Übungen zu Partiellen Differentialgleichungen II

Blatt 1

1 Beweisen Sie bitte, daß $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ ein Banachraum ist.

2 Sei Ω beschränkt und offen mit $\partial\Omega \in C^k$, und (u_i) eine Folge in $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ mit $|u_i|_{k,\alpha} \le c$ gleichmäßig in i. Dann existiert eine Teilfolge, die in $C^k(\bar{\Omega})$ konvergiert. Der Limes u liegt wieder in $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

3 Sei η ein *Friedrichsscher Mollifier* und $\eta_\epsilon = \epsilon^{-n}\,\eta(\frac{x}{\epsilon})$ die zugehörige *Diracfolge.* Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $f_\epsilon = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) f(y)$. Beweisen Sie dann bitte

(i) $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$

(ii) f stetig in $K \subset \Omega$, K kompakt $\implies f_\epsilon \rightrightarrows f$ in K.

(iii) $\operatorname{supp} f_\epsilon \subset \operatorname{supp} f + \epsilon$

(iv) $f \in C^m(\Omega) \implies D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha f)_\epsilon \quad \forall\,|\alpha| \le m$ und
$|f - f_\epsilon|_{m,\Omega'} \to 0 \quad \forall\,\Omega' \Subset \Omega$

(v) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty \implies \|f - f_\epsilon\|_p \to 0$

(vi) $f \in L^\infty(\Omega) \implies \|f_\epsilon\|_\infty \le \|f\|_\infty$

4 Beweisen Sie bitte, daß $H^{m,p}(\Omega)$ ein Banachraum ist für alle offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $1 \le p \le \infty$.

5 Sei $u \in H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, und u_ϵ eine Mollifizierung wie in Aufgabe 3, so konvergiert u_ϵ in $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ nach u.
Wenn $u \in H^{m,p}(\Omega)$, so gilt

$$u_\epsilon \xrightarrow[H^{m,p}(\Omega')]{} u \qquad \forall\,\Omega' \Subset \Omega$$

6 Beweisen Sie, daß $C_c^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, dicht liegt.

7 Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $0 < \alpha \le 1$, dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Konstante c_ϵ, so daß

$$|u|_{2,0} \le \epsilon |u|_{2,\alpha} + c_\epsilon |u|_0 \qquad \forall\, u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}).$$