Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 8

1 Sei H ein Hilbertraum und $K = K(u, v)$ eine stetige, symmetrische Bilinearform mit der Eigenschaft, daß die quadratische Form kompakt ist, dann ist H separabel.

2 Sei $I = (a, b)$ ein offenes und beschränktes Intervall, $p \in C^1(\bar{I})$, $q \in C^0(\bar{I})$, und $p \geq c > 0$. Dann besitzt das Eigenwertproblem

$$-(p\dot{u})' + qu = \lambda u, \qquad u(a) = u(b) = 0,$$

abzählbar viele Lösungen λ, u_i, so daß

$$\lambda_i < \lambda_{i+1} \qquad \forall\, i \in \mathbb{N},$$

die u_i eine ONB von $L^2(I)$ bilden und die Eigenwerte Vielfachheit 1 haben. Die zum kleinsten Eigenwert λ_0 gehörende Eigenfunktion u_0 verschwindet nirgends in I.

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^2$, $a^{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b^i \in C^1(\bar{\Omega})$, $\varphi \in H^{2,2}$ und $f \in L^2(\Omega)$, dann besitzt das Randwertproblem

$$-D_i(a^{ij} D_j u) + b^i D_i u = f,$$

$$-a^{ij} D_j u\, \nu_i = \varphi,$$

eine Lösung $u \in H^{2,2}(\Omega)$, falls (a^{ij}) gleichmäßig positiv definit,

$$D_i b^i = 0$$

und

$$\int_\Omega f = \int_{\partial\Omega} \varphi.$$