Übungen zu Krümmungsproblemen

Blatt 5

1 Sei $N = N^{n+1}$ semi-Riemannsch, $I = (a, b)$ ein offenes Intervall, $M_0 = M_0^n$ eine präkompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M_0 und

$$x \in C^2(I \times M_0, N) \cap C^1(I \times \bar{M}_0, N) \tag{0.1}$$

eine Abbildung, so daß

$$x(t, \cdot) : M_0 \to N \tag{0.2}$$

eine Einbettung ist und

$$M(t) = x(t)(M_0) \tag{0.3}$$

eine raumartige Hyperfläche mit Normaler ν und C^1-Rand ∂M. Sei $|M(t)|$ das kanonische Maß vom $M(t)$. Beweisen Sie dann bitte

$$\frac{dM(t)}{dt} = \sigma \int_M H\langle \dot{x}, \nu\rangle + \int_{\partial M} \langle \dot{x}, \bar{\nu}\rangle, \tag{0.4}$$

wobei $\sigma = \langle \nu, \nu\rangle$, $\bar{\nu}$ die äußere Normale von ∂M und wir nicht zwischen $\bar{\nu} \in T(M)$ und $\bar{\nu} \in T(N)$ unterscheiden.

2 Sei $N = N^{n+1}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $M_0 = M_0^{n+1}$ eine präkompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M_0 und

$$x \in C^2(I \times M_0, N) \cap C^1(I \times \bar{M}_0, N) \tag{0.5}$$

eine Abbildung, so daß

$$x(t, \cdot) : M_0 \to N \tag{0.6}$$

eine Einbettung ist und

$$M(t) = x(t)(M_0) \tag{0.7}$$

eine offene Menge mit C^1-Rand ∂M. Die Koordinaten in N seien x^α und die in M_0 ξ^i, $0 \le i \le n$. Sei g_{ij} die induzierte Metrik und $|M(t)|$ das kanonische Maß vom $M(t)$. Beweisen Sie dann bitte

(i) Für festes t ist die Einbettung *affin*, d.h. für die kovarianten zweiten Ableitungen gilt

$$x_{ij} = 0. \tag{0.8}$$

(ii)

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_{\partial M} \langle \dot{x}, \nu\rangle, \tag{0.9}$$

wobei ν die äußere Normale von M ist.

(iii) Formulieren und beweisen Sie ein ähnliches Resultat, wenn N semi-Riemannsch ist.

(iv) Jede Isometrie zwischen zwei semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit ist affin.