

Übungen zur Tensoranalysis

Blatt 6

- 1 Sei M eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, $\xi \in C^1(M, T^{1,0}(M))$ und $f \in C^1(M)$ und nehme an, daß ξ oder f kompakten Träger hat, dann gilt

$$\int_M \operatorname{div} \xi f = - \int_M \langle \xi, Df \rangle.$$

Zeigen Sie bitte den noch offen zweiten Teil des Beweises mittels Zerlegung der Eins.

- 2 Sei N eine Lorentzmannigfaltigkeit und $M \subset N$ eine Hyperfläche, dann ist M genau dann raumartig, wenn der Normalenvektor ν zeitartig ist.
- 3 Sei N semi-riemannsch, $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit mit der induzierten Metrik versehen.

- (i) Sei $\eta = (\eta^\alpha) : M \rightarrow T^{1,0}(N)$ ein kontravariantes Tensorfeld, dann definieren wir eine kovariante Ableitung auf M durch

$$\eta_{;i}^\alpha = \eta_{,i}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha x_i^\beta \eta^\gamma,$$

wobei $x = x(\xi^i)$ eine lokale Einbettung von M ist.

Zeigen Sie, daß hierdurch ein voller Tensor definiert wird.

- (ii) Definieren Sie eine entsprechende kovariante Ableitung für kovariante Vektorfelder und für Tensorfelder mit Werten in $T^{k,l}(N)$; vergleichen Sie die Definition der kovarianten Ableitung von Tensorfeldern über einer Kurve.
- (iii) Sei $A = (a_{\beta_1, \dots, \beta_l}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k})$ ein in einer Umgebung von M definiertes Tensorfeld, dann gilt die Kettenregel

$$a_{\beta_1, \dots, \beta_l; i}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k} = a_{\beta_1, \dots, \beta_l; \alpha}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k} x_i^\alpha$$

- 4 Sei N eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und $x = x(\xi^i)$ die lokale Darstellung einer Hyperfläche $M \subset N$ mit Normalenvektor ν . Zeigen Sie, daß dann ein kovariantes, symmetrisches Tensorfeld $(h_{ij}) \in T^{0,2}(M)$ existiert, so daß

$$x_{;ij} = -h_{ij} \nu.$$