Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker II

Blatt 4

1 Beweisen Sie, daß es zu jedem $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ genau eine komplexe Zahl w gibt mit $w^2 = z$ und $\operatorname{Re} w > 0$. Man nennt w den *Hauptteil der Wurzel* von z und schreibt $w = \sqrt{z}$. $\boxed{2}$

2 Bestimmen Sie $\sqrt{i}$. Welche weiteren Lösungen besitzt die Gleichung $w^2 = i$? $\boxed{2}$

3 Für $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ gilt

$$\sqrt{z} = \sqrt{(|z| + \operatorname{Re} z)/2} + i \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)\sqrt{(|z| - \operatorname{Re} z)/2},$$

wobei

$$\operatorname{sign} a = \begin{cases} 1, & a \geq 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Wir nennen $\operatorname{sign} a$ das *Signum* von a. $\boxed{4}$

4 Man beweise Proposition 1.7.10. $\boxed{4}$

5 Es gelten folgene Behauptungen

(i) Sei A eine offene Teilmenge eines metrischen Raumes E, dann gilt für jede Teilmenge $B \subset E$

$$A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}.$$

$\boxed{2}$

(ii) Es gibt offene Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$, so daß die vier Mengen $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$ alle verschieden sind. $\boxed{4}$

(iii) Es gibt Intervalle $A, B \subset \mathbb{R}$, so daß

$$A \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B}$$

$\boxed{2}$

6 Man zeige, daß $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$. $\boxed{2}$
Hinweis: Benutzen Sie, daß $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, vgl. Theorem 0.4.29.