Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 10

1 Genüge $u \in C^3(S^n)$ der Bedingung

$$u_{ij} = \frac{\Delta u}{n} \sigma_{ij},$$

wobei σ_{ij} die Metrik auf S^n ist, dann ist u eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1.

2 Sei $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} Au = -D_i(a^i(Du)) &= f, \\ u_{|\partial\Omega} &= \varphi, \end{aligned}$$

wobei $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $a^i \in C^2(\mathbb{R}^n)$ elliptisch ist. Nehme an, daß $|u|_{1,\bar{\Omega}}$ a priori beschränkt ist, dann läßt sich auch die $C^{2,\alpha}$-Norm der Lösung a priori beschränken.

Hinweis: Benutzen Sie die De Giorgi-Nash-Abschätzungen, d.h. eine schwache Lösung u der linearen elliptischen Gleichung in Divergenzform

$$Lu = -D_i f^i,$$

wobei L den Bedingungen der Harnackschen Ungleichung genügt, ist Hölderstetig bis zum Rand und genügt entsprechenden a priori Abschätzungen, falls $f^i \in L^p(\Omega)$, $p > n$, $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und u Lipschitzstetige Randwerte besitzt.