Übungen zur Tensoranalysis

Blatt 1b

1 Seien M, N diffeomorphe Mannigfaltigkeiten, so folgt $\dim M = \dim N$.

2 Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, so läßt sich die *Divergenz* eines kontravarianten Vektorfeldes $\xi = (\xi^i)$ definieren als

$$\operatorname{div}\xi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\,\xi^i\right),$$

wobei $g = \det(g_{ij})$, und die *Rotation* eines kovarianten Vektorfeldes $l = (l_i)$ durch

$$\operatorname{rot} l = (l_{i,j} - l_{j,i}).$$

Das Komma deutet hierbei wie vereinbart eine gewöhnliche partielle Ableitung an.

Zeigen Sie bitte, daß Divergenz und Rotation von Vektorfeldern Tensoren sind.

3 Sei (g_{ij}) eine Metrik, (g^{ij}) die Inverse und $g = \det(g_{ij})$. Die Koeffizienten sollen differenzierbar von einem Parameter t abhängen. Zeigen Sie, daß dann gilt

(i) $\dot{g} = g g^{ij} \dot{g}_{ij}$

(ii) $\dot{g}^{ij} = -g^{ik} g^{lj} \dot{g}_{kl}$.

4 Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{grad} u = (D_i u)$ ein kovariantes Vektorfeld ist. Setze $D^i u = g^{ij} D_j u$, wobei (g_{ij}) eine lokale Darstellung der euklidischen Metrik in einem Koordinatensystem ist, und $\Delta u = \operatorname{div}(D^i u)$. Berechnen Sie Δu in zweidimensionalen Polarkoordinaten

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t.$$