Übungen zur Tensoranalysis

Blatt 3

1 Sei (M, g) semi-riemannsch, $\Omega \subset M$, $u \in C^2(\Omega)$ und gelte in $x_0 \in \Omega$ $u(x_0) = \inf_\Omega u$, dann ist $D^2u(x_0)$ positiv semi-definit.

Ist umgekehrt $D^2u(x_0)$ positiv definit und x_0 ein kritischer Punkt von u, so besitzt u in x_0 ein lokales Minimum.

2 Sei (M, g) semi-riemannsch, $\Omega \subset M$ und $u \in C^2(\Omega)$. Entwickle u um $x_0 \in \Omega$ in eine Taylorreihe zweiter Ordung.

Hinweis: Formuliere die Entwicklung zunächst in Riemannschen Normalkoordinaten und dann mit Hilfe der Exponentialabbildung unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem.

3 Sei (M, g) semi-riemannsch, $\Omega \subset M$, $u \in C^3(\Omega)$ und gelte $-\Delta u = f$. Zeige, daß dann die Funktion $\varphi = \frac{1}{2}\langle Du, Du\rangle$ der Gleichung

$$-\Delta\varphi + R_{ij}u^iu^j + u_{ij}u^{ij} = f_iu^i$$

genügt.

4 Führe in $\mathbb{R}^2$ Polarkoordinaten ein, berechne die Christoffelsymbole und drücke Δu in diesem Koordinatensystem aus—denke auch an Aufgabe 5 von Blatt 2. Berechne dann Δu von einer radialsymmetrischen Funktion $u = u(r)$.

5 Sei (M, g) eine Lorentz Mannigfaltigkeit. Zeige, daß der Lichtkegel C_p in einem Punkt $p \in M$ in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt.