Übungen zu Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 2

1 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset \Omega$, dann existiert $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$, $0 \le \eta \le 1$, so daß $\eta_{|_K} = 1$.
Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Tietze-Urysohn, vgl. AI, p. 131.

2 Sei $h^i_j \in T^{1,1}_p(M)$ ein gemischter Tensor, dann ist $\det(h^i_j)$ ein Skalar.

3 Zeigen Sie, daß die Christoffelsymbole Γ^k_{ij} sich bei Koordinatenwechsel $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$ gemäß

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^m_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^j} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^r \, \partial x^s} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^j}$$

transformieren.

4 Verifizieren Sie, daß die kovariante Ableitung eines Tensors wieder ein Tensor ist; betrachten Sie zunächst die kovariante Ableitung von Tensoren erster Ordnung.

Die kovariante Ableitung von Tensoren höherer Ordnung ist definiert durch

$$a^i_{j;k} = a^i_{j,k} + \Gamma^i_{mk} a^M_j - \Gamma^m_{jk} a^i_m$$

für einen gemischten Tensor $a^i_j \in T^{1,1}$ und allgemein

$$a^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l;j} = a^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l,j} + \sum_{r=1}^{k} \Gamma^{i_r}_{mj} a^{i_1 \ldots i_{r-1} m i_{r+1} \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} - \sum_{s=1}^{l} \Gamma^m_{j_s j} a^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_{s-1} m j_{s+1} \ldots j_l}$$

5 Sei (g_{ij}) eine Metrik, (g^{ij}) die Inverse und $g = \det(g_{ij})$. Die Koeffizienten sollen differenzierbar von einem Parameter t abhängen. Zeigen Sie, daß dann gilt

(i) $\dot{g} = g g^{ij} \dot{g}_{ij}$

(ii) $\dot{g}^{ij} = -g^{ik} g^{lj} \dot{g}_{kl}$.

6 Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist die *Divergenz* eines kontravarianten Vektorfeldes $\xi = (\xi^i)$ definiert als

$$\operatorname{div} \xi = \xi^i_{\ ;i}$$

und die *Rotation* eines kovarianten Vektorfeldes $\lambda = (\lambda_i)$ durch

$$\operatorname{rot} \lambda = (\lambda_{i;j} - \lambda_{j;i}) \in T^{0,2}.$$

Zeigen Sie bitte, daß in einem Koordinatensystem (x^i)

$$\operatorname{div} \xi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \big(\sqrt{|g|}\, \xi^i \big),$$

wobei $g = \det(g_{ij})$, und

$$\operatorname{rot} \lambda = (\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}).$$

7 Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{grad} u = (D_i u)$ ein kovariantes Vektorfeld ist. Setze $D^i u = g^{ij} D_j u$, wobei (g_{ij}) eine lokale Darstellung der euklidischen Metrik in einem Koordinatensystem ist, und $\Delta u = \operatorname{div}(D^i u)$. Berechnen Sie Δu in zweidimensionalen Polarkoordinaten

$$x = r \cos t$$
$$y = r \sin t.$$