Übungen zu Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 6

1 Beweisen Sie Theorem 3.1.5 unter der Annahme, daß f Dini stetig ist, d.h. daß eine stetige Funktion φ existiert, so daß

$$|f(x) - f(y)| \leq \varphi(|x-y|) \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t} < 0.$$

2 Sei $\Delta u = f$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß die sog. *Kelvintransformierte* von u, die definiert ist durch

$$v(x) = |x|^{2-n} u(\frac{x}{|x|^2}), \qquad \text{falls} \qquad \frac{x}{|x|^2} \in \Omega,$$

der Gleichung genügt

$$\Delta v(x) = |x|^{-(n+2)} f(\frac{x}{|x|^2}).$$

3 Sei w das Newtonpotential von f in $B = B_R(x_0)$. Zeigen Sie bitte

(i) $f \in L^\infty(B) \implies Dw \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, 0 < \alpha < 1$ und

$[Dw]_{\alpha,B} \leq c(n,\alpha) R^{1-\alpha} \|f\|_\infty$,

(ii) $f \in L^p(B)$, $p = \frac{n}{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\implies Dw \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ und

$[Dw]_{\alpha,B} \leq c(n,\alpha) \|f\|_p$.