Übungen zu Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 10

1 Beweisen sie bitte die Schauderabschätzungen für die höheren Ableitungen, Theorem 3.2.7.

2 Sei $B_R^+ = \{x \in B_R(0) : x^n > 0\}$, $T = \{x \in B_R(0) : x^n = 0\}$ und B_R^- die untere Halbkugel. Nehme an, daß $u \in C^0(B_R^+ \cup T) \cap C^2(B_R^+)$ harmonisch ist mit $u_{|T} = 0$. Zeigen Sie bitte, daß die Funktion

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x^1, \ldots, x^n), & if\ x^n \geq 0 \\ -u(x^1, \ldots, -x^n), & if\ x^n < 0 \end{cases}$$

in $C^2(B_R)$ liegt und harmonisch ist.

3 Zeigen Sie, daß $u \in C^0(\Omega)$ genau dann subharmonisch ist, wenn die Mittelwertungleichung lokal gilt, d.h. zu jedem $y \in \Omega$ gibt es $\delta = \delta(y) > 0$, so daß

$$u(y) \leq \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u\, dH_{n-1} \qquad \forall\ R \leq \delta.$$

4 Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt *schwach harmonisch* (*subharmonisch, superharmonisch*) in Ω, wenn

$$\int_\Omega u \Delta\varphi = (\geq, \leq)\ 0 \qquad \forall\ 0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Zeigen Sie, daß eine Funktion $u \in C^0(\Omega)$, die schwach harmonisch (subharmonisch, superharmonisch) ist auch harmonisch (subharmonisch, superharmonisch) ist.

5 Zeigen Sie, daß für stetige Funktionen die Begriffe *schwach subharmonisch* und *subharmonisch* äquivalent sind.