EXISTENZ FÜR KLEINE ZEITEN BEI DIRICHLET RANDWERTEN

CLAUS GERHARDT

Wir betrachten die parabolische Gleichung in $Q_T = \Omega \times [0,T)$

$$\begin{aligned} \dot u + F(t,x,u,Du,D^2u) &= 0, \\ u_{|\Gamma}(x,t) &= \varphi(x), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

wobei $\Gamma = \partial\Omega \times [0,T)$, und wollen mit Hilfe des Satzes von der Inversen Funktion für kleine T eine Lösung finden in dem Raum $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}$, vgl. die Definition in dem früheren Beweis für geschlossene Mannigfaltigkeiten $\Omega = M$.

Damit überhaupt glatte Lösungen existieren können, müssen die *Kompatibilitätsbedingungen*

$$F(0,x,u_0,Du_0,D^2u_0)_{|\partial\Omega} = 0 \tag{0.2}$$

erfüllt sein. Für lineare F gelten dann entsprechende a priori Abschätzungen in der $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}$-Norm.

Der Existenzbeweis ist eine leichte Modifikation des früheren Existenzbeweises (siehe [1, Theorem 2.5.7]. Definiere $\tilde u$ und $\tilde f$ wie in Teil (i) und (ii) des Beweises von [1, Theorem 2.5.7], wobei jetzt noch die Randbedingung

$$\tilde u_{|\Gamma} = \varphi(x) \tag{0.3}$$

hinzutritt. Die Bedingung (0.2) sichert, daß $\tilde u \in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_1)$.

Für kleine $0 < T_0 < 1$ gilt dann $\tilde f \in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q_{T_0})$ und es ist

$$\tilde f(0) = 0. \tag{0.4}$$

$\tilde u, \tilde f$ genügen in Q_{T_0} der Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{\tilde u} + F(t,x,\tilde u,D\tilde u,D^2\tilde u) &= \tilde f, \\ \tilde u_{|\Gamma}(x,t) &= \varphi(x), \\ \tilde u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{0.5}$$

Wir definieren jetzt einen nichtlinearen Operator Φ, auf den wir den Satz von der Inversen Funktion anwenden wollen. Hierbei ist es *wichtig*, den Definitonsbereich und den Zielbereich so zu wählen, daß Φ von der Klasse C^1

Date: 13. Dezember 2008.

und die Linearisierung ein Homömomorphismus ist, d.h. die Kompatibilitätsbedingungen müssen erfüllt sein.

Definiere für $0 < \beta < \alpha$

$$V = \{\, \eta \in H^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(Q_{T_0})\colon \eta(0) = 0 \,\wedge\, \eta_{|\Gamma} = 0 \,\}, \tag{0.6}$$

$$W = \{\, f \in H^{\beta,\frac{\beta}{2}}(Q_{T_0})\colon f(x,0)_{|\partial\Omega} = 0 \,\} \tag{0.7}$$

und $\Phi : B_r(0) \subset V \to W$, r klein, durch

$$\Phi(\eta) = \dot{\tilde{u}} + \dot{\eta} + F(t, \tilde{u} + \eta, \dots). \tag{0.8}$$

Beachte, daß wegen (0.4)

$$\Phi(0) = \tilde{f} \quad \wedge \quad \Phi(\eta)(x,0)_{|\partial\Omega} = \tilde{f}(x,0)_{|\partial\Omega} = 0. \tag{0.9}$$

$D\Phi(0)$ ist dann ein Homömorphismus, da die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sind. Die weiteren Überlegungen in Teil (iii) des Beweises von [1, Theorem 2.5.7], liefern nun die Existenz einer Lösung von (0.1) auf einem kleinen Zylinder Q_ϵ.

Literatur

[1] Claus Gerhardt, *Curvature Problems*, Series in Geometry and Topology, vol. 39, International Press, Somerville, MA, 2006, 323 pp.

Ruprecht-Karls-Universität, Institut für Angewandte Mathematik, Im Neuenheimer Feld 294, 69120 Heidelberg, Germany

E-mail address: gerhardt@math.uni-heidelberg.de

URL: http://www.math.uni-heidelberg.de/studinfo/gerhardt/