle \mathcal{L} \rangle \subset \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$

Ferner ist $\mathcal{L}$ C.F. Basis (Dreiecksungl.)

$\mathcal{F}_i$ minimal $\Rightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{F} = \mathcal{F}_2$

(iii) Definition von j:

$$j : E \to \hat{E}$$
$$x \to \mathcal{U}(x) \quad \text{(vgl. 0.5.6)}$$

j ist glm. stetig

$$\hat{d}_\alpha(j(x), j(y)) \equiv d_\alpha(x, y)$$

(iv) $j(E)$ dicht in $\hat{E}$.

Sei (α, ε) gegeben und $\hat{\mathcal{F}} \in \hat{E}$. Da

$\hat{\mathcal{F}}$ C.F., $\exists$ $M \in \hat{\mathcal{F}}$ mit

$$d_\alpha(x,y) < \varepsilon \qquad \forall x, y \in M$$

Sei $x \in M$ $\Rightarrow$

$$\hat{d}_\alpha(\hat{\mathcal{F}}, \mathfrak{U}(x)) = \hat{d}_\alpha(\hat{\mathcal{F}}, j(x)) \leq \varepsilon$$

(v) <u>$\hat{E}$ ist vollständig.</u>

Sei $\hat{\mathcal{F}}$ eine C.F. auf $j(E)$.

$j^{-1}(\hat{\mathcal{F}})$ ist dann eine Filterbasis in E und nach (iii) ein Cauchy-filter Basis. Sei $\mathcal{F}$ ein minimaler C.F. gröber als $\langle j^{-1}(\hat{\mathcal{F}})\rangle \Rightarrow$

$j(\mathcal{F})$ C.F. Basis ~~in $\hat{E}$~~ auf $j(E)$

mit $j(\mathcal{F}) \to \hat{\mathcal{F}}$ (s. p. 80a)

Andererseits ist

$$\langle j(\mathcal{F})\rangle \subset \hat{\mathcal{F}},$$

denn sei $M \in \mathcal{F}$ ~~too~~ $\subset \langle j^{-1}(\hat{\mathcal{F}})\rangle$

$\Rightarrow \exists\ \hat{M} \in \hat{\mathcal{F}}$ mit $j^{-1}(\hat{M}) \subset M$

$$\Rightarrow \quad \hat{M} = j(j^{-1}(\hat{M})) \subset j(M)$$

$j(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$

<u>Bew</u>: Sei (α, ε) gegeben, so zeige, daß

$M \in \mathcal{F}$ existiert mit

$$\hat{d}_\alpha(j(x), \mathcal{F}) < \varepsilon \qquad \forall x \in M,$$

d.h. ~~$\lim d_\alpha(\mathfrak{U}(x), \mathcal{F}) < \varepsilon$~~ $\forall x \in M$

$$\lim_{\mathfrak{U}(x) \times \mathcal{F}} d_\alpha(y, z) < \varepsilon \qquad \forall x \in M$$

Nun ist $\mathcal{F}$ C.F. $\Rightarrow$ $\exists$ minimales M offen mit (und daher $M \in \mathfrak{U}(x)$ $\forall x \in M$)

$$d_\alpha(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x, y \in M$$

daher gilt $\forall (y, z) \in M \times M \in \mathfrak{U}(x) \times \mathcal{F}$

$$d_\alpha(y, z) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$

$$\hat{f} \to f$$

Die Beh. "$\hat{E}$ vollst." folgt nun aus 0. 5. 12.

(vi) $\exists\ (*)$:

Sei $g : E \to F$ glm. stetig

F vollst., Hausdorffsch

a) $\exists_1\ g_0 : j(E) \to F$ glm. stetig,

$$g = g_0 \circ j$$

<u>Bew:</u> Es gilt

$$f(x) = \lim f(v(x))$$

Definiere

$$g_0(j(x)) = \lim f(v(x))$$

$\Rightarrow$

$$f = g_0 \circ j$$

<u>Zeige</u>: g_0 glm stetig in $j(E)$

Sei $\tilde{d}$ eine Pseudometrik in F:

$$\tilde{d}(g_0(j(x)), g_0(j(y))) = \tilde{d}(\lim f(v(x)), \lim f(v(y)))$$

$$= \tilde{d}(f(x), f(y))$$

und

$$\hat{d}_\alpha(j(x), j(y)) = d_\alpha(x, y)$$

b) Sei g eine glm. stetige Fortsetzung von g_0 auf $\hat{E}$ (0.5.15) $\Rightarrow$

$$f = g \circ j$$

Hieraus folgt auch, daß g eindeutig bestimmt ist, denn $j(E)$ liegt dicht.

(vii) $\hat{E}$ <u>ist</u> bis auf <u>Isomorphismus</u> <u>eindeutig</u> <u>bestimmt</u>.

Sei $(\tilde{E}, \tilde{j})$ gegeben.

$$\tilde{j} : E \to \tilde{E}$$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} \quad \exists \ \varphi : \hat{E} \to \tilde{E} \ \text{glm. stetig}$$

mit

$$\tilde{j} = \varphi \circ j$$

und genauso

$$\tilde{\varphi} : \tilde{E} \to \hat{E}$$

und

$$j = \tilde{\varphi} \circ \tilde{j}$$

$\Rightarrow$

$$j = \tilde{\varphi} \circ \varphi \circ j$$

$j(E)$ dicht $\Rightarrow$ $\tilde{\varphi} \circ \varphi = id|_{\hat{E}}$

$\Rightarrow$ $\varphi, \tilde{\varphi}$ Isomorphismen.

(viii) E Hausdorffsch $\Rightarrow$ j injektiv.

und nach (iii) ist j Isometrie