Übungen zur Tensoranalysis

Blatt 8

1 Sei $M \subset N$ eine raumartige Hyperfläche, die lokal definiert ist durch $M = \Phi^{-1}(0)$, $\Phi \in C^1(N)$, dann ist $D\Phi \in N(M)$.

2 Sei $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Kegel mit Spitze in 0 und nehme an, C sei—abgesehen von seiner Spitze—eine C^2 Hyperfläche. Dann verschwindet in jedem Punkt mindestens eine Hauptkrümmung.

3 Sei $M \subset N$ eine raumartige C^2 Hyperfläche, deren Flächeninhalt ein lokales Extremum ist, d.h. zu jedem Punkt $x_0 \in M$ existiert eine Umgebung $\mathcal{U} \subset N$, so daß für jede andere raumartige Hyperfläche $\widetilde{M}$, die eine lokale Störung von M ist, $M \Delta \widetilde{M} \Subset \mathcal{U}$, gilt

$$H_n(M \cap \mathcal{U}) \leq H_n(\widetilde{M} \cap \mathcal{U}),$$

falls N riemannsch, bzw.

$$H_n(M \cap \mathcal{U}) \geq H_n(\widetilde{M} \cap \mathcal{U}),$$

falls N eine Lorentzmannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie, daß die mittlere Krümmung einer solchen Hyperfläche verschwindet.

Dies kann man auch so ausdrücken, daß die Gleichung $H = 0$ die Euler-Lagrange-Gleichung des Flächenfunktionals ist.

Hinweis: Verwenden Sie, daß M lokal in einem normalen Gaußschen Koordinatensystem (x^α) durch $M \cap \mathcal{U} = \{x^0 = 0\}$ beschrieben werden kann und setzen Sie $\widetilde{M}$ als Graphen einer Funktion mit kompakten Träger in diesem Koordinatensystem an.

4 Eine kompakte Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Klasse C^2 heißt *strikt konvex*, falls bzgl. irgendeiner stetigen Normalen ν die Hauptkrümmungen nirgends verschwinden. Zeigen Sie, daß die Hauptkrümmungen bzgl. der inneren Normalen einer solchen Hyperfläche alle positiv sind.