Eigenwertprobleme für den Laplaceoperator

Wir wollen Eigenwertprobleme der Form

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{im } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\left\{ -\Delta u = \lambda u \quad \text{in } M = \text{komp. Mfg.} \right.$$

betrachten und alle drei Aufgaben

auf ein abstraktes Prinzip zurückführen.

Sei H ein reeller separabler HR, B, K stetige symm Bilinearformen auf H, und gelte darüber hinaus

(i) K ist kompakt und

$$K(u) \equiv K(u,u) > 0 \qquad \forall u \neq 0$$

(ii) B ist koerziv rel. zu K, d. h. $\exists\, c_0 \geq 0$, und $c > 0$, so daß

$$B(u) \geq c \cdot \|u\|^2 - c_0 \cdot K(u) \qquad \forall u \in H.$$

Wir betrachten dann das abstrakte EW Problem

$$B(u,v) = \lambda R(u,v) \qquad \forall v \in H$$

Lemma 1:

Sei $V \subset H$ ein von 0 verschiedener vollständiger Unterraum. Dann besitzt das Variationsproblem

$$(*) \quad B(v) \to \min \qquad \forall v \in V \cap \{K(v) = 1\}$$

eine Lösung u. u löst auch das VP

$$(**) \qquad \frac{B(v)}{K(v)} \longrightarrow \min \qquad \forall\, 0 \neq v \in K$$

und es gilt, ~~welche~~ ~~ferner~~, daß, wenn

$$\lambda = \inf \left\{ \frac{B(v)}{K(v)} : 0 \neq v \in V \right\},$$

$$B(u,v) = \lambda\, K(u,v) \qquad \forall\, v \in \cancel{K}\, V.$$

Beweis:

(i) (*) besitzt eine Lösung

Sei (u_ε) eine Minimalfolge $\Longrightarrow$

$$\|u_\varepsilon\| \leq \text{const} \Longrightarrow \exists\, u_\varepsilon \rightharpoonup u$$

$$\Longrightarrow \quad K(u) = \lim K(u_\varepsilon) = 1$$

Da die BF

$B + c_0 \cdot K$

~~schwache~~ u.h.s. $\Rightarrow$ B s.u.h.s.

$\Rightarrow$ u löst (*)

$\Rightarrow$ $\exists$ Lagrangesche Multiplikator λ:

$B(u,v) = \lambda K(u,v) \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow$ weitere Behauptungen

Theorem 2:

Das EW Problem

$$B(u_i, v) = \lambda_i K(u_i, v) \quad \forall v \in H$$

besitzt abzählbar viele EW endlicher Vielfachheit. Es gilt

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$$

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_i = \infty$$

Die Eigenvektoren (u_i) sind vollständig in H. Sie erfüllen die Orthogonalitätsrelationen

$$B(u_i, u_j) = \lambda_i \, \delta_{ij} \quad , \qquad K(u_i, u_j) = \delta_{ij}$$

und die Entwicklungssätze

$$K(u, v) = \sum_i K(u_i, u) \, K(u_i, v)$$

$$B(u, v) = \sum_i \lambda_i K(u_i, u) \, K(u_i, v)$$

λ_i und u_i sind durch das Variationsprinzip def.

$$\lambda_i = B(u_i) = \inf \left\{ \frac{B(u)}{K(u)} : u \in H , \ \cancel{\langle u, u_j \rangle = 0} \ K(u, u_j) = 0 , \ 1 \le j \le i-1 \right\}$$

Beweis

1.) Löse das VP

$$\frac{B(u)}{K(u)} \to \min \qquad \forall\, 0 \neq u \in H$$

Nach dem Lemma $\exists$ Lösung u_1,

und es gilt mit

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \frac{B(u)}{K(u)} : 0 \neq u \in H \right\}$$

$$B(u_1, v) = \lambda_1 K(u_1, v) \qquad \forall\, v \in H.$$

2) Seien $\lambda_1, \ldots \lambda_{i-1}$ und $u_1, \ldots, u_{i-1}$

schon gefunden.

Löse

$$\frac{B(u)}{K(u)} \to \min \; \forall\, 0 \neq u \in \{ \cancel{\langle u, u_j \rangle} = 0 \quad K(u, u_j) = 0 \quad 1 \leq j \leq i-1 \} =: V_i$$

$\Rightarrow \exists$ Lösung u_i

es gilt

$$\lambda_i = \inf \left\{ \frac{B(u)}{K(u)} : 0 \neq u \in V_i \right\}$$

und

$$B(u_i, v) = \lambda_i K(u_i, v) \quad \forall v \in V_i$$

Da für $1 \leq j \leq i-1$ schon gilt

$$B(u_j, v) = \lambda_j K(u_j, v) \quad \forall v \in H$$

$\Rightarrow$

$$B(u_j, u_i) = \lambda_j\, K(u_j, u_i) = 0 \quad \forall\, 1 \le j \le i-1$$

$\Rightarrow$

$$B(u_i, v) = \lambda_i\, K(u_i, v)$$

gilt $\forall v \in H$, da

$$H = V_i \oplus_K \langle u_1, -, u_{i-1} \rangle$$

Sei $u \in H$, so definiere

$$u_m := \sum_{i=1}^{m} K(u, u_i)\, u_i$$

$$\Rightarrow \quad u = u_m + (u - u_m)$$

$$u - u_m \in V_{m+1}$$

Die (u_i) erfüllen daher die

Orthogonalitätsrelationen

$$B(u_i, u_j) = \lambda_i K(u_i, u_j), \quad K(u_i, u_j) = \delta_{ij}$$

3) $\underline{\lambda_i \nearrow \infty}$

Seien die (λ_i) beschränkt $\Rightarrow$

(aus der Koerzitivitätsbed.)

$$\|u_i\| \leq \text{const}$$

$\Rightarrow \exists$ T.F. $u_i \to u$

$\Rightarrow 2 = K(u_i - u_{i+1}) \to 0$ ↯

Hieraus folgt auch die endliche Vielfachheit.

Insbesondere $\exists\, i_0$, so daß

$$\lambda_i > 0 \qquad \forall\, i \geq i_0$$

4) (u_i) sind vollständig, Vollständigkeits-relationen

Sei $u \in H$:

$$u_m := \sum_{i=1}^{m} K(u, u_i)\, u_i =: \sum_{i=1}^{m} c_i\, u_i$$

$$v_m := u - u_m$$

Es gilt

$$v_m \in V_{m+1}$$

$\Longrightarrow$

$$(1) \quad \lambda_{m+1} \cdot K(v_m) \leq B(v_m)$$

Ferner ist

$$K(v_m) = K(u) - K(u_m) = K(u) - \sum_{i=1}^{m} c_i^2$$

$$B(v_m) = B(u) - B(u_m) = B(u) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i^2$$

Da $\lambda_i \geq 0 \quad \forall\, i \geq i_0 \quad \Longrightarrow$

$$B(v_m) \leq \text{const}$$

$\Longrightarrow \; K(v_m) \longrightarrow 0$, da wegen (1)

Ferner konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i^2$$

und für $m < n$

$$B(v_m - v_n) = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i c_i^2 \longrightarrow 0$$

Daher ist (v_m) C. F. in H, denn

$$c \cdot \|u\|^2 \leq B(u) + c_0 K(u)$$

$$\Rightarrow \quad v_m = u - u_m \longrightarrow 0, \quad K(v_m) \longrightarrow 0$$

sowie

$$K(u) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

$$B(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i^2$$

Theorem 3 (Minimax-Prinzip von Courant-Fischer-Weyl)

Für einen Unterraum V von H setze

$$d(V) := \inf \left\{ \frac{B(u)}{K(u)} : 0 \neq u \in H,\ K(u,v) = 0 \ \forall v \in V \right\}$$

$u \in V^{\perp_K}$

Dann ist λ_i gegeben durch

$$\lambda_i = \max \{ d(V) : V \subset H,\ \dim V \leq i-1 \}$$

wobei das max durch den von $\{u_1, .., u_{i-1}\}$ aufgespannten TR angenommen wird.

Beweis:

Sei $V = \langle v_1, \ldots, v_{i-1} \rangle$ beliebig

Setze $u := \sum_{j=1}^{i} c_j u_j$, wobei die c_i

def. sind durch ($\exists u$ / die Projektion auf muß einen Kern haben.

$$\begin{cases} K(u, v_j) = 0 & 1 \le j \le i-1 \\ K(u) = \sum_{j=1}^{i} c_j^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$B(u) = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j c_j^2 \le \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{i} c_i^2 = \lambda_i$$

$\Rightarrow \quad d(V) \le \lambda_i$

$\Rightarrow$ Beh.

(i) $\Rightarrow \quad d(V) \leq \lambda_i$

(ii) Sei $d(V) = \lambda_i$, so zeigt der Beweis, daß

$$\lambda_i \leq B(u) = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j c_j^2 \leq \lambda_i$$

$$\Rightarrow \quad c_j = 0 \quad 1 \leq j \leq i-1 \quad \text{und} \quad c_i = 1$$

d.h.

$$u = u_i$$

Ferner ist $\quad u_i \perp_\kappa V$

Sei $v \in V$: $\quad v = \sum_j c_j u_j$

$$0 = \kappa(u_i, v) =$$

1) $-\Delta u_i = \lambda_i u_i$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

w whle $H = H_0^{1,2}(\Omega)$

$$B(u,v) = \int_\Omega Du \cdot Dv$$

$$K(u,v) = \int_\Omega u \cdot v$$

2) $H = H^{1,2}(\Omega)$

3) $H = H^{1,2}(M)$

zu 1.7

Eigenwerte von $-\Delta$ auf kompakten Mannigfaltigkeiten

Sei $M = M^n$ eine n-dim kompakte Mannigfaltigkeit. Seien $x = (x^i)$ lokale Koordinaten, $x \in \Omega$,

$$(g_{ij}) = \text{Metrik}$$

$$g = \det(g_{ij})$$

dann gilt

1.7.4 Satz

$d\mu = \sqrt{g}\, dx$ ist ein Maß auf M, d.h. sei $\operatorname{supp} f \subset x(\Omega)$, $f \in C^0(M)$, so ist

$$\int_M f = \int_M f\, d\mu = \int_\Omega f(x) \sqrt{g}\, dx$$

<u>Beweis:</u>

Seien $(\tilde{y}, \tilde{\Omega})$ andere Koordinaten

und $\operatorname{supp} f \subset x(\Omega) \cap \tilde{y}(\tilde{\Omega})$

$\Rightarrow$

$$\tilde{g}_{ij} = g_{kl} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j}$$

$$\tilde{g} = g \cdot \left| \frac{dx}{d\tilde{x}} \right|^2$$

$$\sqrt{\tilde{g}} = \sqrt{g} \cdot \left| \frac{dx}{d\tilde{x}} \right|$$

$$\int_M f = \int_\Omega f \sqrt{g} \cdot dx = \int_{\tilde{\Omega}} f \cdot \sqrt{g} \cdot \left| \frac{dx}{d\tilde{x}} \right| \cdot d\tilde{x}$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} f \sqrt{\tilde{g}}\, d\tilde{x}$$

1.7.5 Satz Thm (Divergenzsatz)

Sei $M = M^n$ nicht notwendiger Weise kompakt.

Sei $\xi = (\xi^i) \in C^1(M)$, $\varphi \in C^1(M)$ und habe ξ oder φ kompakten Träger. Dann gilt

$$\int_M \operatorname{div} \xi \cdot \varphi = \int_M D_i \xi^i \cdot \varphi = - \int_M \xi^i D_i \varphi$$

Beweis:

Sei o.B.d.A. $\operatorname{supp} \varphi$ kompakt.

(i) Sei $\operatorname{supp} \varphi \subset\subset$ Karte $= x(\Omega)$

$\Rightarrow$

$$\int_M \operatorname{div} \xi \cdot \varphi = \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \cdot \xi^i \right) \varphi \sqrt{g}$$

$$= - \int_\Omega \xi^i D_i \varphi \cdot \sqrt{g} \, dx = - \int_M \xi^i D_i \varphi$$

(ii) Sei (U_k) eine offene Überdeckung von M, so daß U_k eine Karte $U_k = x(\Omega_k)$ und (η_k) eine untergeordnete Zerlegung der Eins $\Rightarrow$

$$\int_M \operatorname{div} \xi \cdot \varphi = \sum_k \int_M \operatorname{div} \xi \cdot \varphi \cdot \eta_k$$

$$= \sum_k - \int_M \xi^i \cdot D_i (\varphi \cdot \eta_k)$$

$$= \sum_k - \left\{ \int_M \xi^i D_i \varphi \cdot \eta_k + \xi^i D_i \eta_k \cdot \varphi \right\}$$

$$= - \int_M \xi^i D_i \varphi$$

1.7.6 Definition

(i) f heißt meßbar auf M, falls in lokalen Lebesgue Koordinaten f meßbar ist.

(ii) $f \in L^p(M)$, falls $\int_M |f|^p < \infty$

(iii) $H^{m,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(M) : \int_M |Df|^p + \int_M |f|^p < \infty \right\}$

$\mathcal{D}'(M)$ völlig analog.

schwache Ableitung:

$Dy \in L^p(M)$, falls $\exists (f_i) \in L^p(\Omega)$ $\forall (\xi^i) \in C_c^\infty(M)^n$

$$\int_M y \cdot \operatorname{div} \xi = - \int_M f_i \cdot \xi^i$$

und $\int_M |g^{ij} f_i f_j|^{\frac{p}{2}} \leq$ const.

1.7.7 Lemma

$$-\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} D_j u\right)$$

$$= - g^{ij} D_i D_j u$$

ist die Euler-Lagrange-Op. des Funktionals

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_M |Dv|^2$$

1.7.8 Thm

Sei $\Omega \subset\subset M$ ($\partial\Omega \in C^{0,1}$) (d.h. so ist $\Omega = M$ zulässig, falls M kompakt), dann gelten für $H^{m,p}(\Omega)$ bzw. $H_0^{m,p}(\Omega)$ die bekannten Sobolevschen Einbettungssätze.

<u>Beweis</u>: Wir wollen dies nur am

Beispiel

$H^{1,p}_0(N) \hookrightarrow L^p(N)$ kompakt

demonstrieren.

Sei (U_k) eine endliche Überdeckung durch Karten von $\bar{N}$ und (η_k) eine endliche Zerlegung der Eins. Sei (u_i) eine Folge in $H^{1,p}(N)$ mit $\|u_i\|_{1,p,N} = \left\{ \int_N |Du_i|^p + \int_N |u_i|^p \right\}^{1/p} \le c$

$\Rightarrow$

$\|u_i \eta_k\|_{1,p} \le$ const. $\forall (i,k)$

$\cancel{\Rightarrow}$

<u>Bem</u>: Für jede Karte U_k existiert T. F. (u_{i_k}), ~~die in L^p~~ sodass $u_{i_k} \cdot \eta_k \xrightarrow[L^p]{}$

Bew:

$$\int_M |D(u_i \eta_k)|^p \geq \int_{\Omega_k} |g^{ij} D_i(u_i \cdot \eta_k) D_j(u_i \cdot \eta_k)|^{p/2} \cdot \sqrt{g}$$

$$\geq c\lambda \cdot \int_{\Omega_k} |D(u_i \cdot \eta_k)|^p ,$$

da (g^{ij}) pos. definit!

1.7.9 Thm:

Sei M = kompakt. Dann existieren abzählbar viele EW von $-\Delta$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, endl. Vielfachheit, $\lim \lambda_i = \infty$. Die Eigenfunktionen ~~spannen~~ liegen ~~$L^2(M)$~~ dicht in $L^2(M)$

Beweis:

Wende den abstrakten Eigenwertsatz an in $H = H^{1,2}(M)$ mit

$$B(u,v) = \int_M Du \cdot Dv$$

$$K(u,v) = \int_M u \cdot v$$

1) Für das Dirichletproblem ist

$\lambda_1 > 0$ und u_1 wechselt das Vorzeichen nicht.

da mit u_1 auch $|u_1|$ Lösung ist + Harnack

2) Auf S^{n-1} sind die 1. Eigenfunktionen für $-\Delta$ die Koordinatenfunktionen, d.h.

$$u = x^i$$

$$\lambda_1 = n-1$$

Einführung von Polarkoordinaten

$$x^\alpha = a^\alpha r \, , \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} a^{\alpha 2} = 1$$

und $a^i = a^i(\varphi^1, -, \varphi^{n-1}) = a^i(\varphi^\alpha)$

$$= a^\alpha(\xi^i)$$

Bezeichnen wir die Metrik auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

auf S^{n-1} mit $\gamma_{\alpha\beta}$, so gilt

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{ij} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial \varphi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial x^\beta}$$

Andererseits ~~beschränkt~~ ist (r, φ^α) auch ein Koordinatensystem für $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

In diesem Koordinatensystem hat die Metrik die Gestalt

$$g_{00} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial r}$$

$$g_{0\alpha} = g_{i\gamma} \frac{\partial x^i}{\partial r} \cdot \frac{\partial x^\gamma}{\partial \varphi^\alpha}$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{i\gamma} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \varphi^\beta}$$

$\Longrightarrow$

$$ds^2 = dr^2 + 2\, \underbrace{g_{i\gamma}\, a^i \cdot \frac{\partial a^\gamma}{\partial \varphi^\alpha}}_{=0} \cdot r\, dr\, d\varphi^\alpha$$

$$+ r^2 \gamma_{\alpha\beta}\, d\varphi^\alpha d\varphi^\beta$$

Der Laplaceoperator des $\mathbb{R}^n$ $-\Delta$ hat

daher die Gestalt

$-\cancel{\Delta u} = \cancel{f}$

$$g = r^{2(n-1)} \cdot \gamma$$

$$\sqrt{g} = r^{n-1} \cdot \sqrt{\gamma}$$

$$-\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{g^i} \left(\sqrt{g} \cdot \tilde{g}^{ij} \partial_j u \right)$$

$$= -\frac{1}{r^{n-1}} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \sqrt{\gamma} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$- \frac{1}{r^{n-1}} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} \left(r^{n-1} \sqrt{\gamma}\, r^{-2} \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial \varphi^\beta} \right)$$

$\Rightarrow$

$$-\Delta u = -\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$- r^{-2} \Delta_{S^{n-1}} u$$

Sei jetzt φ eine Funktion auf S^{n-1} und

$$u = r^k \cdot \varphi \qquad , \; k \geq 0$$

eine Fortsetzung auf $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$

$$-\Delta u = -(n-1)\, r^{-1} \cdot \varphi - r^{-1} \Delta_{S^{n-1}} \varphi$$

$$= r^{-1} \left\{ -\Delta_{S^{n-1}} \varphi - (n-1)\, \varphi \right\}$$

$$-\Delta u = -k(n-2+k)\, r^{k-2}\cdot\varphi - r^{k-2}\Delta_{S^{n-1}}\varphi$$

$$= r^{k-2}\left\{-\Delta_{S^{n-1}}\varphi - k(n+k-2)\varphi\right\}$$

Wird haben damit eine Entsprechung gefunden zwischen den harmonischen Funktionen homogen vom Grade k und Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf S^{n-1}

Daher sind die Koordinatenfunktionen x^i Eigenfunktionen von $-\Delta_{S^{n-1}}$ zum EW $(n-1)$. Es gilt

$$\lambda_1 = n-1$$

Fouriertrf. in $\mathcal{S}'$

$$F(D_\alpha T) = i^{|\alpha|} x^\alpha F(T)$$

$$F(x^\alpha T) = i^{|\alpha|} D_\alpha F(T)$$

$$F^{-1}(\quad) = (-i)^{|\alpha|}(\quad)$$

$$-\Delta T = 0 \quad \Rightarrow 0 = F^{-1}(-\Delta T) = |x|^2 F^{-1}(T)$$

$$\Rightarrow F^{-1}(T) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D_\alpha \delta$$

$$\Rightarrow T = \sum_{|\alpha| \leq N} a^\alpha F(D_\alpha \delta) = \sum_{|\alpha| \leq N} a^\alpha i^{|\alpha|} x^\alpha \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

Sei λ ein EW von $-\Delta_{S^{n-1}}$ zum EV φ

$\Rightarrow$ $\lambda > 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ k mit

$$k(n+k-2) = \lambda$$

$\Rightarrow$ $u = r^k \varphi$ ist harmonisch in

$\mathbb{R}^n$ vom Grade k ~~≥~~ > 0.

Thm: u harmonisch in $\mathbb{R}^n$ vom homogen Grade

$k > 0$ $\Rightarrow$ u = harmonisches Polynom

Nun ist $k(n+k-2) \nearrow k$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 \Longleftrightarrow k = 1$, d.h. $\lambda_1 = n-1$

$$\int_{\mathbb{R}^n - B_\rho} u \cdot \Delta \eta = -\int_{\sim} Du \cdot D\eta + \int_{\partial B_\rho} u\, D\eta \cdot \nu$$

$$= +\int_{\sim} \underbrace{\Delta u \cdot \eta}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial B_\rho} u \cdot D\eta \cdot \nu}_{\rho^{k+n-1}} - \underbrace{\int_{\partial B_\rho} Du \cdot \nu\, \eta}_{\rho^{k+n-2}}$$

Thm!

Sei u harmonisch in $\dot{\mathbb{R}}^n$ vom Grade $k \geq 0$

$\cancel{\Rightarrow}$ u = harmonisches Polynom

Beweis: $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\Delta u = 0$ in $\mathcal{D}'$

$\Rightarrow$ u = harm. Polynom $\Rightarrow$ $k \in \mathbb{N}$