EXISTENZ FÜR KLEINE ZEITEN BEI NEUMANN RANDBEDINGUNGEN

CLAUS GERHARDT

Wir betrachten die parabolische Gleichung in $Q_T = \Omega \times [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot u + F(t, x, u, Du, D^2u) &= 0, \\ u_{\nu|\Gamma}(x,t) &= \varphi(t,x,u), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

wobei $\Gamma = \Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ und u_0 ebenfalls die Randbedingung erfüllt, und wollen mit Hilfe des Satzes von der Inversen Funktion für kleine T eine Lösung finden in dem Raum $H^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}$, vgl. die Definition in [2, Definition 2.5.2].

Für lineare F und φ gilt der Existenz und Eindeutigkeitssatz [3, Theorem 5.3, Chap. IV, p. 320] in $H^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(Q_T)$ ohne irgendwelche Kompatibilitätsbedingungen.

1. Existenz in $H^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(Q_\epsilon)$

Der Existenzbeweis für (0.1) ist eine leichte Modifikation des früheren Existenzbeweises (siehe [2, Theorem 2.5.7]). Definiere $\tilde u$ und $\tilde f$ wie in Teil (i) und (ii) des Beweises von [2, Theorem 2.5.7], wobei jetzt noch die Randbedingung

$$\tilde u_{\nu|\Gamma} = \varphi(t, x, u_0) \tag{1.1}$$

hinzutritt. Die Lösung $\tilde u$ ist in $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_1)$ definiert, wenn $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ und $F, \varphi \in C^{1,1}$ in allen Variablen—die Regularitätsforderungen an F und φ lassen sich noch etwas abschwächen.

Für kleine $0 < T_0 < 1$ gilt dann $\tilde f \in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q_{T_0})$ und es ist

$$\tilde f(0) = 0. \tag{1.2}$$

$\tilde u, \tilde f$ genügen in Q_{T_0} der Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{\tilde u} + F(t, x, \tilde u, D\tilde u, D^2\tilde u) &= \tilde f, \\ \tilde u_{\nu|\Gamma}(x,t) &= \varphi(t, x, u_0), \\ \tilde u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Date: 13. Dezember 2008.

Wir definieren jetzt einen nichtlinearen Operator Φ, auf den wir den Satz von der Inversen Funktion anwenden wollen.

Definiere für $0 < \beta < \alpha$

$$V = \{ v \in H^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(Q_{T_0}) \colon v(x,0) = 0 \}, \tag{1.4}$$

$$H_0^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\Gamma_{T_0}) = \{ g \in H^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\Gamma_{T_0}) \colon g(x,0) = 0 \}, \tag{1.5}$$

$$W = H^{\beta,\frac{\beta}{2}}(Q_{T_0}) \times H_0^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\Gamma_{T_0}) \tag{1.6}$$

und $\Phi : B_r(0) \subset V \to W$, r klein, durch

$$\Phi(v) = (\dot{\tilde{u}} + \dot{v} + F(t, \tilde{u} + v, \dots), \tilde{u}_\nu + v_\nu - \varphi(t, x, \tilde{u} + v)). \tag{1.7}$$

$D\Phi(0)$ ist dann ein Homöomorphismus, vgl. [3, Theorem 5.3, Chap. IV, p. 320], und somit Φ ein Diffeomorphismus von $B_\delta(0)$ auf $W_\delta = \Phi(B_\delta(0))$. Definiere nun ähnlich wie in Teil (iii) des Beweises von [2, Theorem 2.5.7]

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \eta(t)\tilde{f}(t,x), \\ g(t,x) &= \eta(t)(\varphi(t,x,u_0) - \varphi(t,x,\tilde{u})), \end{aligned} \tag{1.8}$$

wobei $\eta(t)$ eine Abschneidefunktion ist, die auf $0 \le t \le \epsilon$ verschwindet und identisch 1 ist für $t > 2\epsilon$, dann liegt $(f,g) \in W_\delta$, wenn ϵ klein genug.[1] $u = \tilde{u} + \Phi^{-1}(f,g)$ ist dann in Q_ϵ eine Lösung von (0.1).

2. Höhere Regularität in $t > 0$

Höhere Regularität läßt sich nun mittels der Differenzenquotientenmethode relativ einfach herleiten. Es bieten sich dabei Differenzenquotienten bezüglich t bzw. x an.

2.1. *Innere Abschätzungen*

Sei der Differenzenquotienten Operator Δ_h[2] wie üblich definiert und $\eta = \eta(t)$ und $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x)$ geeignete Abschneidefunktionen, so hat $v_h = \Delta_h u \eta \tilde{\eta}$ kompakten Träger in Q_ϵ und genügt einer linearen parabolischen Gleichung. Daher ist $v_h \in H^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(Q_\epsilon)$ mit gleichmäßigen Abschätzungen und wir schließen $u \in H^{3+\beta,2+\frac{\beta}{2}}(\overset{\circ}{Q}_\epsilon)$.

Die Ergebnisse für $\dot{u}$ gelten natürlich in $\bar{\Omega} \times (0,\epsilon)$.

Durch Induktion erhält man beliebig hohe Regularität, wenn die Daten es zulassen.

---

[1] Hier benutzen wir, daß $\tilde{u} \in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_{T_0})$, $\tilde{f} \in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q_{T_0})$ und $\beta < \alpha$. Beachte, daß $[\eta]_{\frac{\beta}{2},t} \sim \epsilon^{-\frac{\beta}{2}}$.

[2] Bezüglich t oder x^i, $1 \le i \le n$.

2.2. *Randabschätzungen*

(i) Durch Aufbiegen dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß $\partial\Omega$ Teil der Hyperebene $\{x^n = 0\}$. In einer tangentialen Richtung sei dann der Differenzenquotienten Operator Δ_h wie üblich definiert. Seien $\eta = \eta(t)$ und $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x)$ geeignete Abschneidefunktionen, so genügt $v_h = \Delta_h u\eta\tilde{\eta}$ einer linearen parabolischen Gleichung mit linearen Neumannschen Randbedingungen, daher ist $v_h \in H^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(Q_\epsilon)$ mit gleichmäßigen Abschätzungen.

(ii) Betrachten wir jetzt $u_\nu\eta\tilde{\eta} \in H^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(Q_\epsilon)$.

$u_\nu\eta\tilde{\eta}$ genügt einer linearen parabolischen Gleichung mit Dirichletrandbedingungen, daher ist $u_\nu\eta\tilde{\eta} \in H^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(Q_\epsilon)$.

Damit gilt $u \in H^{3+\beta,2+\frac{\beta}{2}}(\bar{\Omega} \times (0,\epsilon))$. Induktion liefert beliebig hohe Regularität bei geeigneten Daten.

3. Höhere Regularität bis $t = 0$

Wenn die entsprechenden Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sind, vgl. [3, p. 319], so liefert die Differenzenquotientenmethode höhere Regularität bis zu $t = 0$.

Literatur

[1] Claus Gerhardt, *Existenz für kleine Zeiten*, 1993, pdf file, Lecture Note.
[2] ______, *Curvature Problems*, Series in Geometry and Topology, vol. 39, International Press, Somerville, MA, 2006, 323 pp.
[3] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Translated from the Russian by S. Smith*, Translations of Mathematical Monographs. 23. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). XI, 648 p., 1968 (English).

Ruprecht-Karls-Universität, Institut für Angewandte Mathematik, Im Neuenheimer Feld 294, 69120 Heidelberg, Germany
E-mail address: gerhardt@math.uni-heidelberg.de
URL: http://www.math.uni-heidelberg.de/studinfo/gerhardt/