~~Existenzsätze für~~

7. Quasilineare Operatoren, Leray-~~Schauderscher Fixpunktsatz~~

In diesem Abschnitt wollen wir vornehmlich quasilineare Operatorgleichungen in Divergenzform behandeln:

$$Au + a(x,u,Du) \equiv -D_i\left(a^i(x,u,Du)\right) + a(x,u,Du),$$

$a^i \in C^{1,\alpha}$, $a \in C^{0,\alpha}$ und a^i elliptisch, d.h.

$$\frac{\partial a^i}{\partial p_j}\,\xi_i\,\xi^j > 0 \qquad \forall\, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$$

Die Frage nach der Existenz der Lösung einer RWA hängt im wesentlichen davon ab, a priori Abschätzungen für $|u|$, $|Du|$ herzuleiten. Die Existenz einer Lösung folgt dann mittels eines Leray-Schauder Arguments

3.1 Fixpunktsätze, Satz von Leray-Schauder und Anwendungen.

Der folgende Fixpunktsatz ist eine spezielle Form des allgemeinen Leray-Schauderschen Satzes

3.1.1 Theorem (Schäfer)

Sei V ein Banachraum, $T : V \to V$ stetig und kompakt. Nehme an, es gäbe $M > 0$, so daß alle Quasifixpunkte von T,

d. h. alle Lösungen der Gleichung

$$u = \sigma T u \quad , \qquad 0 < \sigma < 1 ,$$

im Innern der Kugel $B_M(0)$ liegen.

Dann besitzt T einen Fixpunkt.

Bevor wir den Satz beweisen, eine

Anwendung

3.1.2 Theorem

Das Dirichletproblem

$$(*) \begin{cases} Au + a(x, u, Du) = 0 \\ \qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

besitzt eine Lösung $u \in \cancel{H^{2,p}}\, C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ $\forall\, 1 \le p < \infty$,

falls $\varphi \in C^{2,\alpha}$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $a^i \in C^2$, $a \in C^1$, und

falls für alle Lösungen der RWA

$$Au_\sigma + \sigma\, a(x, u_\sigma, Du_\sigma) + (1-\sigma)\frac{\partial a^i}{\partial x^i}(x, u_\sigma, Du_\sigma) = 0 \quad , \quad u_\sigma \in \cancel{H^{2,p}}\, C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})(\Omega), \; p > n$$

$$u_\sigma|_{\partial\Omega} = \sigma\varphi$$

$0 < \sigma < 1$, gilt

$$|u_\sigma| + |Du_\sigma| \le M \qquad \forall \sigma .$$

<u>Beweis:</u>

Sei $v \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$; betrachte den linearisierten operator

$$- a^{ij}(x, v, Dv) \cdot D_i D_j u \; - \; \frac{\partial a^i}{\partial u}(x, v, Dv) \cdot D_i u$$

$$- \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + a(x, v, Dv) \;\equiv\; L u$$

Wir können dann eine Abbildung

$T : C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \to C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ definieren

durch

$$u =: T v \;,$$

u Lösung der RWA

$$(**) \quad \begin{cases} L u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

$C^{2,\alpha}$

Eine Lösung $u \in H^{2,p}(\Omega)$ $\forall 1 < p < \infty$

existiert, da die Koeffizienten für festes v

glm. elliptisch und Hölderstetig sind.

<u>Beh</u>:

(i) T ist kompakt:

Sei $\|v_k\|_{1,\alpha} \leq M$, dann sind die

Koeffizienten glm. elliptisch und Hölderstetig

in <u>Abhängigkeit nur von M</u> $\Longrightarrow$

$$\|u_k\|_{2,p} \leq c(p, M) \qquad \forall\, n < p < \infty$$

$$\|u_k\|_{2,\alpha} \leq c(\alpha, M)$$

wählen wir p so groß, daß

$$\alpha < 1 - \frac{n}{p} =: \beta \quad ,$$

so ist daher

$$\|u_k\|_{1,\beta} \le c(p, M) \qquad \forall k$$

und (u_k) präkompakt in $C^{1,\alpha}(\bar\Omega)$.

(ii) <u>T ist stetig</u>

Sei $v_k \xrightarrow[C^{1,\alpha}]{} v$ und sei $u_k = T v_k$

Eine T. F., die wir nicht umbenennen wollen, konvergiert dann in $C^{1,\alpha}(\bar\Omega)$

 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$

und schwach in $H^{2,p}(\Omega)$ nach einer

Lösung u der RWA (**) ~~mit Koeff.~~

wobei die Koeffizienten von L von v abhängen.

Wenn wir zeigen können, daß

$$u = Tv ,$$

dann ist die Beh bewiesen, da die T. F.

beliebig ausgewählt war.

Die Gleichheit $u = Tv$ folgt aber aus

der Eindeutigkeit der Lösung von (**)

(Maximumprinzip; vgl. Thm. 6.29, Part. Dgl I)

Sei nun u ein Quasifixpunkt, d.h.

$$u = \sigma T u, \quad 0 < \sigma < 1$$

Dann ist u Lösung der RWA

$$Au + \sigma a(x, u, Du) + (1-\sigma)\frac{\partial a^i}{\partial x^i} = 0$$

$$u|_{\partial\Omega} = \sigma\varphi$$

$\Longrightarrow$

$$|u| + |Du| \le M_1$$

$\Longrightarrow$

$$|u|_{1,\alpha} \le M_2 < M_2 + 1$$

nach $u \in H^{2,2}$ und De Giorgi-Nash (Chap. 1.5)

T besitzt daher einen Fixpunkt u,

und (*) somit eine Lösung.

Zum Beweis von Thm. 2.1.1 benötigen

wir einige vorbereitende Sätze, insbesondere

den Brouwerschen Fixpunktsatz.

<u>2.1.3 Thm</u> (Schauder)

Sei V ein BR, $K \subset V$ kompakt und

konvex und sei $T : K \to K$ stetig. Dann

$\exists$ Fixpunkt $u \in K$ von T.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Da K kompakt ist, $\exists$

$u_1, \dots u_N$, $N = N(k)$, $u_i \in K$, so daß

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{1/k}(u_i) \quad , \quad B^i := B_{1/k}(u_i)$$

Sei $S_k :=$ conv $(u_1, \dots u_N)$ und definiere

$$J_k : K \to S_k$$

$$J_k u := \frac{\sum_i d(u, K - B^i)\, u_i}{\sum_i d(u, K - B^i)}$$

Es gilt

$$(*) \quad \| J_k u - u \| \leq \frac{\sum_i d(u, K - B^i) \cdot \| u_i - u \|}{\sum_i d(u, K - B^i)} < \frac{1}{k}$$

Die Abbildung

$$J_k \circ T : S_k \longrightarrow S_k$$ ist stetig und

besitzt nach dem Brouwerschen Fixpunkt-satz einen Fixpunkt v_k, eine T. F.

$$v_k \longrightarrow v \in K$$

<u>Beh</u>: $v = Tv$,

denn

$$\| v_k - T v_k \| = \| J_k T v_k - T v_k \| \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{k}$$

und T ist stetig.

~~6.2.4~~ 2.1.4 Corollar

Sei V B R, $K \subset V$ konvex u. abg

und sei $T : K \to K$ stetig und ~~kompakt~~.
$T(K)$ präkompakt.
Dann besitzt T einen Fixpunkt.

Beweis: (i) A präkompakt $\Rightarrow$ $\langle A \rangle$ präkomp. s. p. 60a

(ii) Sei $C = \overline{\text{conv}(T(K))}$ = kompakt. Wende

dann ~~6.2.3~~ 2.1.3 auf $T : C \to C$ an.

$A \approx D_\varepsilon$

$\langle A \rangle \approx \langle D \rangle_\varepsilon$

$\| \sum \lambda_i x^i - \sum \lambda_i \bar{x}^i \| < \varepsilon$

d.h. zu $\varepsilon > 0$ $\exists$ P = Polygon, so daß

$\forall_{x \in \langle A \rangle} \quad \exists_{\bar{y} \in P} \quad \| x - \bar{x} \| < \varepsilon$

P ist präkompakt, d.h.

$P \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(\bar{x}_i) \quad , \bar{x}_i \in P$

$\Rightarrow$

$\langle A \rangle \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{2\varepsilon}(\bar{x}_i)$

Beweis von Thm ~~6.2.1~~ 3.1.8 :

o. B. d. A dürfen wir $M = 1$ annehmen.
(sonst betrachte $M^{-1} \cdot T \circ M$)

Definiere

$$T^* u := \begin{cases} T u , & \|Tu\| \leq 1 \\ \dfrac{Tu}{\|Tu\|} , & \|Tu\| \geq 1 \end{cases}$$

$$T^* u = \frac{Tu}{\max(1, \|Tu\|)}$$

$T^* : B_1 \to B_1$ stetig und

$T^*(B_1)$ ist präkompakt

$$\Longrightarrow \quad \exists u : u = T^* u , \quad \|u\| \leq 1$$

6.2.4

3.1.4

Beh: u ist Fixpunkt von T.

Beweis: Sei $\|Tu\| > 1$, dann ist

$$u = \sigma T u \,, \quad \sigma = \frac{1}{\|Tu\|}$$

$\Rightarrow$ $\|u\| < 1$ im Widerspruch zu

$$\|u\| = \left\| \frac{Tu}{\|Tu\|} \right\| = 1$$

2.f. 5 Bemerkung.

Mit Hilfe dieses Fixpunktsatzes können wir auch die Existenz von Lösungen von

Variationsungleichungen herleiten, z. B.

Sei $K = \{ v \in H^{1,\infty}(\Omega) ; \ v \geq \psi , \ v|_{\partial\Omega} = \varphi \}$,

wobei $\psi|_{\partial\Omega} \leq \varphi$, $\psi, \varphi \in C^2$, $\partial\Omega \in C^2$ und

sei

(*) $u \in K ; \ \langle Au + a(x,u,Du) , v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$

Lösungen von (*) sind dann von der Klasse

$H^{2,p}(\Omega) \quad \forall \, 1 \leq p < \infty$.

Wenn dann a priori Schranken von

$|u| + |Du|$

für alle Lösungen

$$u_\sigma \in K_\sigma : \langle Au + (1-\sigma)\frac{\partial a^i}{\partial x_i} + \sigma a(x,u,Du), v-u \rangle \geq 0$$

$$K_\sigma = \{ v \in H^{1,\infty}(\Omega) : v \geq \sigma\psi,\ v|_{\partial\Omega} = \sigma\varphi \}$$

$0 < \sigma < 1$, existieren, dann liefern die gleichen Überlegungen wie in 2.1.2 die Existenz einer Lösung von (*).

2.1.6 Bemerkung:

Zur Lösung eines Gleichungsproblems kann man auch ~~im $C^{2,\alpha}$~~ mit $C^{2,\alpha}$-Abschätzungen anstelle von $H^{2,p}$-Abschätzungen arbeiten, falls die Daten es zulassen.

3.1.5

2.1.7 ~~Lemma~~ Thm (Leray-Schauder)

Sei V BR und $T: V \times [0,1] \to V$

stetig und kompakt. Sei

$$T(u,0) = 0 \qquad \forall u$$

und existiere $M > 0$, sodaß $\forall\ 0 < \sigma < 1$

gilt:

$$u = T(u,\sigma) \implies \|u\| < M$$

Dann $\exists\ u$ mit

$$u = T(u,1)$$

Zum Beweis verwenden wir

3.1.6

2.1.8 Lemma

Sei $B = B_1(0) \subset V = BR$ und sei

$$T : \bar{B} \to V \quad \text{stetig}$$

$$T(\bar{B}) = \text{präkompakt und } T(\partial B) \subset B.$$

Dann besitzt T einen Fixpunkt.

Beweis: Definiere

$$T^* u = \begin{cases} Tu, & \|Tu\| \leq 1 \\ \dfrac{Tu}{\|Tu\|}, & \|Tu\| \geq 1 \end{cases}$$

$T^* : \bar{B}_1 \to \bar{B}_1$ stetig und $T(\bar{B}_1) =$
= präkompakt

$\Rightarrow$ T^* besitzt Fixpunkt u
3.1.4

$\Rightarrow$ $u = Tu$,

denn sei $\|Tu\| > 1$ $\Rightarrow$

$\|u\| = 1$ $\Rightarrow$

$\|Tu\| < 1$ Widerspruch.

3.1.5

Beweis von 2.1.7.

o. B. d. A. sei $M = 1$, d.h.

(*) $\quad \|u\| < 1 \qquad \forall u$ mit $u = T(u,\sigma)$, $0 < \sigma \leq 1$

Sei $0 < \varepsilon \leq 1$ und $T^* : \bar{B} = \overline{B_1(0)} \to V$

definiert durch

$$T^* u = T^*_\varepsilon u := \begin{cases} T\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{1 - \|u\|}{\varepsilon}\right), & 1 - \varepsilon \leq \|u\| \leq 1 \\ T\left(\frac{u}{1-\varepsilon}, 1\right), & \|u\| \leq 1 - \varepsilon \end{cases}$$

T^* ist stetig, $T^*(\bar{B})$ präkompakt und

$T^*(\partial B) = \{0\}$

$\Longrightarrow$ $\exists\, u_\varepsilon$: $u_\varepsilon = T^* u_\varepsilon$

~~2.1.8~~

3.1.6

Lasse nun $\varepsilon \to 0$ und setze

$$\sigma_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^{-1}(1 - \|u_\varepsilon\|), & 1-\varepsilon \le \|u_\varepsilon\| \le 1 \\ 1, & \|u_\varepsilon\| \le 1-\varepsilon \end{cases},$$

~~d.h.~~

$$\cancel{u_\varepsilon = T(\sigma}$$

d.h.

$$u_\varepsilon = \begin{cases} T\left(\frac{u_\varepsilon}{\|u_\varepsilon\|}, \sigma_\varepsilon\right), & 1-\varepsilon \le \|u_\varepsilon\| \le 1 \\ T\left(\frac{u_\varepsilon}{1-\varepsilon}, \sigma_\varepsilon\right), & \|u_\varepsilon\| < 1-\varepsilon \end{cases}$$

Eine T.F. von $(u_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ konvergiert dann im $V \times [0,1]$ nach k

$$(u, \sigma)\,,$$

da T kompakt ist.

Nach Konstruktion gilt

$$\sigma = 1\,,$$

denn sei

$$\sigma < 1$$

$\Rightarrow$

$$\|u_\varepsilon\| \geq 1 - \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\|u\| = 1$ und $u = T(u, \sigma)$

im Widerspruch zu $(*)$ $(\|u\| < 1)$

$$\sigma = 1 \qquad \Longrightarrow$$

$$u_\varepsilon = T_\varepsilon^*(u_\varepsilon) \longrightarrow T(u, 1)$$

$$\Longrightarrow$$

$$u = T(u, 1)$$

qed.