Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 13

1 Sei H ein reller Hilbertraum und $\emptyset \neq K \subset H$ eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Menge. Sei $A : K \to H$ ein monotoner und auf endlich dimensionalen Teilräumen stetiger Operator, dann besitzt die Variationsgleichung

$$u \in K : \langle Au, v - u \rangle \geq 0 \qquad \forall\, v \in K \tag{0.1}$$

eine Lösung.
Hinweis: Benutzen Sie, daß abgeschlossene und beschränkte Mengen in Hilberträumen (oder reflexiven Banachräumen) schwach kompakt. Wenn Sie die schwache Kompaktheit verwenden, so greifen Sie auf die topologische Definition zurück, da H nicht als separabel vorausgesetzt wird.

2 Wenn in Aufgabe 1 A als koerzitiv angenommen wird, dann kann die Bedingung „K beschränkt“ entfallen.

3 Sei $A : H \to H$ monoton, stetig auf endlich dimensionalen Teilräumen und koerzitiv, dann ist A surjektiv.

4 Machen Sie sich klar, daß die Ergebnisse auch gelten, wenn wir statt eines Hilbertraumes H einen reflexiven Banachraum E betrachten und $A : K \subset E \to E^*$ abbildet. An der Definition von Monotonie ändert sich nichts.

5 Sei $\emptyset \neq K \subset H$ abgeschlossen, konvex und beschränkt, $F : K \to K$ nicht-expansiv, d.h. es gilt

$$\|F(u) - F(v)\| \leq \|u - v\| \qquad \forall\, u, v \in K, \tag{0.2}$$

dann besitzt F einen Fixpunkt.