Übungen zu Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 12

1 Ein homogenes Polynom P heißt harmonisch, falls $\Delta P = 0$. Sei α ein Multiindex mit $|\alpha| = 2$ und P ein harmonisches Polynom vom Grade 2 mit $D^\alpha P \neq 0$ (z.B. $P = x^1 x^2$, $\alpha = (1,1)$). Sei $\eta \in C_c^\infty(B_2(0))$ und $\eta = 1$ in $B_1(0)$. Wähle $c_k \to 0$, so daß $\sum_k c_k$ divergiert und definiere dann

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Delta(\eta P)(2^k x).$$

Zeigen Sie, daß f stetig ist, daß aber die Gleichung $\Delta u = f$ keine Lösung besitzt, die in der Nähe des Ursprungs von der Klasse C^2 ist.

2 Sei P ein homogenes, harmonisches Polynom vom Grade 3, α ein Multiindex mit $|\alpha| = 3$ und gelte $D^\alpha P \neq 0$. Sei $\eta \in C_c^\infty(B_2(0))$ und $\eta = 1$ in $B_1(0)$. Wähle $c_k \to 0$, so daß $\sum_k c_k$ divergiert und definiere

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta(2^k x) P(x).$$

Dann gilt

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\eta P)(2^k x) 2^{-3k}$$

und

$$\Delta u = g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Delta(\eta P)(2^k x) 2^{-k}.$$

Zeigen Sie, daß $g \in C^1$, aber $u \notin C^{2,1}$ in der Nähe des Ursprungs.