Übungen zu Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 9

1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$, $k \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\varphi \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$, dann existiert eine Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, so daß

$$|\tilde{\varphi}|_{k,\alpha,\Omega} \leq c|\varphi|_{k,\alpha,\partial\Omega},$$

wobei $c = c(k, \alpha, \Omega)$

2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und nehme an, daß zu jedem Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine Kugel $B_\rho = B_\rho(x_0)$ existiert, die sich zerlegen läßt in der Form

$$B_\rho = A \dot{\cup} B \dot{\cup} \Gamma,$$

wobei $A \subset \Omega$, $B \subset \complement\Omega$, $\Gamma \subset \partial\Omega$ zusammenhängend sind und A, B darüber hinaus noch offen.

Beweisen Sie, daß dann Ω nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt.

3 Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß die Aussage der vorstehenden Aufgabe falsch ist, wenn keine Bedingung an $\partial\Omega$ gestellt wird.

4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ und $u_\epsilon = u * \eta_\epsilon$ eine Mollifizierung, d.h.

$$u_\epsilon(x) = \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y)u(y)$$

Nehme ferner an, daß die schwachen Ableitungen $D_i u \in L^p(\Omega)$ existieren, dann gilt für $\Omega' \Subset \Omega$ und kleine ϵ, $\epsilon < d(\Omega', \partial\Omega)$

$$D_i u_\epsilon = (D_i u)_\epsilon \qquad \text{in } \Omega'$$

und

$$\|Du - Du_\epsilon\|_{p,\Omega'} \to 0.$$