Übungen zur Tensoranalysis

Blatt 5

Sei $g(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle$ eine symmetrische, *nichtausgeartete* Bilinearform auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum E, d.h. gelte

$$\langle x,y\rangle = 0 \qquad \forall x \in E \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0.$$

Wir nennen eine solche Bilinearform auch Skalarprodukt auf E.

Wir definieren den *Index* von g, $\operatorname{ind} g$, als die Anzahl der negativen Eigenwerte von g.

Sei $V \subset E$ ein Teilraum, so ist $V^\perp$, V *orthogonal*, definiert durch

$$V^\perp = \{\, x \in E \colon \langle x,y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in V \,\}.$$

$V^\perp$ ist im allgemeinen nicht das orthogonale Komplement.

Ein Teilraum V heißt *nichtausgeartet*, falls $g_{|V}$ ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

Eine Menge e_i von Vektoren heißt *orthonormal*, falls

$$\langle e_i, e_j\rangle = \sigma_i\,\delta_{ij}, \qquad \sigma_i = \pm 1, \qquad \forall\, i,j.$$

Im folgenden sei E ein n-dimensionaler Skalarproduktraum.

1 Sei V ein Teilraum von E, dann gilt

(i) $\dim V + \dim V^\perp = \dim E$,

(ii) $V^{\perp\perp} = V$.

2 Sei V ein Teilraum, dann ist

$$V \quad \text{nichtausgeartet} \quad \Longleftrightarrow \quad V \oplus V^\perp = E.$$

3 E besitzt immer eine *Orthonormalbasis* (ONB) (e_i) und es gilt

$$x = \sum_i \sigma_i \langle x, e_i\rangle e_i, \quad \sigma_i = \langle e_i, e_i\rangle, \quad \forall\, x \in E.$$

4 Seien E_i, $i = 1,2$, zwei Skalarprodukträume, so stimmen ihre Dimensionen und die Indizes der Skalarprodukte genau dann überein, wenn sie isometrisch sind.