Übungen zur Tensoranalysis

Blatt 4

1 Beweisen Sie bitte die Ricci Identitäten (Prop. 10.4.5).

2 Die Bewegungsgleichung eines Teilchens im $\mathbb{R}^{n+1}$ laute in euklidischen Koordinaten

$$\ddot{x} = f.$$

Schreiben Sie die Gleichung in Polarkoordinaten (x^α)

$$d\bar{s}^2 = dr^2 + r^2 \sigma_{ij} dx^i dx^j.$$

Betrachten Sie speziell den Fall $n = 1$ mit der kanonischen Parametrisierung von S^1 und verwenden Sie, daß

$$\sigma_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle,$$

wenn $x = x(\xi^i)$ die Parametrisierung einer Hyperfläche ist.

3 Beweisen Sie, daß eine Umparametrisierung φ einer Geodäten genau dann wieder eine Geodäte ist, wenn φ affin ist.

4 Wie lassen sich die Geodäten im euklidischen Raum bzw. im Minkowskiraum beschreiben.

5 Beweisen Sie, daß eine Geodäte $\gamma(t)$ in einem Lorentzraum, deren Tangentialvektor für $t = 0$ zeitartig ist, immer zeitartige Tangentialvektoren besitzt.

6 Sie N eine Lorentzmannigfaltigkeit. Eine Funktion f auf N heißt *Zeitfunktion*, wenn Df zeitartig ist. Zeigen Sie, daß es in einer Lorentzmannigfaltigkeit, in der eine Zeitfunktion existiert, keine geschlossenen zeitartigen Kurven geben kann.

Mittels einer Zeitfunktion läßt sich N auch zeitartig orientieren.

Ein zeitartiger Weg $\gamma(t)$ heißt *zukunftsgerichtet*, wenn $\dot{\gamma} \in C_+$; eine Zeitfunktion f heißt zukunftsorientiert, wenn f auf zukunftsgerichteten Wegen wächst. Zeigen Sie, daß für zukunftsorientierte Zeitfunktion f gilt: $Df \in C_-$.