Übungen zu Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 3

1 Zeigen Sie, daß das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u = f > 0 \qquad & \text{in } \Omega \\ \langle Du, \nu \rangle = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

keine Lösung besitzt.

2 Sei $c \geq 0$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ eine Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -a^{ij} D_i D_j u + b^i D_i u + cu = 0 \qquad & \text{in } \Omega \\ \alpha u + \beta^i D_i u = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit elliptischen Koeffizienten, wobei $\alpha\langle \beta, \nu \rangle > 0$; ν ist die äußere Normale. Dann ist $u \equiv 0$.

3 Sei $Lu = a^{ij} D_i D_j u$ ein elliptischer Differentialoperator in Ω, dann gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ eine Variablentransformation $y = y(x)$, so daß in den neuen Variablen im Punkte $y(x_0)$ der Differentialoperator mit Δu übereinstimmt.

4 Zeigen Sie, daß ein beschränktes Gebiet Ω mit C^2 Rand $\partial\Omega$ eine *innere Kugelbedingung* erfüllt, d.h. es existiert ein $R > 0$ und zu jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine Kugel B mit Radius R, so daß gilt $B \subset \Omega$ und $\bar{B} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$. Beweisen Sie weiter, daß ein solches Gebiet auch eine *äußere Kugelbedingung* erfüllt.