Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 7

1 Sei $\varphi : H \to \mathbb{R}$ konvex und stetig und $u_n \rightharpoonup u$ eine schwach konvergente Folge, dann gilt

$$\varphi(u) \le \liminf \varphi(u_n).$$

$\boxed{2}$

2 Sei $K \subset H$ abgeschlossen und konvex und $\varphi : K \to \mathbb{R}$ konvex und stetig. Dann besitzt das Variationsproblem

$$J(v) = \|v\|^2 + \varphi(v) \to \min \quad \forall\, v \in K$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in K$. $\boxed{4}$

3 Sei H ein komplexer Hilbertraum, dann läßt sich jedes $T \in L(H)$ in der Form

$$T = A + iB$$

ausdrücken mit s.a. Operatoren $A, B \in L(H)$. Man schreibt auch

$$A = \operatorname{Re} T, \quad B = \operatorname{Im} T.$$

Zeigen Sie bitte

$$T \text{ normal} \iff [\operatorname{Re} T, \operatorname{Im} T] = 0$$

und

$$T \text{ unitär} \iff T \text{ normal} \wedge (\operatorname{Re} T)^2 + (\operatorname{Im} T)^2 = \mathrm{id}\,.$$

$\boxed{6}$

4 Sei $A \in L(H)$, so ist $(A^*A)^{1/2}$ [1] der einzige positive Operator P mit der Eigenschaft

$$\|Pu\| = \|Au\| \qquad \forall u \in H. \tag{0.1}$$

$\boxed{8}$

5 Seien $A, P, U \in L(H)$, U unitär und $P \ge 0$. Wenn dann $A = UP$ gilt, so heißt UP die *polare Zerlegung* von A (denken Sie an $z = re^{i\varphi}$).

Zeigen Sie bitte

(i) $A = UP \implies P$ ist eindeutig bestimmt.
(ii) Sei A invertierbar, dann existiert eine eindeutig bestimmte polare Zerlegung.
(iii) Für normale Operatoren existiert eine polare Zerlegung und alle drei Operatoren kommutieren. $\boxed{12}$

[1] Benutzen Sie, daß positive Operatoren eine s.a. positive Quadratwurzel besitzen.