Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 11

1 Ein symmetrischer Operator heißt wesentlich s.a., fall $\bar{A}$ s.a. Sei A symmetrisch, dann sind äquivalent

(i) A wesentlich s.a.

(ii) $N(A^* \pm i) = \{0\}$

(iii) $R(A \pm i)$ liegt dicht.

$\boxed{10}$

2 Definition Sei A ein linearer Operator in einem Hilbertraum H

$$A : D(A) \subset H \to H. \tag{0.1}$$

Wir definieren das *Spektrum* von A, in Zeichen, $\sigma(A)$, durch

$$\sigma(A) = \{\, \lambda \in \mathbb{K} \colon (A - \lambda)^{-1} \notin L(H) \,\}, \tag{0.2}$$

dies schließt auch den Fall ein, daß $(A - \lambda)$ gar nicht injektiv ist.
Die Komplementmenge des Spektrums nennen wir die *Resolventenmenge*, in Zeichen, $\rho(A)$, und wir bezeichnen

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda)^{-1} \in L(H) \tag{0.3}$$

als die *Resolvente* von A, wenn $\lambda \in \rho(A)$.

3 Sei E ein reeller Vektorraum, dann definieren wir die *Komplexifizierung* $\tilde{E}$ von E durch

$$\tilde{E} = E \oplus iE = \{\, (x, y) = x + iy \colon x, y \in E \,\}. \tag{0.4}$$

$\tilde{E}$ läßt sich eindeutig als Vektorraum über $\mathbb{C}$ definieren, so daß E mit dem Teilraum

$$\{\, (x, 0) \colon x \in E \,\} \tag{0.5}$$

identifiziert werden kann. $\boxed{2}$

Seien E, F reelle Vektorräume und $A \in \operatorname{Hom}(E, F)$, so existiert genau eine lineare Fortsetzung $\tilde{A} \in \operatorname{Hom}(\tilde{E}, \tilde{F})$ von A. Entsprechend läßt sich ein reelles Skalarprodukt auf H eindeutig zu einer Sesquilinearform auf $\tilde{H}$ erweitern. Bestimmen Sie bitte diese Erweiterungen. $\boxed{4}$

Sei H ein reeller HR, $A \in L(H)$ und $\tilde{A}$ die komplexe Erweiterung von A auf $\tilde{H}$. Zeigen Sie dann bitte

(i) $\|A^n\| = \|\tilde{A}^n\| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ $\boxed{6}$

(ii) $\sigma(A) = \sigma(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}$ $\boxed{2}$

(iii) $\lambda \in \rho(A) \implies R_\lambda(A) = R_\lambda(\tilde{A})_{|H}$ $\boxed{2}$

(iv) $\widetilde{A^*} = \tilde{A}^*$ $\boxed{2}$

4 Sei H ein separabler unendlich dimensionaler HR, (e_n) eine ONB und A definiert durch

$$Ae_n = \frac{1}{n+1} e_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{0.6}$$

dann ist A kompakt und $\sigma(A) = 0$. $\boxed{8}$

5 Sei A in H dicht definiert und abschließbar, dann ist A^* dicht definiert und

$$A^{**} = \bar{A}. \tag{0.7}$$

$\boxed{4}$