Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 6

1 Sei H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$A^2 \quad \text{kompakt} \Longleftrightarrow A \quad \text{kompakt} \tag{0.1}$$

$\boxed{3}$

2 Sei H Hilbertraum und $0 \leq A \leq B$, dann gilt

$$B \quad \text{kompakt} \quad \Longrightarrow \quad A \quad \text{kompakt.} \tag{0.2}$$

$\boxed{4}$

3 Sei $A \in L(H)$, dann ist A genau dann kompakt, wenn A^* kompakt ist. $\boxed{2}$

4 Beweisen Sie bitte, daß abgeschlossene konvexe Mengen in einem Hilbertraum auch abgeschlossen sind bezüglich der schwachen Folgenkonvergenz. $\boxed{4}$

5 Man beweise mit Hilfe des Zornschen Lemmas, daß auch nicht separable Hilberträume H eine ONB $(e_i)_{i\in I}$ besitzen, und daß für jedes $x \in H$, die Reihe $((|\langle x, e_i\rangle|^2))_{i\in I}$ absolut summierbar ist im Sinne der Bemerkung 1.5.12 aus Analysis I. In der Reihe $((\langle x, e_i\rangle e_i))$ sind h.a. viele Glieder von Null verschieden und es gilt

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i \qquad \forall\, x \in H$$

sowie

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \qquad \forall\, x \in H.$$

$\boxed{6}$