Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker II

Blatt 8

1 Sei E ein Vektorraum und U, V Teilräume, dann heißt $U + V$ eine *direkte Summe*, und wir schreiben dafür auch $U \oplus V$, falls

$$U + V = E \quad \wedge \quad U \cap V = \{0\}.$$

V nennen wir auch ein *algebraisches Komplement* von U und umgekehrt. Beweisen Sie bitte, daß jeder Teilraum U von E ein algebraisches Komplement besitzt. $\boxed{4}$

2 Seien E, F Vektorräume und $A \in \operatorname{Hom}(E, F)$, dann ist $R(A)$ isomorph zum algebraischen Komplement von $N(A)$ und es gilt, falls $\dim E < \infty$,

$$\dim E = \dim N(A) + \dim R(A),$$

wobei $N(A)$ bzw. $R(A)$ den Kern bzw. das Bild von A bedeuten. $\boxed{8}$

3 Sei E ein endlich dimensionaler Vektorraum, $A \in \operatorname{Hom}(E, E)$, dann gilt

$$A \quad \text{injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad A \quad \text{surjektiv}.$$

$\boxed{2}$

4 Sei E ein metrischer Raum und $A_1, A_2 \subset E$ zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen, dann lassen sich A_1, A_2 durch offene Mengen trennen, d.h. es gibt disjunkte offene Mengen $\Omega_i \subset E$, $i = 1, 2$, so daß

$$A_i \subset \Omega_i, \qquad i = 1, 2.$$

$\boxed{2}$

5 Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Man gebe für diese Konfiguration einen einfachen Beweis für den Tietze-Urysohnschen Fortsetzungssatz und verallgemeinere ihn auf den Fall $f : \prod_{i=1}^{n} I_i \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $I_i = [a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$. $\boxed{6}$

6 Man kann Corollary 2.4.2 auch direkt beweisen mit dem Ansatz

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

$\boxed{4}$