Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 7

1 Sei $M = M^n$ eine kompakte, glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik (g_{ij}). Definiere

$$H^{1,p}(M) = \{\, u \in L^p(M) \colon \int_M |Du|^p = \int (g^{ij} D_i u D_j u)^{\frac{p}{2}} < \infty \,\}.$$

Zeigen Sie bitte, daß $H^{1,p}(M)$ sich stetig in $L^{p^*}(M)$ einbetten läßt,

$$p^* = \frac{np}{n-p}, \qquad 1 \le p < n,$$

und daß die Einbettung nach $L^1(M)$ kompakt ist.

2 Unter den gleichen Bedingungen wie oben, beweisen Sie, daß $H^{1,p}(M)$ sich stetig nach $C^{0,\alpha}(M)$, $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$, einbetten läßt, wenn $n < p < \infty$. Die Hölderhalbnorm einer Funktion können Sie entweder mit Hilfe der Riemannschen Abstandsfunktion global auf M definieren oder auch nur lokal, wenn Sie sich in einer Karte befinden.

3 Sei $\Omega \subset M$ offen und $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung der elliptischen Gleichung

$$-a^{ij} u_{ij} + b^i u_i + cu = 0$$

mit stetigen Koeffizienten und mit $c = c(x) \ge 0$, dann nimmt u ein positives Maximum oder ein negatives Minimum auf dem Rand an.

Führen Sie den Beweis auf das entsprechende Maximumprinzip im $\mathbb{R}^n$ zurück.

Beachten Sie bitte, daß alle Ableitungen kovariante Ableitungen sind, siehe AII.