Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 6

1 Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1,2}(\Omega)$, $a^{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$ und a^{ij} gleichmäßig positiv definit und $c \geq c_0 > 0$. Dann hat das Variationsproblem

$$J(v) = \int_\Omega \{\tfrac{1}{2} a^{ij} D_i v D_j v + \tfrac{1}{2} c v^2\} - \int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} \varphi v \to \min \quad \forall\, v \in H^{1,2}(\Omega)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung.

2 Unter den gleichen Bedingungen wie eben beweisen Sie, daß

$$J(v) = \int_\Omega \tfrac{1}{2} a^{ij} D_i v D_j v - \int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} \varphi v \to \min \quad \forall\, v \in H^{1,2}(\Omega)$$

genau dann eine Lösung besitzt, wenn

$$\int_\Omega f = \int_{\partial\Omega} \varphi.$$

Die Lösung ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

3 Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$. Dann existieren Ω_k mit C^∞-Rändern und der Eigenschaft

$$\Omega \subset \Omega_k \quad \wedge \quad \bar{\Omega} = \bigcap_k \Omega_k \quad \wedge \quad \partial\Omega_k \underset{C^2}{\to} \partial\Omega$$

und

$$|\partial\Omega_k|_{2,\alpha} \leq \text{const.}$$

Hinweis: Betrachten Sie eine Tubenumgebung von $\partial\Omega$.

4 Beweisen Sie das Theorem 1.5.8 aus der Vorlesung ($H^{m+2,2}$-Abschätzungen für schwache Lösungen des Neumann Problems).