Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 3

1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Lösen Sie bitte das Variationsproblem

$$\int_\Omega |Du|^2 \to \min \quad \forall\, u \in V = \{\, u \in H^{1,2}(\Omega)\colon \int_\Omega u = 0 \wedge \int_\Omega |u|^2 = 1 \,\}$$

und zeigen Sie, daß die Lösung u der Eigenwertaufgabe

$$-\Delta u = \lambda u$$
$$-\tfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

genügt—zumindest im schwachen Sinne. Dies bezieht sich insbesondere auf die Randbedingung, die ja nur in der Klasse $H^{2,2}(\Omega)$ wohldefiniert ist.

Hinweis: Benutzen Sie beim Beweis, daß die Einbettung $H^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt ist.

2 Beweisen Sie für Gebiete Ω wie in Aufgabe 1 die sog. Poincarésche Ungleichung

$$\int_\Omega |u|^2 \le c \int_\Omega |Du|^2 \qquad \forall\, u \in \{\, u \in H^{1,2}(\Omega)\colon \int_\Omega u = 0 \,\}$$

mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$.

3 Beweisen Sie die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung

$$\Big| \int_\Omega \prod_{i=1}^k f_i \Big| \le \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}, \qquad \sum_{i=1}^k \tfrac{1}{p_i} = 1.$$

4 Beweisen Sie bitte die Einbettung $H^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ mit

$$\tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{p}, \quad \text{falls} \quad mp < n,$$

wobei das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die $H^{m,p}$-Fortsetzungseigenschaft haben soll.

5 Habe Ω die $H^{m,p}$-Fortsetzungseigenschaft und sei beschränkt, so läßt sich $H^{m,p}(\Omega) \to C^{j,\alpha}(\bar{\Omega})$ einbetten, wobei $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le p < \infty$, falls sich m aufspalten läßt in der Form

$$m = k + j$$

und

$$(k-1)p < n < kp, \quad \alpha = k - \tfrac{n}{p},$$

oder

$$(k-1)p = n, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{beliebig.}$$