Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker II

Blatt 1

1 Beweisen sie bitte Proposition 1.3.12. $\boxed{4}$

2 Mit Hilfe der *Youngschen Ungleichung* $\boxed{6}$

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+,$$

hierbei sind p, p' sog. *konjugierte Exponenten*, d.h. $p, p' \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, vgl. Aufgabe 7 on page 195 von Exercises 3.8.10, beweise man

(i) Definiere für $p \in [1, \infty)$ die sog. p-Norm auf $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \big(\sum_{i=1}^{n} |x^i|^p\big)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall\, x = (x^i) \in \mathbb{R}^n,$$

dann gilt für $p \in (1, \infty)$ die sog. *Höldersche Ungleichung*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \, \|y\|_{p'} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n;$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist dabei das euklidische Skalarprodukt.

(ii) $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Setze $\|x\|_\infty = \max_i |x^i|$, so gelten (i) und (ii) auch für die Exponenten $p = 1$ und $p' = \infty$.

3 Zwei Normen $\|\cdot\|, \|\!|\cdot|\!\|$ auf einem Vektorraum E heißen *äquivalent*, falls positive Konstanten c, c' existieren, so daß

$$c\,\|\!|x|\!\| \leq \|x\| \leq c'\,\|\!|x|\!\| \qquad \forall\, x \in E.$$

Man zeige, daß im $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind. $\boxed{8}$

4 Sei (x_n) eine Folge von nicht-negativen Zahlen, die nach 0 konvergiert. Man zeige, daß dann eine unendliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$x_n \geq x_m \quad \forall\, m \geq n, \quad n, m \in I.$$

$\boxed{4}$

5 Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß die Teilfolgen $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ und (x_{3n}) konvergieren, dann konvergiert (x_n). $\boxed{6}$