**Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker II**

Blatt 7

**1** Man zeige, daß $A \subset E$ genau dann präkompakt ist, wenn $\bar{A}$ präkompakt ist. $\boxed{4}$

**2** Man beweise, daß $\bar{A} \subset E$ genau dann folgenkompakt ist, wenn jede Folge $(x_n)$ aus $A$ eine in $E$ konvergente Teilfolge enthält. $\boxed{2}$

**3** Sei $E$ ein kompakter metrischer Raum und $\mathit{\Lambda}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von $E$ mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathit{\Lambda}$ ungleich der leeren Menge ist. Dann gilt

$$\bigcap_{A \in \mathit{\Lambda}} A \neq \emptyset.$$

$\boxed{4}$

**4** Sei $E$ ein metrischer Raum und $K_n$ eine monoton fallende Folge von nichtleeren kompakten Teilmengen, d.h. $K_{n+1} \subset K_n \; \forall \, n$. Dann gilt

$$\bigcap_{n} K_n \neq \emptyset.$$

$\boxed{2}$

**5** Seien $K_1, K_2$ disjunkte kompakte Mengen in einem metrischen Raum $E$, so können $K_1$ und $K_2$ durch offene Mengen getrennt werden, d.h. es gibt disjunkte offene Mengen $\mathit{\Omega}_i \subset E$, $i = 1, 2$, so daß

$$K_i \subset \mathit{\Omega}_i, \qquad i = 1, 2.$$

$\boxed{2}$

**6** Zeigen Sie, daß die abgeschlossene Einheitskugel im Folgenraum $l_2$, versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt, nicht kompakt ist.

*Hinweis*: Betrachten Sie die speziellen Vektoren $e_i \in l_2$, $i \in \mathbb{N}$, die in Beispiel 1.4.6, (iii), definiert sind. Überzeugen Sie sich, daß die $e_i$ Einheitsvektoren sind, die paarweise orthogonal sind, d.h. es gilt

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

und beweisen Sie, daß deren Existenz nicht mit der Kompaktheit der abgeschlossen Einheitskugel verträglich ist. $\boxed{10}$