Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker II

Blatt 6

1 Sei $n \to r_n$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $I = [0,1]$. Für $x \in I$ definiere

$$A(x) = \{\, n \in \mathbb{N} \colon r_n < x \,\}$$

und

$$f(x) = \sum_{n \in A(x)} 2^{-n}.$$

Dann ist die Einschränkung φ von f auf die Menge der irrationalen Zahlen stetig; φ kann aber nicht als stetige Funktion auf ganz I fortgesetzt werden.

$\boxed{8}$

2 Seien E, E' normierte Räume und $A : E \to E'$ linear. Dann gilt

$$A \quad \text{stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{c>0}{\exists}\ \underset{x \in E}{\forall}\ \|Ax\| \le c\|x\|.$$

$\boxed{10}$

3 Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$. Wir erweitern dann die Definition von *Limes inferior* und *Limes superior*, indem wir setzen $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$, falls zu jeder natürlichen Zahl k eine unendliche Teilmenge $I_k \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$a_n < -k \qquad \forall\, n \in I_k,$$

und entsprechend $\overline{\lim}\, a_n = \infty$, falls zu jeder natürlichen Zahl k eine unendliche Teilmenge $I_k \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$a_n > k \qquad \forall\, n \in I_k.$$

Wir treffen folgende Vereinbarungen

(1) $\quad \infty + a = \infty \qquad \forall\ -\infty < a \le \infty$

(2) $\quad -\infty + a = -\infty \qquad \forall\ -\infty \le a < \infty$

(3) $\quad (-1)\infty = -\infty$

(4) $\quad a\infty = \operatorname{sign} a\, \infty \qquad \forall\ 0 \ne a \in \mathbb{R}$

(5) $\quad \dfrac{a}{\infty} = 0 \qquad \forall\ a \in \mathbb{R}$

(6) $\quad \dfrac{a}{0} = \operatorname{sign} a\, \infty \qquad \forall\ 0 \ne a \in \mathbb{R}$

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 0∞ und $\infty - \infty$ sind nicht definiert.

Beweisen Sie dann folgende Limesbeziehungen:

(i) $\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}(a_n + b_n)$

(ii) $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$

(iii) $\overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}(a_n + b_n)$

(iv) $a_n \leq b_n \implies \overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n \ \wedge\ \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$

falls beide Seiten der Ungleichungen definiert sind, und es gilt ferner, falls $a_n, b_n \geq 0$ und beide Seiten wieder definiert sind

(v) $\overline{\lim}(a_n b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n\, \overline{\lim}\, b_n$

(vi) $\overline{\lim}\, a_n\, \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}(a_n b_n)$

(vii) $\underline{\lim}\, a_n\, \underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}(a_n b_n)$

(viii) $\overline{\lim}(\frac{1}{a_n}) = \frac{1}{\underline{\lim}\, a_n}$

Ferner gilt für eine beliebige Folge $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\underline{\lim}\, a_n = -\,\overline{\lim}(-a_n)$$

und

$$a = \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n \quad\iff\quad a = \lim a_n.$$

$\boxed{10}$