Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 5

1 Seien E_i, $1 \le i \le n$ Banachräume, dann gilt

$$(\prod_{i=1}^{n} E_i)^* = \prod_{i=1}^{n} E_i^*$$

2 Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen. Beweisen Sie, daß eine beschränkte Folge $u_k \in BV(\Omega)$ schwach, d.h. im Distributionssinn, nach einer Funktion $u \in BV(\Omega)$ konvergiert und daß

$$\|u\| \le \liminf \|u_k\|$$

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in BV(\Omega)$. Definiere

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} = \sup\{ \int_\Omega \{\eta^0 + uD_i\eta^i\} \colon \eta^\alpha \in C_c^\infty(\Omega),\ |\eta| \le 1,\ \eta = (\eta^\alpha)\ \}.$$

Dies ist die Totalvariation des vektorwertigen Maßes $(\mu, D_i u)$, wobei μ das Lebesguesche Maß ist.

Zeigen Sie, daß $\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}$ unterhalbstetig ist bezüglich schwacher Konvergenz in $BV(\Omega)$.

4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand und L eine obere Schranke für die Lipschitzkonstanten der lokalen Randdarstellungen. Sei $\kappa > 0$ eine Konstante und sei $\beta \in L^\infty(\partial\Omega)$ mit

$$\|\beta\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{1+L^2}}.$$

Dann besitzt das Variationsproblem

$$J(v) = \int_\Omega \sqrt{1+|Dv|^2} + \tfrac{1}{2}\kappa \int_\Omega v^2 + \int_{\partial\Omega} \beta v \to \min \quad \forall\, v \in BV(\Omega)$$

eine Lösung $u \in BV(\Omega)$.

Nehmen Sie an, u wäre von der Klasse C^2 bis zum Rand. Welches Randwertproblem würde u dann lösen.