Übungen zur Tensoranalysis

Blatt 7

1 Sei $x = x(\xi)$ eine lokale Einbettung von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so gilt

$$x_{ij} = -\sigma_{ij} x,$$

wobei σ_{ij} die induzierte Metrik ist, d.h. für die Sphäre ist $h_{ij} = \sigma_{ij}$.

2 (i) Sei u in einer Umgebung von S^n definiert, glatt und positiv homogen vom Grade $k \in \mathbb{R}$. Bezeichne die Einschränkung von u auf S^n mit φ , dann gilt

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} u = \Delta_{S^n} \varphi + k(k + n - 1)\varphi.$$

Diese Gleichung liefert einen Zusammenhang zwischen den homogenen harmonischen Funktionen ($\Delta u = 0$) der Ordnung k und den Eigenfunktionen des Laplace Operators auf der Sphäre. Die Eigenfunktionen heißen Kugelfunktionen der Ordnung k , und man kann zeigen, daß die homogen fortgesetzten Funktionen homogene Polynome der Ordnung k sind, die sog. homogenen, harmonischen Polynome der Ordnung k .

Beachten Sie, daß Eigenfunktionen nur für abzählbar viele $k \in \mathbb{R}_+$ existieren. Jeder Eigenraum E_k ist endlich dimensional und man kann zeigen, daß

$$L^2(S^n) = \bigoplus_k E_k$$

(ii) Bestimmen Sie alle Kugelfunktionen der Ordnungen 0 und 1; verwenden Sie dabei, daß die homogenen Fortsetzungen vom Grade 1 Polynome sind.

(iii) Zeigen Sie, daß Eigenfunktionen $\varphi \in E_k$ und $\psi \in E_l$ mit $k \neq l$ in $L^2(S^n)$ orthogonal zueinander sind.

3 Sei N eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \subset N$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit der Klasse C^m , $m \geq 1$, dann läßt sich jedes Tensorfeld A der Klasse C^m , $A : M \rightarrow T^{k,l}(N)$, lokal nach N fortsetzen, d.h. zu jedem $x_0 \in M$ existiert eine Umgebung $U(x_0) \subset N$ und eine Fortsetzung $\tilde{A} \in C^m(U, T^{k,l}(N))$.

4 Sei $M = \text{graph } u|_{\mathcal{O}}$ ein Graph in $\mathbb{R}^{n+1}$, dann läßt sich das das Volumenelement von M ausdrücken durch $d\mu = \sqrt{1 + |Du|^2} dx$.