Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 12

1 Sei H ein reller Hilbertraum und $K \subset H$ eine abgeschlossene und konvexe Menge. Sei pr_K die Projektion auf K, vgl. AII, Theorem 6.7.7. Sei $w \in H$, dann ist $u = \operatorname{pr}_K w$ genau dann, wenn $u \in K$ und

$$\langle u - w, v - u \rangle \ge 0 \qquad \forall\, v \in K. \tag{0.1}$$

2 Seien K, H wie eben, dann gilt

$$\|\operatorname{pr}_K w - \operatorname{pr}_K w'\| \le \|w - w'\|. \tag{0.2}$$

3 Sie $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex und $A : K \to K$ stetig, dann besitzt A einen Fixpunkt. Benutzen Sie zum Beweis den Brouwerschen Fixpunktsatz, der besagt, daß, wenn $K = \bar{B}_R(0)$, A einen Fixpunkt besitzt.

4 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex und $A : K \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann besitzt die Variationsungleichung

$$\langle Au, v - u \rangle \ge 0 \qquad \forall\, v \in K \tag{0.3}$$

eine Lösung $u \in K$.

0.1. **Definition.** (i) Sei $K \subset H$ abgeschlossen und konvex, $A : K \to H$ heißt *monoton*, falls

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \ge 0 \qquad \forall\, u, v \in K. \tag{0.4}$$

(ii) $A : K \to H$ heißt *stetig auf endlich dimensionalen Teilräumen*, falls für alle endlich dimensionalen Teilräume $V \subset H$ die Einschränkung $A_{|_{K \cap V}}$ schwach stetig ist.

(iii) $A : K \subset H$ heißt koerzitiv, falls $u_0 \in K$ und $c > 0$ existieren, so daß

$$\langle Au - Au_0, u - u_0 \rangle \ge c\|u - u_0\|^2 \qquad \forall\, u \in K. \tag{0.5}$$

5 Sei $K \subset H$ abgeschlossen und konvex, $A : K \to H$ monoton und stetig auf endlich dimensionalen Teilräumen, dann sind äquivalent

$$u \in K : \quad \langle Au, v - u \rangle \ge 0 \qquad \forall\, v \in K \tag{0.6}$$

und

$$u \in K : \quad \langle Av, v - u \rangle \ge 0 \qquad \forall\, v \in K. \tag{0.7}$$