Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 11

1 Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit Lipschitzrand und L

$$Lu = -D_i(a^{ij}D_ju) + b^iD_iu + cu \tag{0.1}$$

ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator mit beschränkten Koeffizienten.

(i) Sei $u \in H^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ eine schwache Lösung der Gleichung

$$Lu = -D_if^i, \qquad f^i \in L^p(\Omega),\ p > n. \tag{0.2}$$

Beweisen Sie dann bitte globale L^∞-Schranken für u unter Verwendung der Moserschen Iterationstechnik.

(ii) Nehmen Sie an, daß eine schwache Lösung $u \in H^{1,2}(\Omega)$ der Gleichung (0.2) auf einem Randstück $\Gamma = \partial\Omega \cap B_{2R}(x_0)$, $x_0 \in \partial\Omega$, beschränkt ist. Beweisen Sie dann bitte lokale Abschätzungen für die L^∞-Norm ($\Gamma = \emptyset$) als auch L^∞-Abschätzungen in

$$\Omega_R = \Omega \cap B_R(x_0) \tag{0.3}$$

unter Verwendung der Moserschen Iterationstechnik.

2 Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitzrand. Dann besitzt das Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u, \qquad u \in H_0^{1,2}(\Omega), \tag{0.4}$$

abzählbar viele Lösungen mit Eigenwerten λ_i, $i \in N^*$. Ordnet man die Eigenwerte nach ihrer Größe

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots , \tag{0.5}$$

so daß alle Eigenwerte verschieden sind, dann besitzen die Eigenwerte endliche Vielfachheit.
Beweisen Sie bitte, daß λ_1 Vielfachheit 1 besitzt.