2.4

1.5. Anwendung auf nichtlineare Gleichungen

Betrachte einen quasilinearen elliptischen Differentialoperator

$$Au = -D_i\left(a^i(x, u, Du)\right) \qquad , a^i \in C^1$$

$$\frac{\partial a^i}{\partial p_j} \equiv a^{ij}$$

mit

$$a^{ij} \xi_i \xi_j > 0 \qquad \forall\, \xi \neq 0$$

Sei $u \in H^{1,\infty}(\Omega)$, Ω beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$

eine Lipschitzstetige Lösung der RWA

$$Au = f \quad , \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi$$

mit $f \in L^p(\Omega)$, $\varphi \in H^{2,p}(\Omega)$, $p > n$.

Dann gilt

1.5.1 Theorem

Die Lösung u dieser RWA ist ebenfalls von der Klasse $H^{2,p}(\Omega)$. Ist darüberhinaus $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, so ist auch $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Beweis:

(i) Wir beachten, daß ~~die L^2-Abschätz~~

wegen $u \in H^{1,\infty}(\Omega)$, a^{ij} glm. elliptisch

ist, ~~so daß~~ und die unmittelbaren

Funktionen

$$\cancel{a^i(x, u(x), \cdot) \in H^{1,\infty}(\Omega)}$$

$$a^i(\cdot, u(\cdot), p) \in H^{1,\infty}(\Omega)$$

Die L^2-Abschätzungen liefern daher

sofort $\boxed{u \in H^{2,2}(\Omega).}$

s. Chap 1.6

Als nächstes wollen wir zeigen, daß
$u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

(ii) <u>Innere Abschätzungen</u>: $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$

Sei $1 \leq k \leq n$ fest und $v := D_k u$.

Differentiation der Gleichung nach x^k
liefert

$$- D_i \left(a^{ij} D_j v + \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \frac{\partial a^i}{\partial u} \cdot v \right) = D_k f$$

$\Rightarrow$

$$- D_i (a^{ij} D_j v) = - D_i f^i$$

mit gewissen $f^i \in L^p(\Omega)$, $p > n$.

Wir haben hierbei ausgenutzt, daß

$$v \in L^\infty(\Omega) \cap H^{1,2}(\Omega)$$

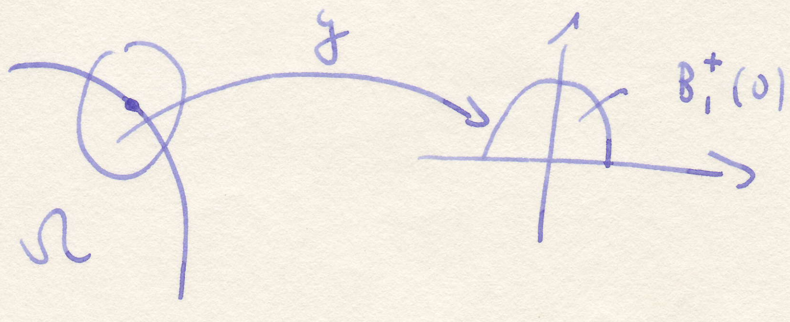
Hieraus folgt unmittelbar, daß

$$\boxed{v \in C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

mit einem $0 < \alpha < 1$.

(iii) <u>Randabschätzungen</u> : $v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Wir biegen den Rand lokal auf



s. Satz 1.6.1

durch eine C^2-Trsf. $y = y(x)$, so daß eine kleine Randumgebung eines Punktes $x_0 \in \partial\Omega$ abgebildet wird in die obere Halbkugel $B_1^+(0)$ und der entsprechende Teil von $\partial\Omega$ in die ~~ges~~ Hyperebene $\{y^n = 0\}$. Durch diese Trsf. ändert sich die Struktur der Gleichung nicht:

Die trsf. Gleichung lautet.

$$-\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\sqrt{g} \cdot \tilde{a}^i(y, \tilde{u}, Du)\right) = \overset{\tilde{f}}{\cancel{-\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i}(\sqrt{g}\, \tilde{f}^i)}}$$

wobei

$$\tilde{g}_1 = \left|\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial y^j}\right)\right|^2$$

$$\tilde{f} = f \circ y^{-1}$$

und

$$(*)\quad \begin{cases} \tilde{a}^i = a^k \cdot \dfrac{\partial y^i}{\partial x^k} \\[2em] \cancel{\tilde{f}^i = g^k \cdot \dfrac{\partial y^i}{\partial x^k}} \end{cases}$$

Hier liegt zugrunde, daß ein kontravariantes Vektorfeld sich bei Koordinatenwechsel wie (*) transformiert, und daß die Divergenz invariant definiert ist durch

$$\operatorname{div} \mathfrak{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \cdot \mathfrak{g}^i \right)$$

Hierbei ist $g = \det (g_{ij})$ und g_{ij} sind die Komponenten der Metrik zum Koordinatensystem (x^i). Die Metrik transf. sich entsprechend der Regel

$$(**) \quad \tilde{g}_{ij} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial y^j}$$

In unserem Falle waren die zu dem (x^i) gehörenden Komponenten von $g_{ij} = \delta_{ij}$

Da die Struktur sich nicht ändert, wollen auch die Bezeichnungen beibehalten und annehmen, daß der Rand bereits lokal aufgebogen sei, so daß

$$Au = \cancel{-D_i f^i}\, f \quad \text{in } B_1^+(0)$$

$$u = \varphi \qquad \text{auf } \{x^n = 0 : |x| < 1\} =: \Gamma$$

Sei nun $1 \le k \le n-1$ und

$$v = D_k u$$

Dann erfüllt v eine Gleichung der

Form

$$(+)\quad \begin{aligned} -\partial_i(a^{ij}\partial_j v) &= -\partial_i f^i \\ v\big|_\Gamma &= \partial_k \varphi \end{aligned}$$

mit $\partial_k \varphi \in H^{1,p}$ und damit

$$\partial_k \varphi \in C^{0,\alpha}\,, \quad \alpha = 1 - \frac{n}{p}$$

Also ist

$$v \in C^{0,\alpha}\left(\overline{B^+_{1/2}(0)}\right)$$

Es bleibt noch $\partial_n u$ abzuschätzen:

Sei v immernoch wie eben definiert,

sei $\cancel{\xi \in B}$ $0 < R < 1$, $\xi \in \bar{B}_R^+(0)$ und

$\eta \in C_c^1(B_R(0))$ eine Abschneidefunktion mit

$$\eta = \begin{cases} 1, & x \in B_\rho(\xi) \\ 0, & x \notin B_{2\rho}(\xi) \end{cases}$$

$$|D\eta| \leq \frac{1}{\rho}$$

wobei

$$B_{2\rho}(\xi) \subset B_R(0), \text{ d.h.}$$

$$2\rho < R - |\xi|$$

Unterscheide nun zwei Fälle

1.) Sei $B_{2\varrho}(\xi) \cap \Gamma \neq \emptyset$, Γ = Hyperebene

und wähle $\xi_0 \in B_{2\varrho}(\xi) \cap \Gamma$.

Dann multipliziere (+) mit

$$\{ v - D_k \varphi(\xi_0) - (D_k \varphi - D_k \varphi(\xi_0)) \} \cdot \eta^2$$

$$= \{ v - D_k \varphi \} \eta^2 \in H_0^{1,2}(B_R^+(0))$$

und integriere partiell,

und

2.) für $B_{2\rho}(\xi) \cap \Gamma = \emptyset$,

dann multipliziere (+) mit

$$(v - v(\xi)) \cdot \eta^2$$

und integriere partiell.

Die Einfügung der Konstanten $D_k \varphi(\xi_0)$ bzw $v(\xi)$ geschieht, um die Hölder-stetigkeit von v auszunutzen, da dann

$$|v(x) - v(\xi)| \leq c \cdot |x - \xi|^\alpha \qquad \forall x \in B_{2\rho}(\xi)$$
$$\leq c \cdot \rho^\alpha$$

entsprechend

$$|v(x) - D_k \varphi(\xi_0)| \leq c \cdot |x - \xi_0|^\alpha \leq c \cdot \rho^\alpha \quad \forall x \in B_{2\rho}(\xi)$$

Beachte, daß

$$v\big|_\Gamma = D_k\varphi \quad .$$

~~Fu~~

Wir führen nur die Rechnung im Falle 1.) vor (und setzen $\Omega = B_1^+(0)$)

$$\int_{\cancel{B_\rho}} a^{ij} D_j v \cdot D_i v \cdot \eta^2 = \int_\Omega a^{ij} D_j v \cdot D_i D_k \varphi \cdot \eta^2$$

$$- 2 \cdot \int_\Omega a^{ij} D_i v \cdot \{ v - D_k\varphi(\xi_0) - (D_k\varphi - D_k\varphi(\xi_0)) \} \cdot D_j \eta \cdot \eta$$

$$+ \int_\Omega f^i \{ D_i v - D_i D_k \varphi \} \cdot \eta^2 + 2 \cdot \int_\Omega f^i \{ v - D_k\varphi(\xi_0) - (D_k\varphi - D_k\varphi(\xi_0)) \} \cdot D_i \eta \cdot \eta$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{\cancel{B_\rho(\xi)}\cap\Omega} |Dv|^2 \le c\cdot \int_{B_{2\rho}(\xi)\cap\Omega} |D^2\varphi|^2 + \cancel{c\cdot b\cdot\rho^{-1}\cdot\int_{B_{2\rho}\cap\Omega}}$$

$$+\, c\cdot\rho^{-2}\cdot\int_{B_{2\rho}(\xi)\cap\Omega} \left\{ |v-v(\xi_0)|^2 + |D_h\varphi - D_h\varphi(\xi_0)|^2 \right\}$$

$$+\, c\cdot\int_{B_{2\rho}(\xi)\cap\Omega} \left\{ |f|^2 + |D^2\varphi|^2 \right\}$$

$$+\, c\cdot\rho^{-1}\cdot\int_{B_{2\rho}(\xi)\cap\Omega} |f|\cdot\left\{ |v-v(\xi_0)| + |D_h\varphi - D_h\varphi(\xi_0)| \right\}$$

$$\equiv \bar{I}_1 + \dots + \bar{I}_4$$

$$\underline{I}_1 \le c \cdot \|\varphi\|^2_{2,p} \cdot \varrho^{n - \frac{2n}{p}}$$

$$\underline{I}_2 \le c \cdot \{ [\varphi]^2_{0,\alpha} + [D\varphi]^2_{0,\alpha} \} \cdot \varrho^{n-2+2\alpha}$$

$$\underline{I}_3 \le c \cdot \{ \|f\|^2_p + \|\varphi\|^2_{2,p} \} \cdot \varrho^{n - \frac{2n}{p}}$$

$$\underline{I}_4 \le c \cdot \|f\|_p \cdot \varrho^{n-1-\frac{n}{p}+\alpha}$$

Nehmen wir noch an, daß $R \le 1$,

und somit $\varrho \le 1$, so folgt

$$\int_{B_{\cancel{2}\varrho}(\xi)\cap\Omega} |Dv|^2 \le c \cdot L^2 \cdot \varrho^{n-2+2\lambda} ,$$

$$\lambda = \min\left(\alpha, 1 - \frac{n}{p}\right)$$

und

$$L^2 = \|\varphi\|^2_{2,p} + \|f\|^2_p + [v]^2_{0,\lambda} + [\varphi]^2_{0,\lambda} + \|f\|_p$$

Betrachten wir nun die durchdifferenzierte Gleichung

$$-a^{ij} D_i D_j u - \frac{\partial a^i}{\partial x^i} - \frac{\partial a^i}{\partial u} \cdot D_i u = f$$

und nutzen die glm. Elliptizität aus, d.h. $a^{nn} \geq c_0 > 0$, so erhalten wir hieraus ~~eine ähnliche~~ dieselbe Abschätzung für

$$\int_{B_{\cancel{R}\,\varrho}(\xi) \cap \Omega} |D_n D_n u|^2 \leq c \cdot L^2 \cdot \varrho^{n-2+2\lambda}$$

und damit gilt für $w = D_n u$

$$(*) \quad \int_{B_{\cancel{1}\rho}(\xi)\cap\Omega} |Dw|^2 \le c \cdot L^2 \cdot \rho^{n-2+2\lambda}$$

$$\forall \; \xi \in \overline{B_R^+(0)} \quad \text{und} \quad \forall \; 0 < \rho \le R - |\xi|$$

Aus (*) folgt dann die Hölderstetigkeit von w mit Exponent λ, wie wir in Lemma 1.5.2 zeigen werden.

(iv) $\underline{u \in H^{2,p}}$:

Wir wissen nun, daß $u \in H^{2,2}(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$

$\Longrightarrow$

$$-a^{ij} D_i D_j u = F \in L^p(\Omega)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi$$

mit ~~Höld~~ glm. stetigen Koeffizienten $a^{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$

Die L^p- Abschätzungen liefern nun (und Eindeutigkeit) die Behauptung. Gilbarg-Trudinger

$a^{ij} \in C^{1,\alpha}$

s. 6.1.8, p II $a^{ij} \in C^{0,\alpha}$

(v) $\underline{u \in C^{2,\alpha}}$: (und Eindeutigkeit von $H^{2,2}$ Lösungen

Dies sind die Schauderergebnisse, da die Koeffizienten Hölderstetig sind.

2.4.2

1.5.2 Lemma (Morrey).

Sei $\Omega = B_R(Q)$ bzw $B^+_R(Q)$ und

erfülle $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p \le n$, die

Abschätzung

$$(*) \quad \int_{B_\rho(\xi)\cap\Omega} |Du|^p \le c \cdot L^p \cdot \left(\frac{\rho}{Q}\right)^{n-p+p\cdot\lambda}$$

$\forall\ 0 < \rho \le \frac{R}{4}$ und $\forall\ \xi \in B_{R/4}(0)$

bzw $\xi \in \overline{B^+_{R/4}(0)}$.

Dann ist u ~~Höl~~ $\in C^{0,\lambda}(\overline{B_{R/4}(0)})$

bzw $C^{0,\lambda}(\overline{B^+_{R/4}(0)})$

und es gilt

$$|u(x)-u(\xi)| \leq c \cdot L \cdot \delta^{1-\mu} \cdot \left(\frac{|x-\xi|}{\delta} \right)^{-1}$$

$$\forall\ |x-\xi| \leq \frac{R}{4}\ , \quad \delta = R - |\xi|$$

ξ wie oben gewählt, d.h. falls

$\Omega = B^+_R(0)$ ist $u \in C^{0,1}(\overline{B^+_{R/4}(0)})$

<u>Beweis</u>:

Betrachten wir nur den Fall $\Omega = B_R(0)$;

der Beweis im anderen Falle ist identisch.

Sei zunächst $u \in C^1(\bar{\Omega})$ beliebig. Seien

$$x, \xi \in B_{R/4}(0), \quad \varrho = \frac{|x-\xi|}{2}, \quad \bar{x} = \frac{x+\xi}{2}$$

~~und sei~~ $\cancel{2\varrho \le R - |\xi| = 7\varrho}$ ~~($\varrho \le \frac{R}{4}$)~~

Für $y \in B_\varrho(\bar{x})$ gilt dann

$$u(y) - u(\xi) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(ty + (1-t)\xi) =$$

$$= \int_0^1 D_i u(\dots)(y^i - \xi^i)$$

$\Rightarrow$

$$|u(y) - u(\xi)| \le 2\varrho \cdot \int_0^1 |Du(ty + (1-t)\xi)|$$

$\Rightarrow$

$$|B_\varrho(\bar{x})|^{-1} \cdot \int_{B_\varrho(\bar{x})} |u(y) - u(\xi)| \le 2\varrho \cdot |B_\varrho(\bar{x})|^{-1} \cdot \int_0^1 \int_{B_\varrho(\bar{x})} |Du(ty + (1-t)\xi)|$$

Diese Abschätzung gilt auch für unter $u \in H^{1,p}$

Variablentrf.

$$z := t\,y + (1-t)\,\xi \quad , \quad \bar{z} = t\,\bar{x} + (1-t)\,\xi$$

$$dz = t^{n} \cdot dy \quad , \quad \cancel{|z-\bar{z}| \le} \; |z-\bar{z}| \le t \cdot \rho$$

$\Longrightarrow$

$$\int_0^1 \int_{B_\rho(\bar{x})} |Du(t\,y + (1-t)\,\xi)|\, dy\,dt = \int_0^1 t^{-n} \cdot \int_{B_{t\cdot\rho}(\bar{z})} |Du| \le$$

$$\le c \cdot \int_0^1 t^{-n}\,(t\cdot\rho)^{n \cdot \frac{p-1}{p}} \cdot \Big(\int_{B_{t\rho}(\bar{z})} |Du|^p \Big)^{1/p}$$

~~Beachten wir, daß~~ $\cancel{|\bar{z}-\xi| < \rho}$

Beachten wir, daß $\bar{z} \in B_{R/4}(0)$ $\;(|\bar{z}| \le \rho)$

$$\delta_t := R - |\bar{z}| \geq R - \{|\xi| + t\cdot\rho\} =$$

$$= R - |\xi| - t\rho \geq \delta - t\rho \geq \delta - \rho \geq$$

$$\geq \frac{\delta}{2} \, ,$$

Dann
so folgt aus $(*)$

$$\left(\int_{B_{t\rho}(\bar{z})} |Du|^p\right)^{1/p} \leq c\cdot L\cdot \left(\frac{t\rho}{\delta}\right)^{\frac{n}{p}-1+\lambda}$$

$\Longrightarrow$

$\cancel{|u(y) - u(}$

$$|B_\rho(\bar{x})|^{-1}\cdot \int_{B_\rho(\bar{x})} |u(y) - u(\xi)| \leq c\cdot L\cdot \rho^{\lambda}$$

Führen wir die gleiche Überlegung mit x anstelle von ξ durch $\Rightarrow$

$$|u(x)-u(\xi)| = |B_\rho(\bar{x})|^{-1} \cdot \int_{B_\rho(\bar{x})} |u(x)-u(\xi)| \leq$$

$$\leq |B_\rho(\bar{x})|^{-1} \cdot \int_{B_\rho(\bar{x})} \{ |u(y)-u(x)| + |u(y)-u(\xi)| \} dy$$

$$\leq c \cdot L \cdot \rho^{\lambda} = c \cdot L \cdot |x-\xi|^{\lambda} .$$