Übungen zu Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 1

1. Beweisen Sie bitte, daß $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ ein Banachraum ist.
2. Sei Ω beschränkt und offen, und (u_i) eine Folge in $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ mit $|u_i|_{k,\alpha} \leq c$ gleichmäßig in i. Dann existiert eine Teilfolge, die in $C^k(\bar{\Omega})$ konvergiert. Der Limes u liegt wieder in $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.
3. Sei η ein *Friedrichsscher Mollifier* und $\eta_\epsilon = \epsilon^{-n}\,\eta(\frac{x}{\epsilon})$ die zugehörige *Diracfolge*. Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $f_\epsilon = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)f(y)$. Beweisen Sie dann bitte

   (i) $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$

   (ii) f stetig in $K \subset \Omega$, K kompakt $\implies f_\epsilon \rightrightarrows f$ in K.

   (iii) $\text{supp} f_\epsilon = \text{supp} f + \epsilon$

   (iv) $f \in C^m(\Omega) \implies D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha f)_\epsilon \quad \forall\, |\alpha| \leq m$ und $|f - f_\epsilon|_{m,\Omega'} \to 0 \quad \forall\, \Omega' \Subset \Omega$

   (v) $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty \implies \|f - f_\epsilon\|_p \to 0$

   (vi) $f \in L^\infty(\Omega) \implies \|f_\epsilon\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

4. Beweisen Sie, daß $C_c^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, dicht liegt.
5. Sei $\Omega \Subset \mathbf{R}^n$ und $0 < \alpha \leq 1$, dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Konstante c_ϵ, so daß

$$|u|_{2,0} \leq \epsilon |u|_{2,\alpha} + c_\epsilon |u|_0 \;\; \forall\, u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$$