Übungen zu Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 4

1 Beweisen Sie bitte die offenen Aufgaben von Blatt 3.

2 Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und

$$Lu = -a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + cu$$

ein linearer elliptischer Differentialoperator, wobei die Ableitungen kovariante Ableitungen bzgl. der Metrik sind und $c \geq 0$. Zeigen Sie bitte, daß das Maximumprinzip und das Hopfsche Lemma auch in diesem Falle gelten.

3 Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und Γ^k_{ij} die Christoffelsymbole. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ ein Koordinatensystem, so daß

$$\Gamma^k_{ij}(p) = 0 \quad \wedge \quad g_{ij}(p) = \delta_{ij}.$$

Solche Koordinaten heißen *normale Koordinaten* in p.

Hinweis: Der Beweis besteht aus zwei Schritten. Im ersten Schritt wählen Sie ein Koordinatensystem (x^i) mit einer gewissen Eigenschaft und im zweiten Schritt machen Sie den Ansatz

$$\tilde{x}^k = x^k + \tfrac{1}{2}\Gamma^k_{ij}x^i x^j,$$

wobei $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(p)$, und zeigen dann, daß die $\tilde{x}^i$ normale Koordinaten in p sind.

4 Seien x^i normale Koordinaten in $p \in M$, dann gelten auch

$$g_{ij,k}(p) = 0 \qquad \forall\,(i, j, k).$$

5 Beweisen Sie, daß die kovariante Ableitung der Metrik verschwindet

$$g_{ij;k} = 0 \qquad \forall\,(i, j, k).$$