Übungen zur Tensoranalysis

Blatt 2

1 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset \Omega$, dann existiert $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$, $0 \le \eta \le 1$, so daß $\eta_{|K} = 1$.

2 Sei $h^i_j \in T_p^{1,1}(M)$ ein gemischter Tensor, dann ist $\det(h^i_j)$ ein Skalar.

3 Zeigen Sie, daß die Christoffelsymbole Γ^k_{ij} sich bei Koordinatenwechsel $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$ gemäß

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^m_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^j} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^r \, \partial x^s} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^j}$$

transformieren.

4 Verifizieren Sie, daß die kovariante Ableitung eines Tensors wieder ein Tensor ist; betrachten Sie zunächst die kovariante Ableitung von Tensoren erster Ordnung.

5 Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist die *Divergenz* eines kontravarianten Vektorfeldes $\xi = (\xi^i)$ definiert als

$$\operatorname{div} \xi = \xi^i{}_{;i}$$

und die *Rotation* eines kovarianten Vektorfeldes $\lambda = (\lambda_i)$ durch

$$\operatorname{rot} \lambda = (\lambda_{i;j} - \lambda_{j;i}) \in T^{0,2}.$$

Zeigen Sie bitte, daß in einem Koordinatensystem (x^i)

$$\operatorname{div} \xi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \big(\sqrt{|g|}\, \xi^i\big),$$

wobei $g = \det(g_{ij})$, und

$$\operatorname{rot} \lambda = (\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}).$$

6 Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, $I = [0, b) \subset \mathbb{R}$ und $\gamma \in C^2(I, M)$ eine Kurve. γ heißt *Geodäte*, falls sie der sog. *Geodätengleichung* genügt, die in lokalen Koordinaten lautet

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma^k_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0.$$

Zeigen Sie bitte

(i) Die Geodätengleichung ist eine Tensorgleichung.

(ii) In der Umgebung eines jeden Punktes p von M existiert immer eine eindeutig bestimmte Geodäte γ mit Anfangswerten $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = \xi \in T_p^{1,0}(M)$.

(iii) Jede Geodäte ist auf einem maximalen Intervall definiert und durch ihre Anfangswerte eindeutig bestimmt.

Hinweis: Beachten Sie, daß die Geodäte unabhängig von einer lokalen Karte definiert ist und im allgemeinen auch mehrere Karten durchläuft.

(iv) Ist γ eine Geodäte, so ist die Norm des Tangentenvektors konstant, d.h.

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = g_{ij}\,\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \equiv \mathrm{const} \quad \forall\, t.$$

Hinweis: Finden Sie einen Beweis, der nur zwei Zeilen umfasst.