

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 1

- 1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Beweisen Sie bitte, daß $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ ein Banachraum ist. 4
- 2 Sei Ω beschränkt, offen und konvex. Sei (u_i) eine Folge in $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ mit $|u_i|_{k,\alpha} \leq c$ gleichmäßig in i . Dann existiert eine Teilfolge, die in $C^k(\bar{\Omega})$ konvergiert. Der Limes u liegt wieder in $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. 4
- 3 Sei η ein *Friedrichsscher Mollifier* und $\eta_\epsilon = \epsilon^{-n} \eta(\frac{x}{\epsilon})$ die zugehörige *Diracfolge*. Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $f_\epsilon = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)f(y)$. Beweisen Sie dann bitte
- (i) $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$ 2
 - (ii) f stetig in $K \subset \Omega$, K kompakt $\implies f_\epsilon \rightrightarrows f$ in K . 2
 - (iii) $\text{supp } f_\epsilon \subset \text{supp } f + \epsilon$ 2
 - (iv) $f \in C^m(\Omega) \implies D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha f)_\epsilon \quad \forall |\alpha| \leq m$ und $|f - f_\epsilon|_{m,\Omega'} \rightarrow 0 \quad \forall \Omega' \Subset \Omega$ 2
 - (v) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty \implies \|f - f_\epsilon\|_p \rightarrow 0$ 2
 - (vi) $f \in L^\infty(\Omega) \implies \|f_\epsilon\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ 2
- 4 Beweisen Sie, daß $C_c^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, dicht liegt. 12
- 5 Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ konvex und $0 < \alpha \leq 1$, dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Konstante c_ϵ , so daß

$$|u|_{2,0} \leq \epsilon |u|_{2,\alpha} + c_\epsilon |u|_0 \quad \forall u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

10