Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 9

1 Sei $u \in C^2(S^n)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1

$$-\Delta u = \lambda_1 u,$$

dann gilt

$$u_{ij} = \frac{\Delta u}{n} \sigma_{ij},$$

wobei σ_{ij} die Metrik auf S^n ist.

2 Sei $M = M^n$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und genüge $f \in L^2(M)$ der Bedingung

$$\int_M f = 0,$$

dann besitzt die Gleichung

$$-\Delta u = f$$

eine Lösung $u \in H^{2,2}(M)$.

3 Sei $I = (0, \infty)$, $0 \le p \in C^0(I)$ und gelte

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \infty.$$

Definiere den Hilbertraum $\mathcal{H}$ als die Vervollständigung von $C_c^\infty(I)$ unter der Norm

$$\int_I (\dot{u}^2 + pu^2),$$

dann ist die Einbettung $\mathcal{H} \hookrightarrow L^2(I)$ kompakt.

4 Sei $I = (0, \infty)$. Zeige, daß das Eigenwertproblem

$$-u'' + t^3 u = \lambda t^2 u$$

abzählbar viele Lösungen (λ_i, u_i) besitzt, wobei die $u_i \in \mathcal{H}$ und $\mathcal{H}$ wie in der vorherigen Aufgabe mit $p(t) = t^3$ definiert ist.