Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker II

Blatt 11

1 Beweisen Sie Proposition 2.7.3. $\boxed{4}$

2 Sei E ein endlich dimensionaler normierter Raum mit Basis e_i, $i = 1, \dots, n$, dann konvergiert

$$x_k = \sum_i \lambda_k^i e_i$$

genau dann nach 0, wenn die Basiskomponenten (λ_k^i) in $\mathbb{K}^n$ nach 0 konvergieren. $\boxed{2}$

3 Sei E ein Banachraum und $A \in L(E)$. Dann gilt

(i) Die Reihe $((\frac{A^n}{n!}))$ konvergiert absolut in $L(E)$. $\boxed{2}$

(ii) Setze $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$, so gilt $e^A e^B = e^{A+B}$, falls A, B *kommutieren*, d.h. falls der sog. *Kommutator* von A, B

$$[A, B] = AB - BA$$

gleich 0 ist. $\boxed{2}$

4 Sei E ein Banachraum und $A \in L(E)$ mit $\|A\| < 1$. Dann gilt

(i) Die Reihe $((A^n))$ konvergiert. Man nennt sie *Neumannsche Reihe*.

(ii) $I - A$ ist stetig invertierbar, d.h. $(I - A)^{-1}$ existiert und ist stetig, wobei $I = \mathrm{id}_E$. Geben sie die Inverse an.

(iii) Die Menge der stetig invertierbaren Operatoren ist offen in $L(E)$.

$\boxed{10}$

5 Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{C}$, dann können wir E auch als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen; bezeichnen wir diesen Raum mit $E_{\mathbb{R}}$. Sei $\varphi \in E_{\mathbb{R}}^*$, dann existiert eine komplexe Linearform $\tilde{\varphi}$ auf E, so daß $\varphi = \mathrm{Re}\, \tilde{\varphi}$.
Man zeige,

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix),$$

$\tilde{\varphi}$ ist eindeutig bestimmt, $\tilde{\varphi} \in E^*$ und $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. $\boxed{8}$