Übungen zu Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 8

1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^k$, $k \geq 1$, und $f \in C^k(\bar{\Omega})$ wie üblich definiert. Beweisen Sie dann bitte

(i) Für alle $x, x + h \in \bar{\Omega}$ gilt

$$f(x+h) - f(x) = Df(x)h + o(|h|),$$

hierbei ist $Df(x)$ für $x \in \partial\Omega$ als stetige Fortsetzung der Ableitung zu verstehen.

(ii) Setze $\varphi = f_{|\partial\Omega}$, so ist $\varphi \in C^k(\partial\Omega)$ und die Ableitung von φ genügt der Kettenregel, d.h.

$$\varphi_i = f_\alpha x_i^\alpha,$$

falls $x = x(\xi)$ eine lokale Darstellung des Randes ist.

Hinweis: Biegen Sie den Rand lokal auf.

2 Benutzen Sie eine Zerlegung der Eins und beweisen Sie

(i) Zu jedem beschränkten $C^{k,\alpha}$ Gebiet Ω, $k \geq 1$, existiert eine Funktion $F \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, so daß $F > 0$ in Ω, $F = 0$ auf $\partial\Omega$ und $DF \neq 0$ $\partial\Omega$.

(ii) Jedes $C^{k,\alpha}$ Gebiet Ω, das nach (i) beschrieben werden kann durch $F > 0$, kann durch C^∞ Gebiete Ω_ϵ ausgeschöpft werden, so daß Ω_ϵ beschrieben wird durch $F_\epsilon > 0$; ferner gilt

$$\partial\Omega_\epsilon \to \partial\Omega \qquad \text{und} \qquad |F_\epsilon|_{k,\alpha,\Omega_\epsilon} \leq c|F|_{k,\alpha,\Omega}$$

mit einer von ϵ unabhängigen Konstanten.

Hinweis: Biegen Sie den Rand lokal auf.

Ein anderer Beweis läßt sich auch mittels der Existenz einer sog. Tubenumgebung führen, vgl. [1, Theorem 12.5.13].

Literatur

[1] Claus Gerhardt, *Analysis II*, International Series in Analysis, International Press, Somerville, MA, 2006, 395 pp.