Übungen zu Partiellen Differentialgleichungen II

Blatt 2

1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^2$, so gilt für $\epsilon > 0$

$$\int_{\partial\Omega} |u| \le \int_{\Omega_\epsilon} |Du| + c_\epsilon \int_{\Omega_\epsilon} |u| \qquad \forall\, u \in H^{1,1}(\Omega),$$

sowie

$$\lim \epsilon^{-1} \int_{\Omega_\epsilon} u = \int_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, u \in H^{1,1}(\Omega).$$

2 Sei $1 \le m \in \mathbb{N}$ und N die Anzahl der Multiindizes α mit $|\alpha| \le m$. Dann ist die Abbildung

$$j : H^{m.p}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^N,$$
$$u \to (D_\alpha u)$$

eine Isometrie $\forall\, 1 \le p \le \infty$. $H^{m,p}(\Omega)$ ist daher separabel, wenn $p < \infty$, und reflexiv sowie uniform konvex, wenn $1 < p < \infty$.

3 Sei $1 \le p < \infty$, p' konjugiert zu p, so läßt sich jedes $\varphi \in H^{m,p}(\Omega)^*$ darstellen in der Form

$$\langle \varphi, u \rangle = \int_\Omega D_\alpha u\, \eta^\alpha, \qquad (\eta^\alpha) \in (L^{p'}(\Omega))^N.$$

Der Dualraum von $H_0^{m,p}(\Omega)$ ist eindeutig beschrieben durch

$$H^{m,p}(\Omega)^* = \{ \sum_{|\alpha| \le m} D_\alpha \eta^\alpha \colon \eta^\alpha \in L^{p'}(\Omega) \} \equiv H^{-m,p'}(\Omega).$$

4 Beweisen Sie bitte das Lemma von Lions-Magenes, Lemma 1.2.30, über die Fortsetzbarkeit von Funktionen $u \in C^m(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ in ganz $\mathbb{R}^n$ unter „Beibehaltung“ der Norm.